

РАСЧЕТ НАПРЯЖЕННОСТИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ И ПЛОТНОСТИ ТОКА ВНУТРИ ТОНКОГО МЕТАЛЛИЧЕСКОГО СЛОЯ С УЧЕТОМ СКИН-ЭФФЕКТА

© 2023 г. Э. В. Завитаев¹*, О. В. Русаков², Е. П. Чухлеб³

¹Мытищинский филиал Московского государственного

технического университета им. Н.Э. Баумана, Мытищи, 141005 Россия

²Государственный гуманитарно-технологический университет, Орехово-Зуево, 142611 Россия

³Муниципальное учреждение дополнительного образования Центр дополнительного образования “Малая академия наук Импульс”, Черноголовка, 142432 Россия

*E-mail: EduardZavitaev@yandex.ru

Поступила в редакцию 01.08.2022 г.

После доработки 01.08.2022 г.

Принята к публикации 15.09.2022 г.

Впервые решена задача о распределении электрического поля и электрического тока внутри тонкого металлического слоя при наличии скин-эффекта с учетом зеркально-диффузного характера отражения электронов от внутренних поверхностей слоя. Рассмотрены предельные случаи и проведено обсуждение полученных результатов.

Ключевые слова: тонкий слой, скин-эффект, электрическое поле

DOI: 10.31857/S0544126922700193, **EDN:** CXYORE

1. ВВЕДЕНИЕ

Научная проблема экранировки электрического поля внутри малых проводящих объектов, представляет значительный интерес в теоретической физике, микроэлектронике, оптоэлектронике и тонкопленочных технологиях [1–3]. Актуальность изучения данной проблемы обуславливается тем, что классические размерные эффекты, оказывающие существенное влияние на электрические и оптические свойства тонких пленок, проволок и мелких частиц, требуют детального кинетического расчета.

Практическая значимость изучения проблемы экранировки внешнего электрического поля обусловлена широким спектром применения тонких пленок, проволок и мелких частиц в микро- и оптоэлектронике. В частности, это связано с важным прикладным значением тонких, в том числе поликристаллических и металлических пленок, поэтому к их параметрам и свойствам предъявляются довольно высокие требования. Например, тонкие пленки могут использоваться в качестве проводящих, светоотражающих, защитных покрытий.

В современных работах [4–6] впервые построена кинетическая теория высокочастотной электропроводности и постоянной Холла тонкой проводящей пленки с учетом различных коэффициентов зеркальности ее поверхностей. В работе [7]

рассмотрено поведение электронной плазмы в тонкой металлической пластине в переменном электрическом поле. Особенность этих работ заключается в том, что расчеты базируются на применении уравнения Больцмана и с помощью введения соответствующих граничных условий позволяют учесть не только объемное, но и поверхностное рассеяние носителей заряда.

В перечисленных работах не учитывается проявление скин-эффекта из предположения, что толщина слоя мала по сравнению с характерной глубиной скин-слоя. Однако указанное условие может нарушаться, поэтому необходимо последовательное построение теории с учетом проявления данного размерного эффекта.

В настоящей работе моментным методом [8] рассчитана функция распределения, описывающая линейный отклик электронов в однородном металлическом слое на переменное электрическое поле, ориентированное параллельно его поверхности. По найденной функции распределения удалось рассчитать зависимость напряженности электрического поля внутри слоя, плотности тока и полного тока через поперечное сечение слоя от “скин-параметра” (отношения толщины слоя к глубине скин-слоя), от отношения толщины слоя к длине свободного пробега электронов и часто-

ты, а также от коэффициентов зеркальности поверхностей металла.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается тонкий металлический слой толщиной b и шириной L , к которому приложено переменное напряжение частоты ω . Электрическое поле параллельно слою и направлено вдоль координатной оси Z , ось X перпендикулярна слою. Напряженность поля \mathbf{E} может быть выражена в зависимости от времени t :

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp(-i\omega t). \quad (1)$$

Исходя из того, что неравновесная функция Ферми-Дирака для электронов $f(x, \mathbf{v}) = f_0(\epsilon) + f_1(x, \mathbf{v})$ удовлетворяет уравнению Больцмана [9], имеем:

$$v_x \frac{\partial f_1}{\partial x} + e v_z E \frac{\partial f_0}{\partial \epsilon} - i\omega f_1 = -\frac{f_1}{\tau}, \quad (2)$$

где e – заряд электронов, v_z, v_x – соответствующие проекции вектора их скорости на координатные оси, τ – электронное время релаксации.

Здесь $f_0'(\epsilon) = -\delta(\epsilon - \epsilon_F)$, где δ – дельта-функция Дирака, ϵ_F – энергия Ферми, $\epsilon = mv^2/2$ – кинетическая энергия электронов, v – модуль вектора скорости электронов \mathbf{v} , m – эффективная масса электронов.

Плотность высокочастотного тока \mathbf{j} , вызванного приложенным напряжением, рассчитывается по формуле:

$$\mathbf{j} = en \langle \mathbf{v} \rangle = en \left[\int f_0 d^3 \mathbf{v} \right]^{-1} \int f_1 \mathbf{v} d^3 \mathbf{v}. \quad (3)$$

Здесь n – концентрация электронов проводимости, определяемая с помощью распределения Ферми-Дирака:

$$n = 2 \left(\frac{m}{h} \right)^3 \int f_0 d^3 \mathbf{v} = 2 \left(\frac{m}{h} \right)^3 \frac{4\pi v_F^3}{3},$$

где h – постоянная Планка, v_F – скорость Ферми [10].

В формуле (3) использована стандартная нормировка функции распределения f , при которой плотность электронных состояний равна $2/h^3$.

Однозначное решение поставленной задачи возможно при выборе граничного условия для неиз-

вестной функции f_1 на верхней и нижней границе металлического слоя. В качестве такого принимаем условия зеркально-диффузного отражения электронов от его поверхности:

$$\begin{cases} f_1(v_x, x) = q_1 f_1(-v_x, x), & v_x < 0, \quad x = b, \\ f_1(v_x, x) = q_2 f_1(-v_x, x), & v_x > 0, \quad x = 0, \end{cases} \quad (4)$$

где q_1 и q_2 – коэффициенты зеркальности (вероятности зеркального отражения): $0 \leq q_i \leq 1$ ($i = 1, 2$).

При $q_i = 0$ получаем условие диффузного отражения электронов проводимости от внутренней поверхности металлического слоя, а при $q_i = 1$ условие чисто зеркального отражения. При значениях $q_i \neq 0$ и $q_i \neq 1$ получаем различные варианты смешанного зеркально-диффузного отражения электронов.

Связь между \mathbf{E} и \mathbf{j} в случае, когда толщина слоя сравнима с длиной свободного пробега электронов в металле Λ (или меньше ее: $b < \Lambda$), оказывается существенно нелокальной. Взяв в уравнении (2) поле \mathbf{E} в виде (1), найдем функцию распределения f_1 как решение этого уравнения. Затем, используя выражение (3), определим плотность тока \mathbf{j} внутри слоя.

Кроме того, для решения поставленной задачи необходимо использовать уравнение для напряженности электрического поля внутри слоя. Такое уравнение получаем из системы уравнений Максвелла без учета тока смещения, который пренебрежимо мал по сравнению с током проводимости:

$$\Delta \mathbf{E} = -i\omega \mu_0 \mathbf{j}. \quad (5)$$

3. ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Подставив в уравнение (2) функцию

$$f_1(x, \mathbf{v}) = g(x, \mathbf{v}) \delta(\epsilon - \epsilon_F) \exp(-i\omega t),$$

получим

$$v g + v_x \frac{\partial g}{\partial x} - e v_z E(x) = 0, \quad (6)$$

где $v = 1/\tau - i\omega$ – комплексная частота рассеяния.

Решение уравнения (6) проведем с помощью моментного метода [8]:

$$g = a_1(x) v_z + a_2(x) v_z \text{sign}(v_x). \quad (7)$$

С учетом (7) уравнение (6) принимает вид

$$\begin{aligned} & v(a_1 v_z + a_2 v_z \text{sign}(v_x)) + v_x v_z \frac{\partial a_1}{\partial x} + \\ & + v_x v_z \text{sign}(v_x) \frac{\partial a_2}{\partial x} - e v_z E(x) = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Умножим выражение (8) на v_z и проинтегрируем по пространству скоростей:

$$va_1 \int v_z^2 d^3 \mathbf{v} + va_2 \int v_z^2 \text{sign}(v_x) d^3 \mathbf{v} + \frac{\partial a_1}{\partial x} \int v_x v_z^2 d^3 \mathbf{v} + \\ + \frac{\partial a_2}{\partial x} \int v_x v_z^2 \text{sign}(v_x) d^3 \mathbf{v} - eE(x) \int v_z^2 d^3 \mathbf{v} = 0.$$

Далее вычислим значения всех четырех интегралов и подставим их в последнее равенство

$$\int v_z^2 d^3 \mathbf{v} = \int_0^{v_F} v_{\perp} dv_{\perp} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\sqrt{v_F^2 - v_{\perp}^2}}^{\sqrt{v_F^2 - v_{\perp}^2}} v_z^2 dv_z = \frac{4\pi}{15} v_F^5; \\ \int v_z^2 \text{sign}(v_x) d^3 \mathbf{v} = \int_0^{v_F} v_{\perp} \left(\int_{-\sqrt{v_F^2 - v_{\perp}^2}}^{\sqrt{v_F^2 - v_{\perp}^2}} v_z^2 dv_z \right) dv_{\perp} \times \\ \times \int_0^{2\pi} \text{sign}(\cos\varphi) d\varphi = 0; \\ \int v_x v_z^2 d^3 \mathbf{v} = \int_0^{v_F} v_{\perp}^2 dv_{\perp} \int_0^{2\pi} \cos\varphi d\varphi \int_{-\sqrt{v_F^2 - v_{\perp}^2}}^{\sqrt{v_F^2 - v_{\perp}^2}} v_z^2 dv_z = 0; \\ \int v_x v_z^2 \text{sign}(v_x) d^3 \mathbf{v} = \int_0^{v_F} v_{\perp}^2 \left(\int_{-\sqrt{v_F^2 - v_{\perp}^2}}^{\sqrt{v_F^2 - v_{\perp}^2}} v_z^2 dv_z \right) dv_{\perp} \times \\ \times \int_0^{2\pi} \cos\varphi \text{sign}(\cos\varphi) d\varphi = \frac{\pi}{12} v_F^6.$$

В результате приходим к уравнению

$$\frac{4}{5} va_1 + \frac{v_F}{4} \frac{\partial a_2}{\partial x} = \frac{4}{5} eE(x). \quad (9)$$

Умножим выражение (8) на $v_z \text{sign}(v_x)$ и проинтегрируем по пространству скоростей:

$$va_1 \int v_z^2 \text{sign}(v_x) d^3 \mathbf{v} + va_2 \int v_z^2 \text{sign}^2(v_x) d^3 \mathbf{v} + \\ + \frac{\partial a_1}{\partial x} \int v_x v_z^2 \text{sign}(v_x) d^3 \mathbf{v} + \frac{\partial a_2}{\partial x} \int v_x v_z^2 \text{sign}^2(v_x) d^3 \mathbf{v} - \\ - eE(x) \int v_z^2 \text{sign}(v_x) d^3 \mathbf{v} = 0.$$

Найдем выражения двух оставшихся интегралов

$$\int v_z^2 \text{sign}^2(v_x) d^3 \mathbf{v} = \int v_z^2 d^3 \mathbf{v} = \frac{4\pi}{15} v_F^5; \\ \int v_x v_z^2 \text{sign}^2(v_x) d^3 \mathbf{v} = \int v_x v_z^2 d^3 \mathbf{v} = 0.$$

Таким образом, приходим к уравнению

$$\frac{4}{5} va_2 + \frac{v_F}{4} \frac{\partial a_1}{\partial x} = 0. \quad (10)$$

Решая совместно систему уравнений (9) и (10), получим

$$\frac{\partial^2 a_1}{\partial x^2} - \lambda^2 a_1 = -\frac{\lambda^2 e}{v} E(x). \quad (11)$$

В уравнении (11) перейдем к безразмерной переменной $\xi = x/b$, $\partial \xi = \partial x/b$:

$$\frac{\partial^2 a_1}{\partial \xi^2} - \lambda^2 b^2 a_1 = -\frac{\lambda^2 e b^2}{v} E(\xi), \quad (12)$$

где $v\tau = 1 - i\omega\tau = 1 - i\Omega v_F \tau/b = 1 - i\Omega/\Delta = \chi/\Delta$, $\lambda = 16v/(5v_F)$, Ω – безразмерная частота электрического поля, Δ – безразмерная обратная длина свободного пробега электронов, $\chi = \Delta - i\Omega$ – безразмерная комплексная частота рассеяния электронов.

Преобразуем уравнение (5) для напряженности электрического поля внутри слоя как

$$\frac{\partial^2 E}{\partial \xi^2} = -i\omega\mu_0 b^2 j_z.$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial \xi^2} = -i\omega\mu_0 b^2 \frac{ne}{m} a_1(\xi),$$

Для полученного уравнения будем использовать граничные условия

$$\begin{cases} E|_{\xi=1} = E_0, \\ E|_{\xi=0} = E_0. \end{cases} \quad (13)$$

Плотность тока внутри слоя определяется соотношением (3), которое после соответствующих преобразований примет вид [8]:

$$j_z = \frac{ne}{m} \exp(-i\omega t) a_1(\xi). \quad (14)$$

Подставим (14) в полученное уравнение

$$\frac{\partial^2 E}{\partial \xi^2} = -i\omega\mu_0 b^2 \frac{ne}{m} \exp(-i\omega t) a_1(\xi),$$

которое для амплитуды напряженности электрического поля внутри слоя можно записать в виде

или

$$\frac{\partial^2 E}{\partial \xi^2} = A a_1(\xi), \quad (15)$$

где $A = -i\omega\mu_0 b^2 ne/m = -2ib^2 / (\delta^2 e\tau) = -2i\psi^2 / (e\tau)$. Здесь учтено, что глубина скин-слоя δ связана с объемной статической удельной проводимостью металла $\sigma_0 = ne^2\tau/m$ соотношением $2/\delta^2 = \sigma_0\omega\mu_0$, а “скин-параметр” $\psi = b/\delta$.

Объединим в систему уравнения (12) и (15)

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 a_1}{\partial \xi^2} - \lambda^2 b^2 a_1 = -\frac{\lambda^2 eb^2}{v} E(\xi), \\ \frac{\partial^2 E}{\partial \xi^2} = A a_1(\xi). \end{cases}$$

Обозначив константы

$$\begin{cases} C = \lambda^2 b^2 = \frac{16^2 v^2 b^2}{5^2 v_F^2} = \frac{16^2}{5^2} \chi^2, \\ B = -\frac{\lambda^2 eb^2}{v} = -\frac{16^2 v^2 b^2 e}{5^2 v_F^2 v} = -\frac{16^2 v b^2 e}{5^2 v_F^2} = -\frac{16^2 \chi eb}{5^2 v_F}, \end{cases} \quad (16)$$

получим

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 a_1}{\partial \xi^2} - C a_1 = B E(\xi), \\ \frac{\partial^2 E}{\partial \xi^2} = A a_1(\xi). \end{cases} \quad (17)$$

Будем искать решение системы (17) в виде

$$E(\xi) = k a_1(\xi), \quad (18)$$

где k – некоторая константа.

Произведем замену в уравнениях (17), используя (18), тогда система примет следующий вид

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 E}{\partial \xi^2} - (Bk + C) E = 0, \\ \frac{\partial^2 E}{\partial \xi^2} = \frac{A}{k} E. \end{cases} \quad (19)$$

Откуда

$$\frac{A}{k} E(\xi) - (Bk + C) E(\xi) = 0 \Rightarrow \frac{A}{k} = Bk + C, \quad (20)$$

или

$$Bk^2 + Ck - A = 0,$$

следовательно

$$k_{1,2} = \frac{-C \pm \sqrt{C^2 + 4BA}}{2B}. \quad (21)$$

Подставляя (21) в первое уравнение системы (19) получим

$$\frac{\partial^2 E}{\partial \xi^2} - \left[\frac{C}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{C^2 + 4BA} \right] E = 0,$$

или

$$\frac{\partial^2 E}{\partial \xi^2} - \mu_{1,2}^2 E = 0, \quad (22)$$

где $\mu_{1,2}^2 = \frac{C}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{C^2 + 4BA} = \frac{A}{k_{1,2}}$ в силу (20).

Запишем $\mu_{1,2}^2$ в безразмерной форме:

$$\begin{aligned}\mu_{1,2}^2 &= \frac{16^2 \chi^2}{2 \times 5^2} \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{25i\psi^2 b}{32\chi^3 v_F \tau}} \right) = \\ &= \left| \Delta = \frac{b}{v_F \tau} \right| = \frac{16^2 \chi^2}{2 \times 5^2} \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{25i\psi^2 \Delta}{32\chi^3}} \right).\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}k_{1,2} &= \frac{A}{\mu_{1,2}^2} = \frac{-2i\psi^2 / (e\tau)}{\frac{16^2 \chi^2}{2 \times 5^2} \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{25i\psi^2 \Delta}{32\chi^3}} \right)} = \\ &= \frac{\chi}{2e\tau\Delta} \left(1 \mp \sqrt{1 + \frac{25i\psi^2 \Delta}{32\chi^3}} \right).\end{aligned}$$

Окончательно получим

$$\begin{aligned}\mu_{1,2} &= \frac{16\chi}{5\sqrt{2}} \sqrt{1 \pm \sqrt{1 + \frac{25i\psi^2 \Delta}{32\chi^3}}}, \\ k_{1,2}^* &= e\tau k_{1,2} = \frac{\chi}{2\Delta} \left(1 \mp \sqrt{1 + \frac{25i\psi^2 \Delta}{32\chi^3}} \right).\end{aligned}\tag{23}$$

Решение дифференциального уравнения (22) можно представить как

$$\begin{aligned}E(\xi) &= C_1 \exp(\mu_1 \xi) + C_2 \exp(-\mu_1 \xi) + \\ &+ C_3 \exp(\mu_2 \xi) + C_4 \exp(-\mu_2 \xi).\end{aligned}\tag{24}$$

Тогда, с учетом (18),

$$\begin{aligned}a_1(\xi) &= \frac{C_1}{k_1} \exp(\mu_1 \xi) + \frac{C_2}{k_1} \exp(-\mu_1 \xi) + \\ &+ \frac{C_3}{k_2} \exp(\mu_2 \xi) + \frac{C_4}{k_2} \exp(-\mu_2 \xi).\end{aligned}\tag{25}$$

Из (10), с учетом (25), найдем

$$\begin{aligned}a_2(\xi) &= -\frac{5v_F}{16vb} \frac{\partial a_1(\xi)}{\partial \xi} = -\frac{1}{\lambda b} \frac{\partial a_1(\xi)}{\partial \xi} = -\frac{1}{\sqrt{C}} \frac{\partial a_1(\xi)}{\partial \xi} = \\ &= -\frac{1}{\sqrt{C}} \left(\frac{\mu_1 C_1}{k_1} \exp(\mu_1 \xi) - \frac{\mu_1 C_2}{k_1} \exp(-\mu_1 \xi) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\mu_2 C_3}{k_2} \exp(\mu_2 \xi) - \frac{\mu_2 C_4}{k_2} \exp(-\mu_2 \xi) \right).\end{aligned}\tag{26}$$

Тогда из выражений (7), (25) и (26) следует:

$$\begin{aligned}g(\xi) &= \left(\frac{C_1}{k_1} \exp(\mu_1 \xi) + \frac{C_2}{k_1} \exp(-\mu_1 \xi) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{C_3}{k_2} \exp(\mu_2 \xi) + \frac{C_4}{k_2} \exp(-\mu_2 \xi) \right) v_z - \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{C}} \left(\frac{\mu_1 C_1}{k_1} \exp(\mu_1 \xi) - \frac{\mu_1 C_2}{k_1} \exp(-\mu_1 \xi) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\mu_2 C_3}{k_2} \exp(\mu_2 \xi) - \frac{\mu_2 C_4}{k_2} \exp(-\mu_2 \xi) \right) v_z \text{sign}(v_x).\end{aligned}\tag{27}$$

Применим граничные условия (13) и (4) для нахождения коэффициентов C_1, C_2, C_3 и C_4 :

$$\begin{cases} E|_{\xi=0} = E_0, & \left\{ g(v_x, \xi) = q_2 g(-v_x, \xi), v_x > 0, \xi = 0, \right. \\ E|_{\xi=1} = E_0, & \left. \left\{ g(v_x, \xi) = q_1 g(-v_x, \xi), v_x < 0, \xi = 1. \right. \right. \end{cases} \quad (28)$$

Тогда из (28), с учетом (24) и (27), получим систему уравнений

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + C_3 + C_4 = E_0, & C_1 \exp(\mu_1) + \\ & + C_2 \exp(-\mu_1) + C_3 \exp(\mu_2) + C_4 \exp(-\mu_2) = E_0, \\ \frac{C_1}{k_1} \left[1 - q_2 - \frac{\mu_1}{\sqrt{C}}(1 + q_2) \right] + \frac{C_2}{k_1} \left[1 - q_2 + \right. \\ & \left. + \frac{\mu_1}{\sqrt{C}}(1 + q_2) \right] + \frac{C_3}{k_2} \left[1 - q_2 - \frac{\mu_2}{\sqrt{C}}(1 + q_2) \right] + \\ & + \frac{C_4}{k_2} \left[1 - q_2 + \frac{\mu_2}{\sqrt{C}}(1 + q_2) \right] = 0, & \frac{C_1 e^{\mu_1}}{k_1} \left[1 - q_1 + \right. \\ & \left. + \frac{\mu_1}{\sqrt{C}}(1 + q_1) \right] + \frac{C_2 e^{-\mu_1}}{k_1} \left[1 - q_1 - \frac{\mu_1}{\sqrt{C}}(1 + q_1) \right] + \\ & + \frac{C_3 e^{\mu_2}}{k_2} \left[1 - q_1 + \frac{\mu_2}{\sqrt{C}}(1 + q_1) \right] + \\ & + \frac{C_4 e^{-\mu_2}}{k_2} \left[1 - q_1 - \frac{\mu_2}{\sqrt{C}}(1 + q_1) \right] = 0. \end{cases}$$

С учетом переобозначений

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + C_3 + C_4 = E_0, \\ e_1 C_1 + e_2 C_2 + e_3 C_3 + e_4 C_4 = E_0, \\ D_1 C_1 + D_2 C_2 + D_3 C_3 + D_4 C_4 = 0, \\ B_1 C_1 + B_2 C_2 + B_3 C_3 + B_4 C_4 = 0, \end{cases} \quad (29)$$

где обозначенные коэффициенты

$$\begin{cases} e_1 = \exp(\mu_1), e_2 = \exp(-\mu_1), e_3 = \exp(\mu_2), \\ e_4 = \exp(-\mu_2); & D_1 = \frac{1}{k_1} \left[1 - q_2 - \frac{\mu_1}{\sqrt{C}}(1 + q_2) \right], \\ D_2 = \frac{1}{k_1} \left[1 - q_2 + \frac{\mu_1}{\sqrt{C}}(1 + q_2) \right], & D_3 = \frac{1}{k_2} \left[1 - q_2 - \right. \\ & \left. - \frac{\mu_2}{\sqrt{C}}(1 + q_2) \right], & D_4 = \frac{1}{k_2} \left[1 - q_2 + \frac{\mu_2}{\sqrt{C}}(1 + q_2) \right]; \\ B_1 = \frac{e^{\mu_1}}{k_1} \left[1 - q_1 + \frac{\mu_1}{\sqrt{C}}(1 + q_1) \right], & B_2 = \frac{e^{-\mu_1}}{k_1} \left[1 - q_1 - \right. \\ & \left. - \frac{\mu_1}{\sqrt{C}}(1 + q_1) \right], & B_3 = \frac{e^{\mu_2}}{k_2} \left[1 - q_1 + \frac{\mu_2}{\sqrt{C}}(1 + q_1) \right], \\ B_4 = \frac{e^{-\mu_2}}{k_2} \left[1 - q_1 - \frac{\mu_2}{\sqrt{C}}(1 + q_1) \right], \end{cases}$$

или в безразмерной форме:

$$\left\{ \begin{array}{l} e_1 = \exp(\mu_1), \quad e_2 = \exp(-\mu_1), \\ e_3 = \exp(\mu_2), \quad e_4 = \exp(-\mu_2); \\ D_1^* = \frac{D_1}{e\tau} = \frac{1}{k_1^*} \left[1 - q_2 - \frac{\mu_1}{\sqrt{C}}(1 + q_2) \right], \\ D_2^* = \frac{D_2}{e\tau} = \frac{1}{k_1^*} \left[1 - q_2 + \frac{\mu_1}{\sqrt{C}}(1 + q_2) \right], \\ D_3^* = \frac{D_3}{e\tau} = \frac{1}{k_2^*} \left[1 - q_2 - \frac{\mu_2}{\sqrt{C}}(1 + q_2) \right], \\ D_4^* = \frac{D_4}{e\tau} = \frac{1}{k_2^*} \left[1 - q_2 + \frac{\mu_2}{\sqrt{C}}(1 + q_2) \right]; \\ B_1^* = \frac{B_1}{e\tau} = \frac{e^{\mu_1}}{k_1^*} \left[1 - q_1 + \frac{\mu_1}{\sqrt{C}}(1 + q_1) \right], \\ B_2^* = \frac{B_2}{e\tau} = \frac{e^{-\mu_1}}{k_1^*} \left[1 - q_1 - \frac{\mu_1}{\sqrt{C}}(1 + q_1) \right], \\ B_3^* = \frac{B_3}{e\tau} = \frac{e^{\mu_2}}{k_2^*} \left[1 - q_1 + \frac{\mu_2}{\sqrt{C}}(1 + q_1) \right], \\ B_4^* = \frac{B_4}{e\tau} = \frac{e^{-\mu_2}}{k_2^*} \left[1 - q_1 - \frac{\mu_2}{\sqrt{C}}(1 + q_1) \right], \end{array} \right. \quad (30)$$

$$\text{где } \frac{\mu_1}{\sqrt{C}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{25i\Psi^2\Delta}{32\chi^3}} \right)^{1/2}, \quad \frac{\mu_2}{\sqrt{C}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times, \left(1 - \sqrt{1 + \frac{25i\Psi^2\Delta}{32\chi^3}} \right)^{1/2}.$$

Проведем решение системы (29) стандартными методами. Для этого представим ее как

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\left(1 - \frac{B_2}{B_1} \right) \frac{B_3 D_1 - B_1 D_3}{B_1 D_2 - B_2 D_1} + 1 - \frac{B_3}{B_1} \right] C_3 + \\ + \left[\left(1 - \frac{B_2}{B_1} \right) \frac{B_4 D_1 - B_1 D_4}{B_1 D_2 - B_2 D_1} + 1 - \frac{B_4}{B_1} \right] C_4 = E_0, \\ \left[\frac{B_3 D_1 - B_1 D_3}{B_1 D_2 - B_2 D_1} + \frac{e_3 B_1 - e_1 B_3}{e_2 B_1 - e_1 B_2} \right] C_3 + \\ + \left[\frac{B_4 D_1 - B_1 D_4}{B_1 D_2 - B_2 D_1} + \frac{e_4 B_1 - e_1 B_4}{e_2 B_1 - e_1 B_2} \right] C_4 = \frac{E_0}{e_2 - e_1} \frac{B_2}{B_1}, \\ C_2 = \frac{B_3 D_1 - B_1 D_3}{B_1 D_2 - B_2 D_1} C_3 + \frac{B_4 D_1 - B_1 D_4}{B_1 D_2 - B_2 D_1} C_4, \\ C_1 = -\frac{B_2}{B_1} C_2 - \frac{B_3}{B_1} C_3 - \frac{B_4}{B_1} C_4. \end{array} \right.$$

С учетом новых обозначений система примет вид

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1 C_3 + A_2 C_4 = E_0, \\ A_3 C_3 + A_4 C_4 = E_0, \\ C_2 = \frac{B_3 D_1 - B_1 D_3}{B_1 D_2 - B_2 D_1} C_3 + \frac{B_4 D_1 - B_1 D_4}{B_1 D_2 - B_2 D_1} C_4, \\ C_1 = -\frac{B_2}{B_1} C_2 - \frac{B_3}{B_1} C_3 - \frac{B_4}{B_1} C_4, \end{array} \right. \quad (31)$$

где обозначенные коэффициенты

$$\begin{cases} A_1 = \left(1 - \frac{B_2}{B_1}\right) \frac{B_3 D_1 - B_1 D_3}{B_1 D_2 - B_2 D_1} + 1 - \frac{B_3}{B_1}, \\ A_2 = \left(1 - \frac{B_2}{B_1}\right) \frac{B_4 D_1 - B_1 D_4}{B_1 D_2 - B_2 D_1} + 1 - \frac{B_4}{B_1}, \\ A_3 = \left(e_2 - \frac{e_1 B_2}{B_1}\right) \left[\frac{B_3 D_1 - B_1 D_3}{B_1 D_2 - B_2 D_1} + \frac{e_3 B_1 - e_1 B_3}{e_2 B_1 - e_1 B_2} \right], \\ A_4 = \left(e_2 - \frac{e_1 B_2}{B_1}\right) \left[\frac{B_4 D_1 - B_1 D_4}{B_1 D_2 - B_2 D_1} + \frac{e_4 B_1 - e_1 B_4}{e_2 B_1 - e_1 B_2} \right]. \end{cases} \quad (32)$$

После решения системы (31) получим следующие выражения для коэффициентов в безразмерной форме:

$$\begin{cases} C_4^* = \frac{C_4}{E_0} = \frac{A_3 - A_1}{A_2 A_3 - A_1 A_4}, \quad C_3^* = \frac{C_3}{E_0} = \frac{A_2 - A_4}{A_2 A_3 - A_1 A_4}, \\ C_2^* = \frac{C_2}{E_0} = \frac{(B_3 D_1 - B_1 D_3)(A_2 - A_4) + (B_4 D_1 - B_1 D_4)(A_3 - A_1)}{(B_1 D_2 - B_2 D_1)(A_2 A_3 - A_1 A_4)}, \\ C_1^* = \frac{C_1}{E_0} = \frac{(B_3 D_1 - B_1 D_3)(A_4 - A_2) + (B_4 D_1 - B_1 D_4)(A_1 - A_3)}{(B_1 D_2 - B_2 D_1)(A_2 A_3 - A_1 A_4)} \frac{B_2}{B_1} - \\ - \left(\frac{A_2 - A_4}{A_2 A_3 - A_1 A_4} \frac{B_3}{B_1} + \frac{A_3 - A_1}{A_2 A_3 - A_1 A_4} \frac{B_4}{B_1} \right). \end{cases} \quad (33)$$

Для данной системы безразмерных коэффициентов выражения (24)–(26) примут вид:

$$E(\xi) = E_0 \left(C_1^* \exp(\mu_1 \xi) + C_2^* \exp(-\mu_1 \xi) + C_3^* \exp(\mu_2 \xi) + C_4^* \exp(-\mu_2 \xi) \right), \quad (34)$$

$$a_1(\xi) = E_0 e \tau \left(\frac{C_1^*}{k_1^*} \exp(\mu_1 \xi) + \frac{C_2^*}{k_1^*} \exp(-\mu_1 \xi) + \frac{C_3^*}{k_2^*} \exp(\mu_2 \xi) + \frac{C_4^*}{k_2^*} \exp(-\mu_2 \xi) \right), \quad (35)$$

$$a_2(\xi) = -\frac{E_0 e \tau}{\sqrt{C}} \left(\frac{\mu_1 C_1^*}{k_1^*} e^{\mu_1 \xi} - \frac{\mu_1 C_2^*}{k_1^*} e^{-\mu_1 \xi} + \frac{\mu_2 C_3^*}{k_2^*} e^{\mu_2 \xi} - \frac{\mu_2 C_4^*}{k_2^*} e^{-\mu_2 \xi} \right), \quad (36)$$

где коэффициент $C = \frac{16^2}{5^2} \chi^2$ (см. (16)).

Таким образом, система безразмерных коэффициентов (33) с учетом сделанных обозначений (23), (30) и (32), полностью определяет выражения (34)–(36), а значит, полностью определяет отклонение $f_1(x, \nu)$ функции распределения от

равновесной в случае зеркально-диффузного отражения электронов на верхней и нижней границе слоя с учетом скин-эффекта.

4. РАСЧЕТ НАПРЯЖЕННОСТИ И ТОКА

Плотность тока внутри слоя определяется соотношением (14), с учетом (35) формула примет вид:

$$j_z = \frac{ne^2\tau E_0 e^{-i\omega t}}{m} \left(\frac{C_1^*}{k_1^*} \exp(\mu_1 \xi) + \frac{C_2^*}{k_1^*} \exp(-\mu_1 \xi) + \frac{C_3^*}{k_2^*} \exp(\mu_2 \xi) + \frac{C_4^*}{k_2^*} \exp(-\mu_2 \xi) \right).$$

Выражение для амплитуды плотности тока в слое можно записать следующим образом:

$$j_z = j_{0z} \left(\frac{C_1^*}{k_1^*} \exp(\mu_1 \xi) + \frac{C_2^*}{k_1^*} \exp(-\mu_1 \xi) + \frac{C_3^*}{k_2^*} \exp(\mu_2 \xi) + \frac{C_4^*}{k_2^*} \exp(-\mu_2 \xi) \right), \quad (37)$$

здесь учтено, что $j_{0z} = \sigma_0 E_0$, $\sigma_0 = ne^2\tau/m$ – объемная статическая удельная проводимость металла.

Для удобства численных расчетов введем безразмерную величину амплитуды плотности тока

$$J^*(\Delta, \Omega, \xi, q_1, q_2, \Psi) = \frac{C_1^*}{k_1^*} \exp(\mu_1 \xi) + \frac{C_2^*}{k_1^*} \exp(-\mu_1 \xi) + \frac{C_3^*}{k_2^*} \exp(\mu_2 \xi) + \frac{C_4^*}{k_2^*} \exp(-\mu_2 \xi). \quad (38)$$

Проинтегрировав выражение (37), определяем полный ток, текущий через поперечное сечение тонкого металлического слоя:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^b j_z dS = \int_0^b j_z L dx = Lb \int_0^1 j_z d\xi = \\ &= j_{0z} Lb \int_0^1 \left(\frac{C_1^*}{k_1^*} \exp(\mu_1 \xi) + \frac{C_2^*}{k_1^*} \exp(-\mu_1 \xi) + \frac{C_3^*}{k_2^*} \exp(\mu_2 \xi) + \frac{C_4^*}{k_2^*} \exp(-\mu_2 \xi) \right) d\xi = j_{0z} Lb \left(\frac{C_1^*}{\mu_1 k_1^*} \times \right. \\ &\times \exp(\mu_1 \xi) - \frac{C_2^*}{\mu_1 k_1^*} \exp(-\mu_1 \xi) + \frac{C_3^*}{\mu_2 k_2^*} \exp(\mu_2 \xi) - \left. \frac{C_4^*}{\mu_2 k_2^*} \exp(-\mu_2 \xi) \right) \Big|_0^1 = I_{0z} \left(\frac{C_1^*}{\mu_1 k_1^*} (e^{\mu_1} - 1) - \right. \\ &\left. - \frac{C_2^*}{\mu_1 k_1^*} (e^{-\mu_1} - 1) + \frac{C_3^*}{\mu_2 k_2^*} (e^{\mu_2} - 1) - \frac{C_4^*}{\mu_2 k_2^*} (e^{-\mu_2} - 1) \right), \quad (39) \end{aligned}$$

где $I_{0z} = j_{0z} Lb$.

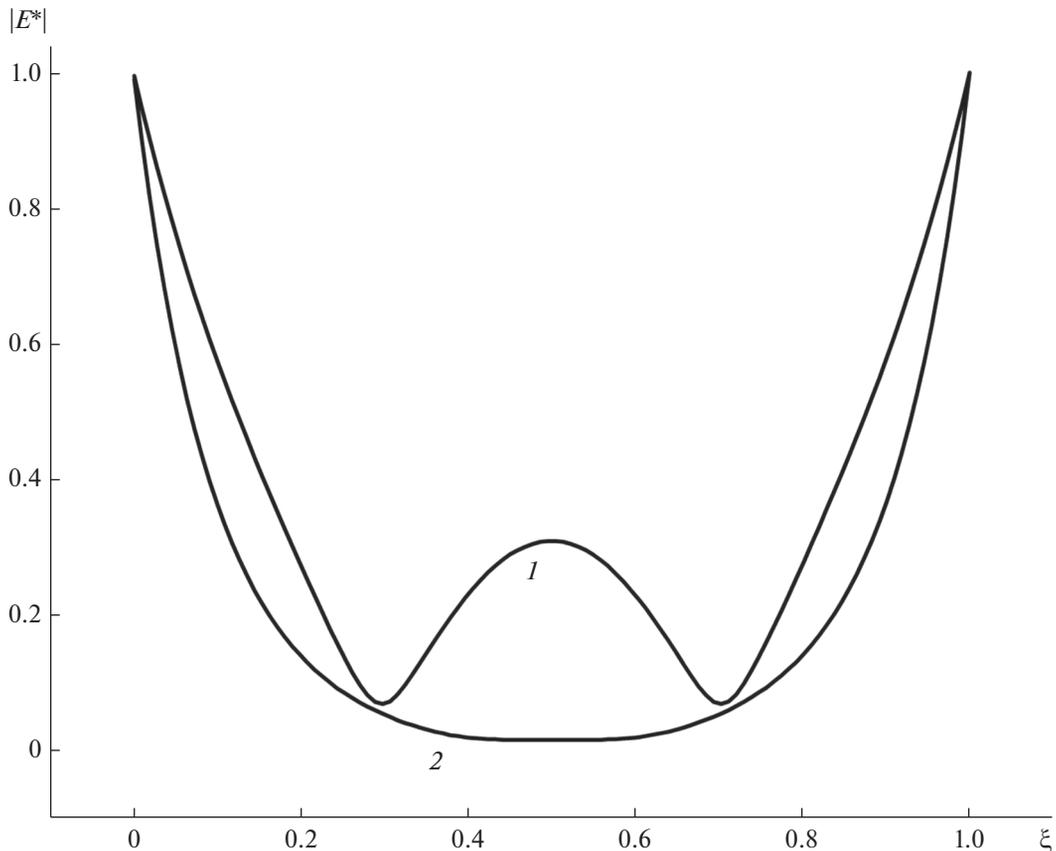


Рис. 1. Зависимость модуля амплитуды безразмерной напряженности электрического поля от безразмерной координаты внутри слоя ξ . 1 – $\psi = 10$, $\Delta = 1$, $\Omega = 1$, $q_1 = q_2 = 0$, 2 – $\psi = 10$, $\Delta = 10$, $\Omega = 1$, $q_1 = q_2 = 1$.

Также введем безразмерную величину полного тока и безразмерную величину напряженности:

$$I^*(\Delta, \Omega, q_1, q_2, \psi) = \frac{C_1^*}{\mu_1 k_1^*} (e^{\mu_1} - 1) - \frac{C_2^*}{\mu_1 k_1^*} (e^{-\mu_1} - 1) + \frac{C_3^*}{\mu_2 k_2^*} (e^{\mu_2} - 1) - \frac{C_4^*}{\mu_2 k_2^*} (e^{-\mu_2} - 1), \quad (40)$$

$$E^*(\Delta, \Omega, \xi, q_1, q_2, \psi) = C_1^* e^{\mu_1 \xi} + C_2^* e^{-\mu_1 \xi} + C_3^* e^{\mu_2 \xi} + C_4^* e^{-\mu_2 \xi}. \quad (41)$$

В случае отсутствия скин-эффекта ($\psi = 0$) из (37) с помощью предельного перехода имеем

$$j_z = \frac{j_{0z} \Delta}{\chi} \left(1 + U_1^* \exp\left(\frac{16\chi}{5} \xi\right) + U_2^* \exp\left(-\frac{16\chi}{5} \xi\right) \right), \quad (42)$$

где

$$U_1^* = \frac{(q_1 - 1) + q_1 (q_2 - 1) \exp\left(-\frac{16\chi}{5}\right)}{2 \exp\left(\frac{16\chi}{5}\right) - 2q_1 q_2 \exp\left(-\frac{16\chi}{5}\right)},$$

$$U_2^* = \frac{q_2 (q_1 - 1) + (q_2 - 1) \exp\left(\frac{16\chi}{5}\right)}{2 \exp\left(\frac{16\chi}{5}\right) - 2q_1 q_2 \exp\left(-\frac{16\chi}{5}\right)}.$$

Заметим, что результат (42), полученный после применения формулы (37) в случае отсутствия скин-эффекта, когда “скин-параметр” $\psi = 0$, совпадает с результатами работы [8] в случае отсутствия поправки к закону Видемана-Франца.

При неограниченном увеличении толщины слоя ($\Delta \gg 1$) применение формул (34) и (37) позволяет

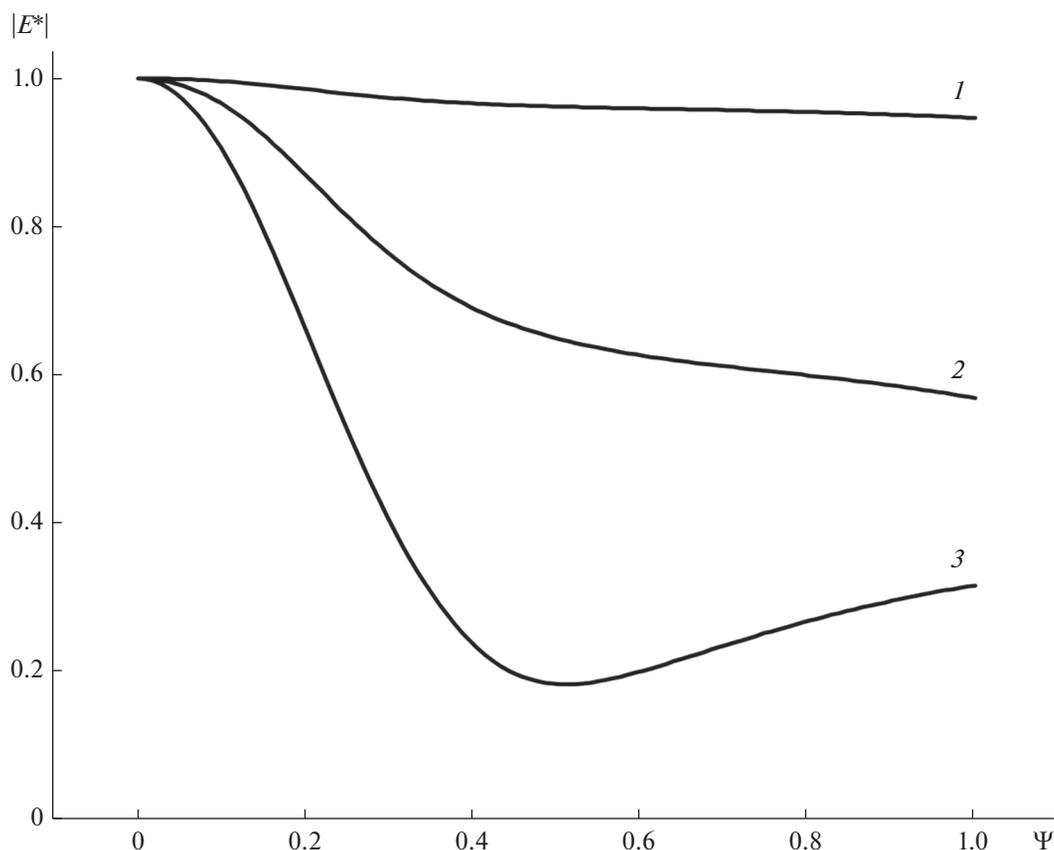


Рис. 2. Зависимость модуля амплитуды безразмерной напряженности электрического поля от безразмерного “скин-параметра” ψ . 1 – $\xi = 1, \Delta = 1, \Omega = 1, q_1 = q_2 = 0.1$, 2 – $\xi = 0.9, \Delta = 1, \Omega = 1, q_1 = q_2 = 0.1$, 3 – $\xi = 0.5, \Delta = 1, \Omega = 1, q_1 = q_2 = 0.1$.

получить результаты соответствующие классическому скин-эффекту в макроскопическом слое.

5. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

На рис. 1 представлена зависимость модуля амплитуды безразмерной напряженности электрического поля $|E^*(\xi)|$ от безразмерной координаты внутри слоя ξ . Обе кривые построены для случая сильного скин-эффекта ($\psi = 10$). Отличие состоит в том, что кривая 1 соответствует слою, у которого толщина b равна длине свободного пробега электронов Λ ($\Delta = 1$), а кривая 2 соответствует макроскопическому слою ($\Delta \gg 1$). Как видно из рисунка это обстоятельство заметно сказывается на величине модуля амплитуды безразмерной напряженности электрического поля $|E^*(\xi)|$. Практически во всем объеме слоя ход кривой 1 носит некоторый осциллирующий характер, что связано с прохождением величины $|E^*(\xi)|$ через квазирезонансы – области, где вклад от различных траекторий электронов с одинаковыми фазами складывается, а с разными – уничтожается. Анализ хода кривой 2 напротив показывает, что в случае сильного скин-эффекта электрическое поле отсутствует практически во всем объеме макроско-

пического слоя, за исключением небольшого поверхностного слоя (назовем его слоем Кнудсена), глубина которого будет порядка длины свободного пробега электронов Λ . По мере роста размера слоя (увеличения Δ) осцилляции на кривой 1 будут сглаживаться. Это произойдет за счет увеличения объемного рассеяния электронов и преобладания его над поверхностным. При больших значениях безразмерной обратной длины свободного пробега электронов Δ ($\Delta \gg 1$) кривые 1 и 2 будут практически совпадать.

С помощью рис. 2, на котором представлена зависимость модуля амплитуды безразмерной напряженности электрического поля $|E^*(\psi)|$ от безразмерного “скин-параметра” ψ , можно выявить особенности поведения электрического поля, когда проявляется его экранировка. Кривые на рисунке построены при различных значениях безразмерной координаты внутри слоя ξ . Из анализа хода кривых следует, что наличие скин-эффекта приводит к заметному изменению электрического поля в середине слоя по указанным выше причинам (см. описание рис. 1).

На рис. 3 приведены графики зависимости модуля амплитуды безразмерной плотности тока

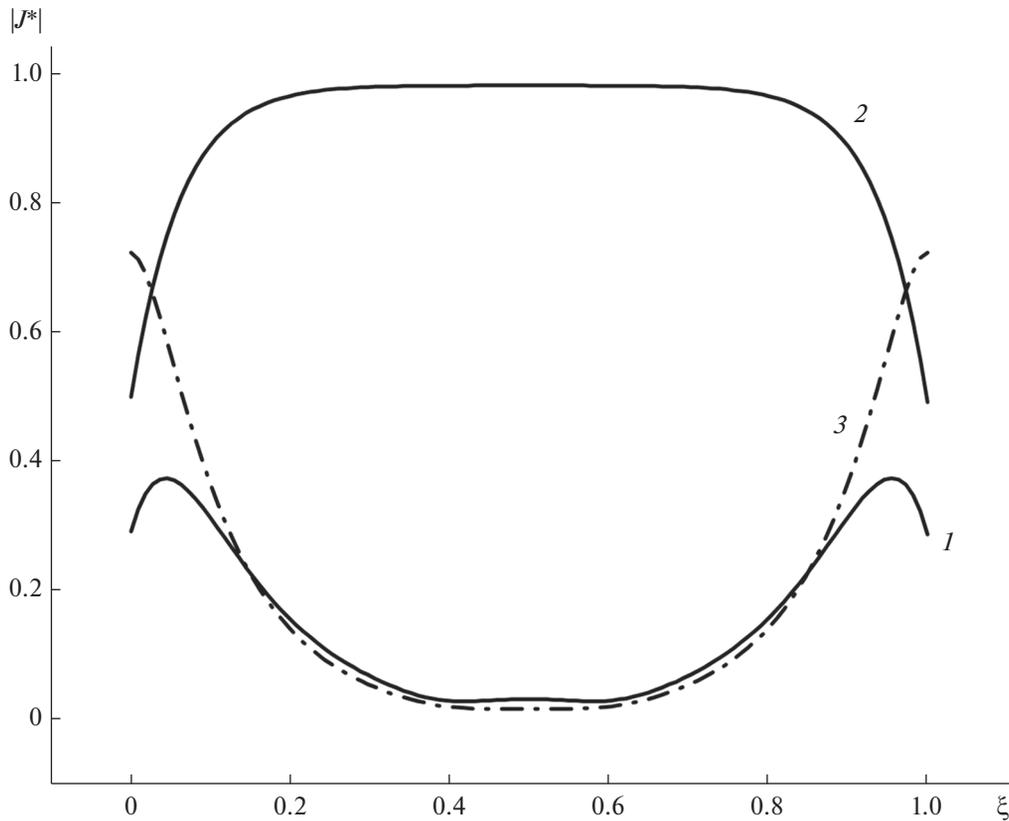


Рис. 3. Зависимость модуля амплитуды безразмерной плотности тока от безразмерной координаты внутри слоя ξ . 1 – $\psi = 10, \Delta = 5, \Omega = 1, q_1 = q_2 = 0$, 2 – $\psi = 0, \Delta = 5, \Omega = 1, q_1 = q_2 = 0$, 3 – $\psi = 10, \Delta = 10, \Omega = 1, q_1 = q_2 = 1$.

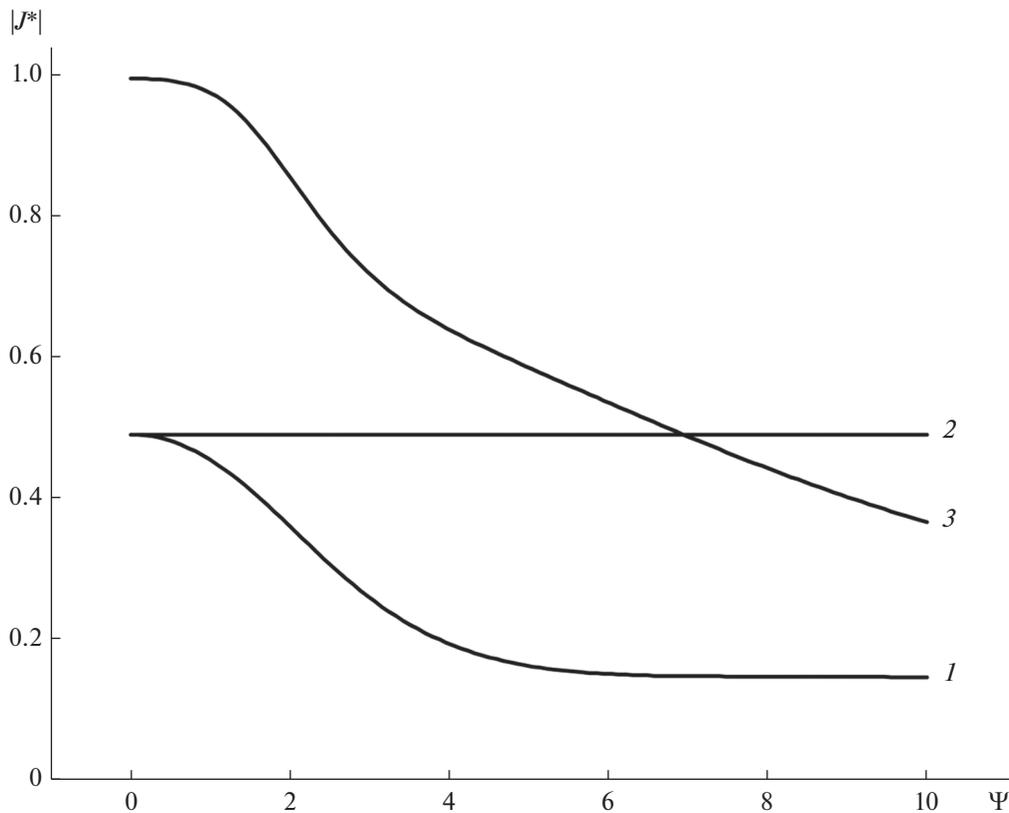


Рис. 4. Зависимость модуля амплитуды безразмерной плотности тока от безразмерного “скин-параметра” ψ . 1 – $\xi = 0.1, \Delta = 1, \Omega = 1, q_1 = q_2 = 0$, 2 – $\xi = 0.1, \Delta = 1, \Omega = 1, q_1 = q_2 = 0$, 3 – $\xi = 0.1, \Delta = 10, \Omega = 1, q_1 = q_2 = 1$.

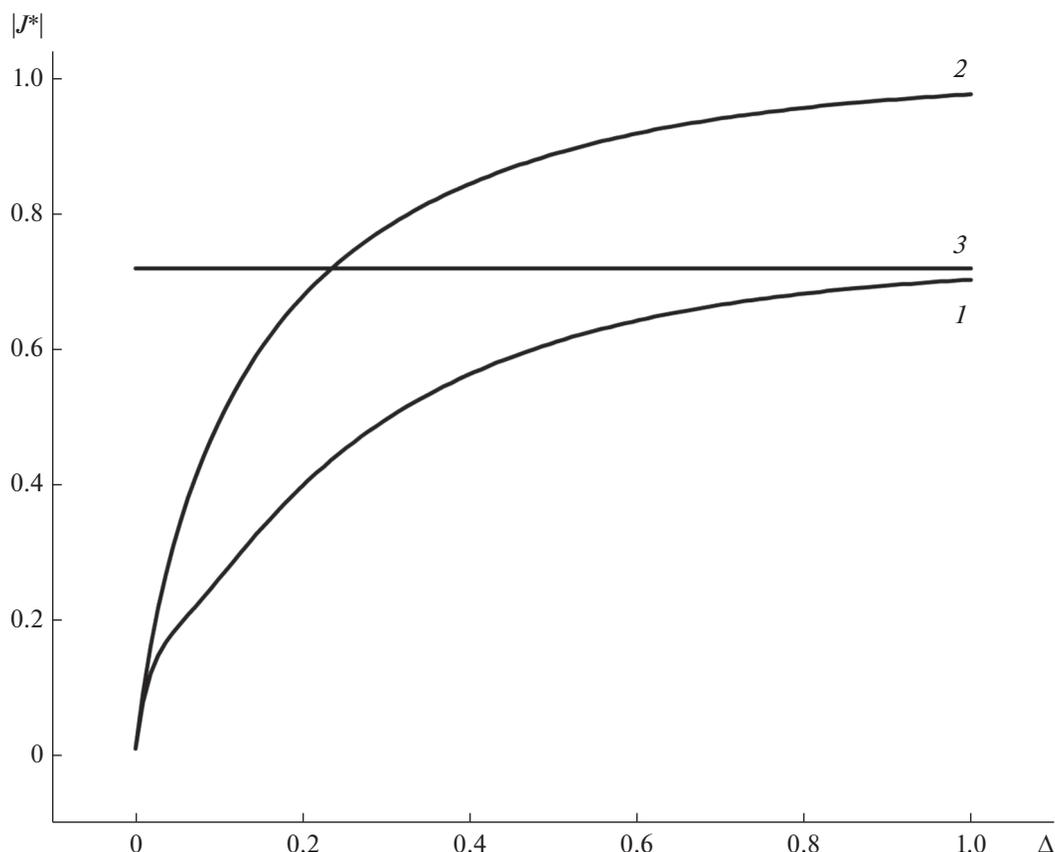


Рис. 5. Зависимость модуля амплитуды безразмерной плотности тока от безразмерной обратной величины длины свободного пробега электронов Δ . 1 – $\psi = 3$, $\xi = 0.1$, $\Omega = 1$, $q_1 = q_2 = 0$, 2 – $\psi = 0$, $\xi = 0.1$, $\Omega = 1$, $q_1 = q_2 = 0$, 3 – $\psi = 3$, $\xi = 0.1$, $\Omega = 1$, $q_1 = q_2 = 1$.

$|J^*(\xi)|$ от безразмерной координаты внутри слоя ξ . Кривые 1 и 3 построены для случая сильного скин-эффекта ($\psi = 10$). Кривая 2 построена без учета скин-эффекта ($\psi = 0$). Наиболее интересно поведение хода этих кривых в слое Кнудсена вблизи поверхностей слоя. Анализ хода кривых 1 и 2 (результаты 1 и 2 получены с помощью кинетического подхода) показывает, что в приповерхностном слое имеет место некоторое увеличение плотности тока за счет поверхностного рассеяния электронов. Причем следует отметить наличие на кривой 1 максимума плотности тока. Анализ хода кривой 3, которая соответствует классическому скин-эффекту, показывает монотонное убывание безразмерной плотности тока $|J^*(\xi)|$ в слое Кнудсена.

На рис. 4 отображена зависимость модуля амплитуды безразмерной плотности тока $|J^*(\psi)|$ внутри слоя от безразмерного “скин-параметра” ψ . При малых значениях “скин-параметра” ψ ($\psi \ll 1$) графики 1 и 2, полученные с помощью кинетического подхода, совпадают, т.к. в этом случае скин-эффект практически не проявляется. По мере роста “скин-параметра” ψ кривая 1 асимптотически приближается к кривой 3, соответствующей классическому скин-эффекту в макроскопическом слое, когда $\Delta \gg 1$.

На рис. 5 показана зависимость модуля амплитуды безразмерной плотности тока $|J^*(\Delta)|$ внутри слоя от безразмерной обратной длины свободного пробега электронов Δ . При малых значениях толщины слоя ($\Delta \ll 1$) кривые 1 и 2, полученные с помощью кинетического подхода, выходят из нуля. Плотность тока в этом случае крайне мала, т.к. ток в основном обусловлен поверхностным рассеянием электронов на границе слоя, а объемное рассеяние электронов практически отсутствует. Если толщина слоя достаточно большая ($\Delta \gg 1$), то имеет место классический скин-эффект. При этом кривая 1 асимптотически приближается к кривой 3, построенной для макроскопического слоя.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ландау Л.Д., Лифшиц И.М. Электродинамика сплошных сред. М.: Физматлит, 2016. 656 с.
2. Моисеев И.О., Юшканов А.А., Яламов Ю.И. Влияние скин-эффекта на поглощение электромагнитного излучения металлической частицей // ЖТФ. 2004. Т. 74. Вып. 1. С. 87–92.

3. *Завитаев Э.В., Русаков О.В., Юшканов А.А.* Скин-эффект в тонкой цилиндрической проволоке из металла // ФТТ. 2012. Т. 54. Вып. 6. С. 1041–1047.
4. *Савенко О.В.* Расчет высокочастотной электропроводности и постоянной холла для тонкой металлической пленки // Вестник МГОУ. Серия: Физика-Математика. 2016. № 4. С. 43–55.
5. *Кузнецова И.А., Романов Д.Н., Савенко О.В., Юшканов А.А.* Расчет высокочастотной электропроводности тонкого полупроводникового слоя в случае различных коэффициентов зеркальности его поверхностей // Микроэлектроника. 2017. Т. 46. № 4. С. 275–283.
6. *Кузнецова И.А., Савенко О.В., Юшканов А.А.* Влияние граничных условий на электрические и гальваноманнитные свойства тонкой металлической пленки // Поверхность. Рентген-, синхротрон. и нейтрон. исслед. 2017. № 11. С. 52–60.
7. *Березкина С.В., Кузнецова И.А., Юшканов А.А.* Поведение электронной плазмы в тонкой металлической пластине в переменном электрическом поле // ЖТФ. 2006. Т. 76. Вып. 5. С. 1–7.
8. *Завитаев Э.В., Русаков О.В., Чухлеб Е.П.* Электрическая проводимость тонкого металлического слоя с учетом отклонения от закона Видемана–Франца // Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования, 2022. № 8. С. 36–42.
9. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика, т. 10. Физическая кинетика. М.: Физматлит, 2007. 536 с.
10. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Статистическая физика. Часть 1. М.: Физматлит, 2010. 616 с.