

ТОМОГРАФИИ ДЕТЕКТОРОВ С УЧЕТОМ МЕРТВОГО ВРЕМЕНИ

© 2023 г. Ю. И. Богданов^{a, *}, К. Г. Катамадзе^a, Н. А. Борщевская^{a, b},
Г. В. Авосопянц^{a, b}, Н. А. Богданова^a, С. П. Кулик^b, В. Ф. Лукичев^a

^aФизико-технологический институт им. К.А. Валиева Российской академии наук,
Нахимовский просп., 36, корп. 1, Москва, 117218 Россия

^bЦентр квантовых технологий МГУ им. М.В. Ломоносова,
Ленинские горы, 1, стр. 35, Москва, 119991 Россия

*E-mail: bogdanov_yurii@inbox.ru

Поступила в редакцию 06.12.2022 г.

После доработки 20.12.2022 г.

Принята к публикации 22.12.2022 г.

Методами численного моделирования с учетом эффекта мертвого времени разработаны алгоритмы расчета отклика детектора для потоков фотонов, имеющих различные распределения по числу фотонов, в том числе пуассоновское, фоковское и тепловое. На основе полученных результатов разработан метод томографии детекторов, а также алгоритм идентификации соответствующих элементов положительной операторно-значной меры (POVM). Экспериментальные исследования с использованием когерентных состояний показали близкое соответствие между результатами расчетов и экспериментальными данными.

Ключевые слова: детекторы фотонов; мертвое время детектора; когерентные состояния, фоковские состояния, тепловые состояния

DOI: 10.31857/S0544126923700369, **EDN:** FEIKNA

1. ВВЕДЕНИЕ

Детекторы фотонов, которые могут различать число фотонов, широко используются во многих областях, где требуется обнаружение сверхслабого пучка света, включая квантовую оптику [1], метрологию [2] и формирование изображений [3]. Обычно используются фотоумножители (ФЭУ) [4], лавинные фотодиоды (ЛФД) [5], сверхпроводящие нанополосковые фотонные детекторы (СНПФД) [6] и др.

Существует два принципиально различных подхода к характеристике детектора: первый подход заключается в тщательном изучении влияния всех существенных эффектов на процесс детектирования, возникающих из-за технологических особенностей различных компонентов детектора и их взаимодействия. Такой подход сводится к разработке подробной модели процесса детектирования. Однако рассматриваемый подход может легко стать непрактичным для сложных детекторных систем. Второй подход — это квантовая томография детектора, целью которой является реконструкция операторов измерений на основе данных, полученных от самого детектора [7, 8].

Квантовая томография детектора как стандартный метод описания неизвестного процесса измерения имеет основополагающее значение для та-

ких задач, как томография квантового состояния [9–12], идентификация квантового гамильтониана, томография квантовых процессов [13, 14] и квантовый контроль [15]. Квантовая томография описывает детектор положительной операторно-значной мерой (Positive Operator-Valued Measure-POVM), полностью характеризующей устройство. POVM можно реконструировать, анализируя результаты процесса детектирования, полученные для томографически полного набора входных состояний.

Когда операторы, описывающие детектор, называются диагональными в фоковском базисе, они являются фазово-нечувствительными (в противном случае фазово-чувствительными) детекторами и могут быть прямо определены с помощью статистического восстановления соответствующих аналитических функций [16] или выпуклой оптимизации [8, 17, 18]. POVM-элементы для фазово-чувствительных детекторов, как правило, нельзя привести к диагональному виду, поэтому их реконструкция является более сложной. Существующие методы включают оценку максимального правдоподобия [19], линейную регрессию [20], выпукло-квадратичную оптимизацию [21] и аналитическое двухэтапное решение [22]. Если полная характеристика детектора не является основным интересом, существуют другие альтернативы квантовой

томографии детектора, такие как самотестирование [23] и самокалибровка [24].

Целью квантовой томографии детекторов является реконструкция функции $P_0(n, j)$, задающей вероятность зарегистрировать в многоканальной системе детекторов j щелчков (кликов) при условии попадания в нее n фотонов. Такая функция могла бы быть измерена непосредственно, если бы были легко доступны источники фотонных состояний для различных n в широком диапазоне значений. Такие источники, однако, все еще трудно доступны, поэтому для томографии детекторов приходится использовать лазерные когерентные состояния, характеризующиеся пуассоновской статистикой.

Пусть $P_{Poiss}(\lambda, n)$ – вероятность иметь состояние с n фотонами для когерентного состояния с амплитудой α , характеризующегося средним числом фотонов, равным $\lambda = |\alpha|^2$. Именно такие состояния подаются в эксперименте на вход многоканального детектора. На выходе же детектора приближенно измеряется функция $P_{exp}(\lambda, j)$, характеризующая вероятность регистрации в системе j щелчков (кликов) при условии облучения когерентным состоянием с параметром $\lambda = |\alpha|^2$.

Введенные функции связаны между собой следующим соотношением:

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_{Poiss}(\lambda, n) P_0(n, j) = P_{exp}(\lambda, j), \quad (1)$$

где $P_{Poiss}(\lambda, n) = \frac{\lambda^n}{n!} \exp(-\lambda)$ – распределение Пуассона.

Выражение (1) задает обратную задачу, связанную с нахождением неизвестной функции $P_0(n, j)$ по приближенно измеренной в эксперименте функции $P_{exp}(\lambda, j)$. Хорошо известно, что в общем случае такие задачи являются некорректно поставленными и требуют регуляризации [25]. В простейшем идеальном случае $P_0(n, j)$ представляет собой биномиальное распределение, определяющее вероятность получить j успехов в серии из n независимых испытаний при условии, что вероятность успеха определяется эффективностью детектора η . В реальных задачах, однако, биномиальное распределение малоприспособно по двум основным причинам. Во-первых, временное окно ограничено некоторой конечной длительностью T и, таким образом, может быть зарегистрировано конечное (обычно небольшое) число фотонов. Во-вторых, обычно используемый лавинный детектор в силу своих конструктивных особенностей обладает некоторым конечным ненулевым “мертвым временем” τ . При регистрации фотона возникает электронная лавина, которая “ослеп-

ляет” детектор на время τ в течение которого детектор не способен регистрировать другие возможные фотоны.

2. СТАТИСТИКА ФОТООТСЧЕТОВ С УЧЕТОМ МЕРТВОГО ВРЕМЕНИ. ЗАДАННОЕ ЧИСЛО N ФОТОНОВ НА ВХОДЕ

Чтобы явно выделить эффекты “мертвого” времени, предположим вначале, что квантовая эффективность детектора η равна 100%, т.е. $\eta = 1$. Полное время экспозиции примем за единицу: $T = 1$. В дальнейшем результаты будут обобщены на случай произвольных η и T .

Пусть k – число зарегистрированных фотонов, а τ – “мертвое” время детектора.

Для простоты в аналитических расчетах мы рассматриваем асимптотическое приближение, когда число фотонов велико (формально $N \rightarrow \infty$), мертвое время мало (формально $\tau \rightarrow 0$), а их произведение стремится к конечному числу ($N\tau \rightarrow n_0 = \text{const}$). В численном моделировании указанные величины могут быть произвольными.

В рассматриваемой задаче $k\tau$ – суммарное “мертвое” время, а $1 - k\tau$ – суммарное “живое” время. Понятно, что $1 - k\tau$ характеризует долю зарегистрированных фотонов, а $k\tau$ – долю потерянных фотонов.

Если N – заданное (фиксированное) число фотонов на входе, то $N(1 - k\tau)$ есть ожидаемое число зарегистрированных фотонов. Наблюдаемое число отсчетов k отличается от ожидаемого числа отсчетов $N(1 - k\tau)$ на величину флуктуации, которая определяется дисперсией $N(1 - k\tau)k\tau$. В асимптотическом гауссовом приближении соответствующая флуктуация есть $\xi\sqrt{N(1 - k\tau)k\tau}$, где $\xi \sim N(0, 1)$ – гауссова случайная величина с нулевым средним и единичной дисперсией. Таким образом:

$$k = N(1 - k\tau) + \xi\sqrt{N(1 - k\tau)k\tau}. \quad (2)$$

Пусть $M(k) = k_0$ – ожидаемое число отсчетов. Тогда, усредняя представленное равенство и учитывая, что $M(\xi) = 0$, получим: $k_0 = N(1 - k_0\tau)$, откуда получим:

$$k_0 = \frac{N}{1 + N\tau}. \quad (3)$$

Формула (2) определяет деградацию числа отсчетов из-за мертвого времени. Из (3) имеем непосредственно

$$N = \frac{k_0}{1 - k_0\tau}. \quad (4)$$

Формула (4) может служить для оценки неизвестного числа N фотонов на входе по измеренному среднему числу k_0 зарегистрированных фотонов.

Учтем теперь влияние флуктуации в формуле (2). Переносим первое слагаемое из правой части в левую, получим: $k(1 + N\tau) - N = \xi\sqrt{N(1 - k\tau)k\tau}$. Пусть $k = k_0 + \xi\sigma$, где σ — искомое стандартное отклонение (корень из дисперсии). Тогда $\xi\sigma(1 + N\tau) = \xi\sqrt{N(1 - k\tau)k\tau}$. Будем использовать в правой части приближение $k \approx k_0$. Тогда получим:

$$\sigma^2 = \frac{N^2\tau}{(1 + N\tau)^4}. \quad (5)$$

Пусть $n_0 = N\tau$ — среднее число фотонов, попадающих во временной интервал, равный мертвому времени τ . Перепишем полученную формулу для дисперсии зарегистрированного числа отсчетов в виде:

$$\sigma^2 = \frac{Nn_0}{(1 + n_0)^4}. \quad (6)$$

Мы видим, что дисперсия асимптотически неограниченно растет линейно, если $N \rightarrow \infty$, а $n_0 = \text{const}$.

Таким образом, в случае фоковских состояний с заданным числом фотонов N , формула (3) задает искомое выражение для среднего числа отсчетов, (5) и (6) — искомые формулы для дисперсии числа отсчетов.

3. СТАТИСТИКА ФОТООТСЧЕТОВ С УЧЕТОМ МЕРТВОГО ВРЕМЕНИ. ПУАССОНОВСКИЙ ПОТОК ФОТОНОВ НА ВХОДЕ

Пусть имеется пуассоновский поток на входе и λ — среднее число фотонов, поступающих за время $T = 1$. Из-за мертвого времени вероятность выживания фотона есть $p = (1 - k\tau)$. При этом выживает только поток, равный $\lambda(1 - k\tau)$, но само распределение остается пуассоновским. Пуассоновская флуктуация есть $\xi\sqrt{\lambda(1 - k\tau)}$ и вместо (2) получаем:

$$k = \lambda(1 - k\tau) + \xi\sqrt{\lambda(1 - k\tau)}. \quad (7)$$

Вместо (3) для среднего числа регистрируемых фотонов k_0 получим:

$$k_0 = \frac{\lambda}{1 + \lambda\tau}. \quad (8)$$

Учет флуктуации приводит к равенству $\xi\sigma(1 + \lambda\tau) = \xi\sqrt{\lambda(1 - k\tau)}$, откуда имеем выражение для дисперсии:

$$\sigma^2 = \frac{\lambda}{(1 + \lambda\tau)^3}. \quad (9)$$

Таким образом, в случае пуассоновского потока фотонов на входе, формула (8) — искомое выражение для среднего числа отсчетов, (9) — искомая формула для дисперсии числа отсчетов.

Рассматривая конечную эффективность детектора η и вводя размерное временное окно T , перепишем формулу (8) в виде:

$$k_0 = \frac{\eta\lambda}{\left(1 + \eta\lambda\frac{\tau}{T}\right)}. \quad (10)$$

Здесь λ — пуассоновский параметр, задающий среднее число фотонов на входе, поступивших за время T ; $\eta\lambda$ — среднее число входящих за время T фотонов, скорректированное с учетом конечной эффективности детектора η ; k_0 — среднее число зарегистрированных за время T фотонов.

Из формулы (10) находим:

$$\eta\lambda = \frac{k_0}{\left(1 - k_0\frac{\tau}{T}\right)}. \quad (11)$$

Полученная формула может служить для оценки входного потока фотонов λ по среднему числу зарегистрированных фотонов k_0 .

4. РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТА И ТЕОРЕТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

В эксперименте измерялось число отсчетов детектора за фиксированное время накопления $T = 128$ нс при засветке сильно ослабленным лазерным излучением (рис. 1). В качестве источника использовался непрерывный одномодовый волоконный лазер с брэгговской решеткой на длине волны 810 нм. Детектирование осуществлялось однофотонным модулем счета фотонов на основе кремниевого лавинного фотодиода Laser Components Count-50C. По данным производителя, частота темновых отсчетов равна 36 Гц, квантовая эффективность на рабочей длине волны 66%, мертвое время 42 нс.

Было проведено 6 серий измерений статистики фотоотсчетов, в каждой из которых интенсивность источника излучения была фиксирована. От серии к серии параметр $R\tau$ менялась в диапазоне от 0.2 до 2.31, где R — среднее число регистрируемых фотоотсчетов за 1 с, τ — мертвое время детектора. В терминах формул (10) и (11) указанный параметр есть $R\tau = \frac{k_0\tau}{T}$.

В каждой серии измерений фиксировалась интенсивность источника и измерялась статистика числа фотоотсчетов во временных бинах длины T

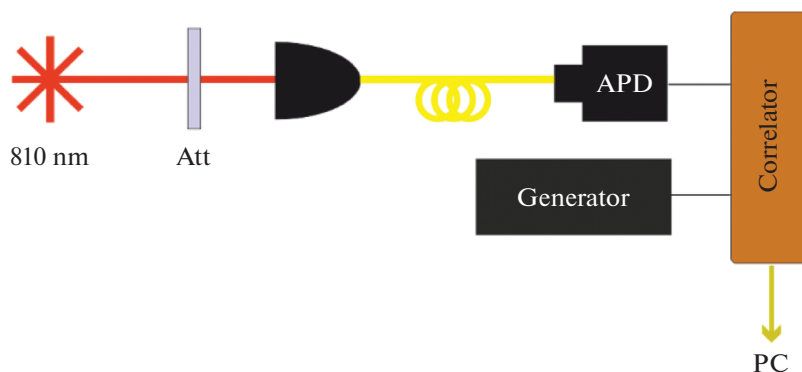


Рис. 1. Схема установки по измерению статистики фотоотсчетов. Att — поглощающий фильтр, APD — исследуемый детектор, Correlator — аналого-цифровой преобразователь (АЦП), PC — персональный компьютер.

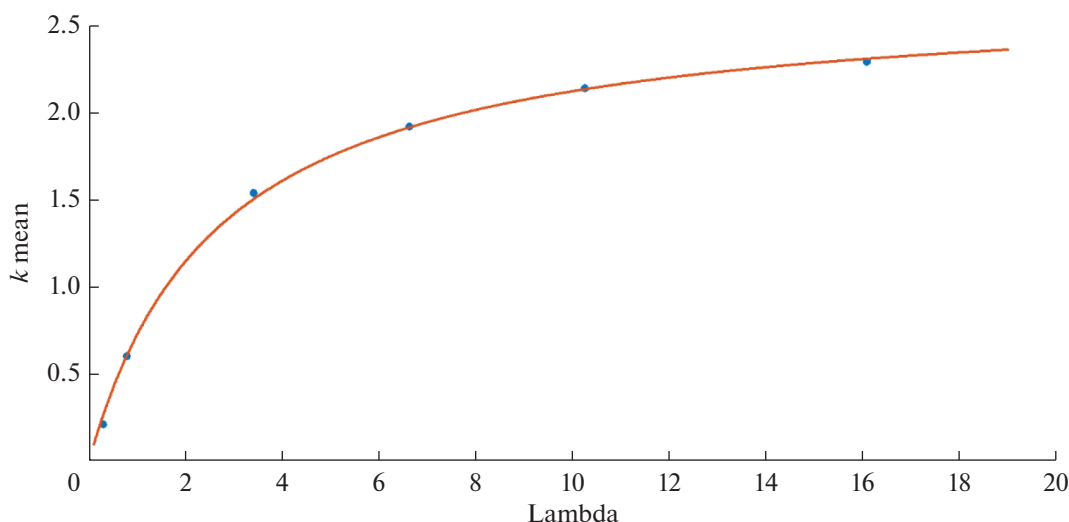


Рис. 2. Зависимость среднего числа регистрируемых фотонов от среднего числа фотонов в когерентной моде на входе.

в зависимости от задержки после прихода триггерного импульса с генератора. Длительность задержки изменялась от нуля до $T_{\max} = 240T$, частота следования импульсов генератора составляла $1/(4T_{\max})$. Поскольку $2\tau < T < 3\tau$, измеренные числа фотоотсчетов за каждый временной бин T могли принимать только значения от 0 до 3 с разной вероятностью в зависимости от интенсивности входного излучения.

Интенсивность входного излучения регулировалась поглощающими нейтральными фильтрами Att фирмы Thorlabs серии NENIR, оптимизированными под инфракрасный диапазон длин волн 1000–2600 нм. В связи с тем, что длина волны используемого лазера не входит в указанный диапазон, ослабление не соответствовало заявленному производителем. Коэффициент пропускания фильтров был измерен дополнительно.

На рис. 2 представлено сравнение теоретической кривой (10) с результатами выполненных нами

измерений. Метод наименьших квадратов дал для теоретической кривой значение $\tau = 47.447$ нс. Модельная кривая и экспериментальные результаты хорошо согласуются между собой. Коэффициент детерминации R^2 составил 0.9986. Заметим, что полученное значение мертвого времени оказалось несколько выше величины, указанной в спецификации производителя (42 нс).

Теоретическое рассмотрение процесса детектирования фотонов осуществлялось методами численного моделирования. Рассматривались потоки фотонов, имеющие различные распределения по числу фотонов, в том числе пуассоновское, фокковское и тепловое. Случайное число фотонов в рассматриваемых распределениях разыгрывалось методом Монте-Карло. Моменты прилета фотонов представлялись случайными величинами, равномерно распределенными во времени. При регистрации в момент времени t некоторого фотона, счетчик фотонов выключался на время τ

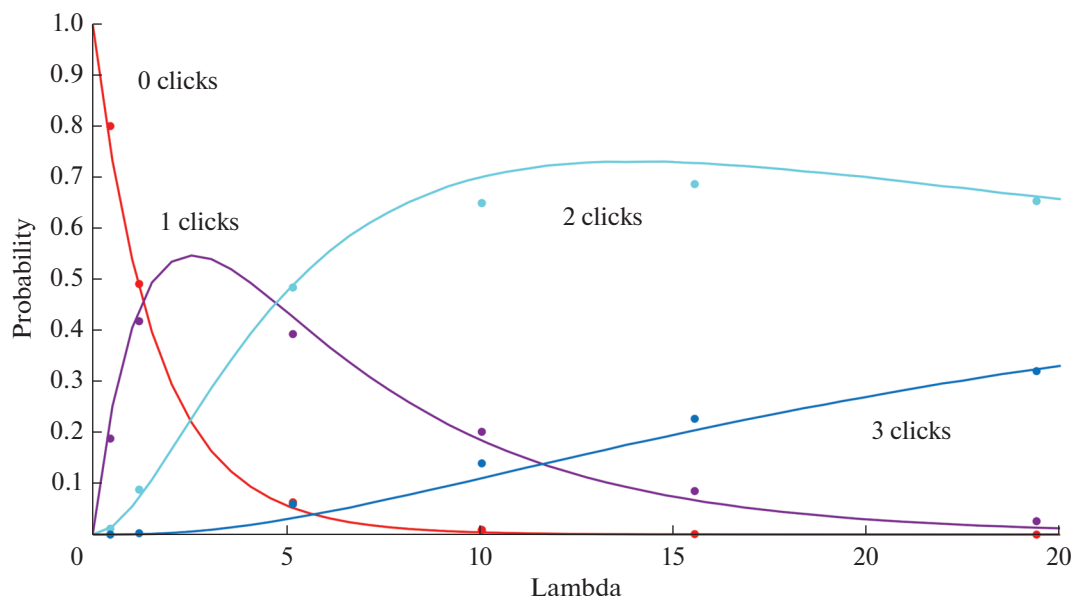


Рис. 3. Распределение числа отсчетов в приложении к томографии детекторов. На входе когерентные состояния с различным средним числом фотонов. Сплошные кривые — теория, точки — эксперимент.

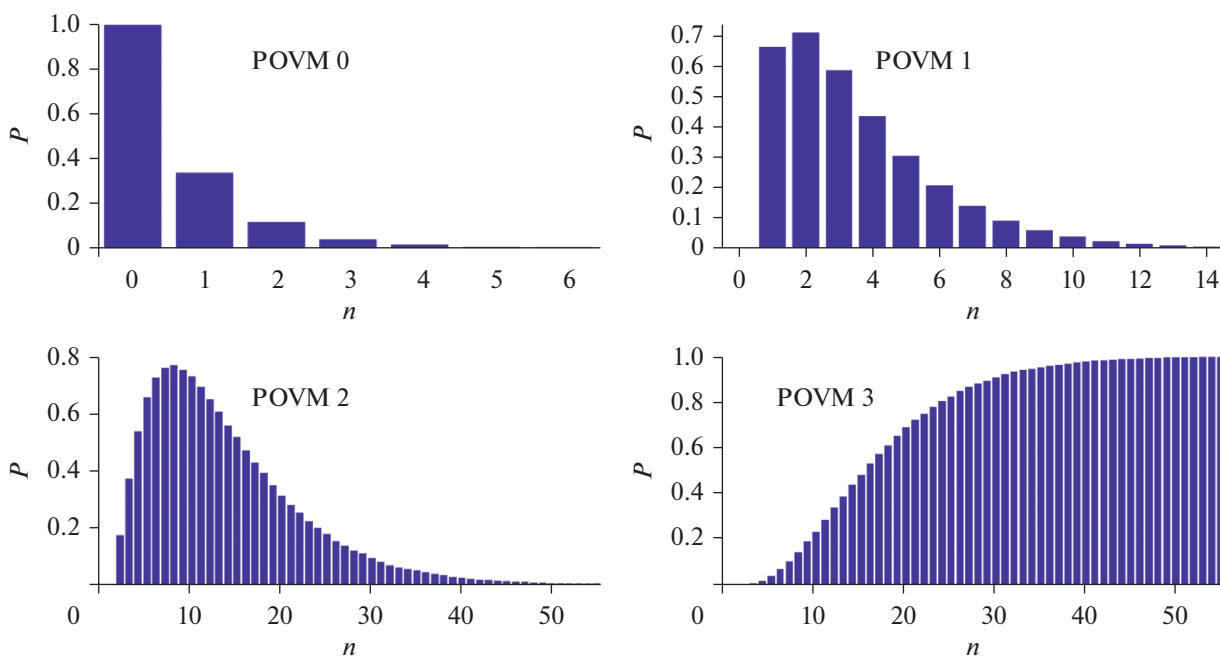


Рис. 4. POVM-элементы детектора.

вплоть до момента $t + \tau$. Таким образом, все фотоны, попадающие в “мертвый” интервал времени (если таковые были), игнорировались счетчиком регистрации фотонов. Близкое соответствие результатов численного моделирования и реальных данных говорит об адекватности разработанных алгоритмов.

На рис. 3 представлено распределение числа отсчетов детектора в зависимости от среднего

числа фотонов λ в пуассоновском распределении на входе.

Мы видим хорошее согласие между теоретическими кривыми, полученными в численных расчетах, и результатами выполненных нами экспериментов (точки). Степень согласия (Fidelity) между экспериментальными и модельными распределениями составила 0.995–0.998.

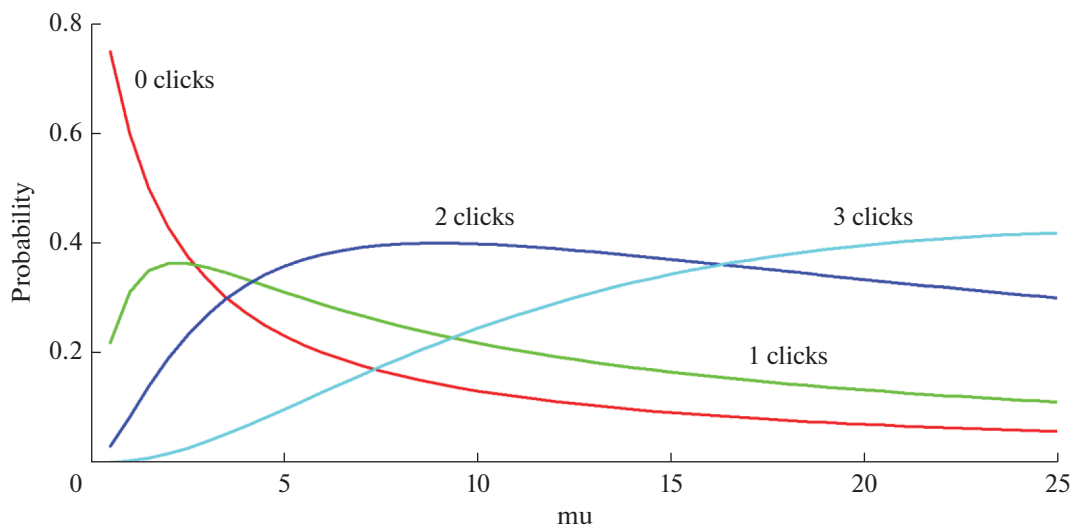


Рис. 5. Распределение числа отсчетов для тепловых состояний с различным средним числом фотонов на входе.

Для расчета POVM-элементов необходимо перейти от пуассоновских распределений по числу фотонов на входе к фоковским распределениям с заданным числом фотонов. Результаты численных расчетов представлены на рис. 4.

В рассматриваемой системе определены 4 POVM-элемента, отвечающих регистрации соответственно j фотонов, где $j = 0, 1, 2, 3$. При этом j -ый POVM-элемент определяется соответственно вероятностями $P(j|n)$ зарегистрировать j фотонов при условии, что на входе имеется ровно n фотонов.

Полученные POVM-элементы задают функцию $P_0(n, j)$ и позволяют рассчитать отклик рассматриваемого детектора по отношению к любому распределению по числу фотонов на входе. Это можно сделать, если в формуле (1) заменить пуассоновское распределение $P_{Poiss}(\lambda, n)$ другим интересующим нас распределением. Пример такого расчета в приложении к тепловому распределению представлен на рис. 5. Здесь на горизонтальной оси представлено среднее число фотонов μ в тепловом состоянии.

Заметим, что тепловые состояния могут быть использованы вместо когерентных состояний для томографии детекторов. Сама функция $P_0(n, j)$, определяющая POVM-элементы, не зависит от распределения фотонов на входе и является характеристикой только самого детектора.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сформулируем кратко основные результаты выполненного исследования.

Методами численного моделирования с учетом эффекта мертвого времени разработаны ал-

горитмы расчета отклика детектора фотонов. Рассмотрены потоки фотонов, имеющие различные распределения по числу фотонов, в том числе пуассоновское, фоковское и тепловое.

С использованием набора различных когерентных состояний выполнены экспериментальные исследования модуля счета фотонов на основе кремниевого лавинного фотодиода. Сравнение полученных экспериментальных данных с результатами теоретических расчетов показали их хорошее согласие.

Разработан алгоритм расчета элементов положительной операторно-значной меры (POVM). Реконструированы элементы POVM для исследуемого модуля счета фотонов. Полученные POVM-элементы позволяют рассчитать отклик рассматриваемого модуля счета фотонов по отношению к любому распределению по числу фотонов на входе. Продemonстрировано применение полученных POVM-элементов для расчета отклика детектора при подаче на вход тепловых состояний.

Полученные результаты имеют существенное значение для развития квантовых оптических информационных технологий с использованием детекторов, разрешающих число фотонов.

БЛАГОДАРНОСТИ

Работа выполнена в рамках проекта № 22-12-00263 Российского научного фонда. Раздел 2 “Статистика фотоотсчетов с учетом мёртвого времени” выполнен при поддержке Фонда развития теоретической физики и математики “БАЗИС” (грант № 20-1-1-34-1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Hadfield R.H.* Single-photon detectors for optical quantum information applications // *Nat. Photonics*. 2009. V. 3. № 12. P. 696–705.
2. *Shangguan M. et al.* Dual-frequency Doppler lidar for wind detection with a superconducting nanowire single-photon detector // *Opt. Lett.* 2017. V. 42. № 18. P. 3541.
3. *Morimoto K. et al.* Megapixel time-gated SPAD image sensor for 2D and 3D imaging applications // *Optica*. 2020. V. 7. № 4. P. 346.
4. *Yamazaki I. et al.* Microchannel-plate photomultiplier applicability to the time-correlated photon-counting method // *Rev. Sci. Instrum.* 1985. V. 56. № 6. P. 1187–1194.
5. *Cova S., Longoni A., Andreoni A.* Towards picosecond resolution with single-photon avalanche diodes // *Rev. Sci. Instrum.* 1981. V. 52. № 3. P. 408–412.
6. *Goltsman G.N. et al.* Picosecond superconducting single-photon optical detector // *Appl. Phys. Lett.* 2001. V. 79. № 6. P. 705–707.
7. *Luis A., Sánchez-Soto L.L.* Complete Characterization of Arbitrary Quantum Measurement Processes // *Phys. Rev. Lett.* 1999. V. 83. № 18. P. 3573–3576.
8. *Lundeen J.S. et al.* Tomography of quantum detectors // *Nat. Phys.* Nature Publishing Group. 2009. V. 5. № 1. P. 27–30.
9. *Богданов Ю.И.И., Кривицкий Л.А., Кулик С.П.* Статистическое восстановление квантовых состояний оптических трехуровневых систем // *Письма в ЖЭТФ*. 2003. V. 78. № 6. P. 804–809.
10. *Bogdanov Y.I. et al.* Polarization states of four-dimensional systems based on biphotons // *Phys. Rev. A*. 2006. V. 73. № 6. P. 063810.
11. *Богданов Ю.И. и др.* Статистическое восстановление оптических квантовых состояний на основе взаимно дополнительных квадратурных квантовых измерений // *ЖЭТФ*. 2016. Т. 150. № 2. С. 246–253.
12. *Bogdanov Y.I. et al.* Multiphoton subtracted thermal states: Description, preparation, and reconstruction // *Phys. Rev. A*. 2017. V. 96. № 6. P. 063803.
13. *Bogdanov Y.I. et al.* Optical polarization echo: Manifestation and study by methods of quantum tomography of states and processes // *J. Exp. Theor. Phys.* 2014. V. 118. № 6. P. 845–855.
14. *Bogdanov Y.I. et al.* Quantum polarization transformations in anisotropic dispersive media // *New J. Phys.* 2013. V. 15. № 3. P. 035012.
15. *Dong D., Petersen I.R.* Quantum estimation, control and learning: Opportunities and challenges // *Annu. Rev. Control.* 2022. V. 54. P. 243–251.
16. *Renema J.J. et al.* Modified detector tomography technique applied to a superconducting multiphoton nanodetector // *Opt. Express*. 2012. V. 20. № 3. P. 2806.
17. *Feito A. et al.* Measuring measurement: theory and practice // *New J. Phys.* 2009. V. 11. № 9. P. 093038.
18. *Natarajan C.M. et al.* Quantum detector tomography of a time-multiplexed superconducting nanowire single-photon detector at telecom wavelengths // *Opt. Express*. 2013. V. 21. № 1. P. 893.
19. *Fiurášek J.* Maximum-likelihood estimation of quantum measurement // *Phys. Rev. A*. 2001. V. 64. № 2. P. 024102.
20. *Grandi S. et al.* Experimental quantum tomography of a homodyne detector // *New J. Phys.* 2017. V. 19. № 5. P. 053015.
21. *Zhang L. et al.* Recursive quantum detector tomography // *New J. Phys.* 2012. V. 14. № 11. P. 115005.
22. *Wang Y. et al.* Two-Stage Estimation for Quantum Detector Tomography: Error Analysis, Numerical and Experimental Results // *IEEE Trans. Inf. Theory*. 2021. V. 67. № 4. P. 2293–2307.
23. *Yang T.H. et al.* Robust and Versatile Black-Box Certification of Quantum Devices // *Phys. Rev. Lett.* 2014. V. 113. № 4. P. 040401.
24. *Mogilevtsev D., Řeháček J., Hradil Z.* Relative tomography of an unknown quantum state // *Phys. Rev. A*. 2009. V. 79. № 2. P. 020101.
25. *Migdall A. et al.* Single-photon generation and detection. 1st ed. Elsevier, 2013. 593 p.