

УДК 551.465

ДВУХМЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТРЕХМЕРНЫХ ВОЛН

© 2021 г. Д. Чаликов^{1, 2, *}¹Институт океанологии РАН, Москва, Россия²Melbourne University, Victoria, Australia

*e-mail: dmitry-chalikov@yandex.ru

Поступила в редакцию 19.09.2020 г.

После доработки 15.02.2021 г.

Принята к публикации 17.08.2021 г.

Предложен приближенный метод прямого моделирования трехмерных поверхностных волн, основанный на полных уравнениях потенциального движения жидкости со свободной поверхностью в криволинейной нестационарной системе координат. Используется разделение потенциала скорости на нелинейную и линейную компоненты. Двухмерные уравнения модели выводятся на основе точного трехмерного уравнения для нелинейной компоненты потенциала скорости, записанного на поверхности. Уравнение содержит первую и вторую вертикальные производные потенциала на поверхности; таким образом, система уравнений оказывается незамкнутой. Анализ результатов точного трехмерного моделирования позволил установить, что первая и вторая производные связаны между собой линейно. Эта связь дает возможность замкнутой двухмерной (поверхностной) формулировки проблемы трехмерных волн. Первая производная потенциала (т.е. вертикальная скорость на поверхности) рассчитывается из уравнения для потенциала скорости на поверхности с помощью итераций. Связь между производными потенциала не вполне точна, поэтому в целом метод является приближенным. Тем не менее, модель достаточно аккуратно воспроизводит эволюцию волнового поля и его основные статистические характеристики. Наиболее очевидным преимуществом модели является ее высокая эффективность: скорость интегрирования двухмерной модели примерно на два порядка превосходит скорость равноценной трехмерной модели. Модель предназначена для быстрого воспроизведения динамики двухмерного волнового поля на основе информации о волновом спектре.

Ключевые слова: моделирование, ветровые волны, развитие волн, волновой спектр, метод Фурье, вертикальная скорость на поверхности, приток энергии от ветра, диссипация волн, статистика волн

DOI: 10.31857/S0030157421060046

1. ВВЕДЕНИЕ

В последние десятилетия было предложено много подходов в прямом (фазоразрешающем, phaseresolving) моделировании поверхностных волн (см. обзор соответствующих работ в [1]). Большая часть моделей предназначалась для инженерных задач: проектирования прибрежных сооружений, моделирования взаимодействия волн с плавающими или фиксированными объектами, изучения волнового режима в эстуариях. Немногие наиболее развитые модели использовались для изучения физических свойств волн. Наиболее простым и успешным типом моделирования является двухмерное моделирование одномерных волн. Условие периодичности позволяет использовать конформное преобразование координат [6], что сводит двухмерную задачу к одномерной, которая может решаться с высокой скоростью и точностью на основе преобразования Фурье. Несмотря на то что одномерный подход связан с

ограничениями, конформная модель незаменима при исследовании многих локальных процессов, таких как опрокидывание волн, взаимодействие волн с ветром и многих других.

В настоящее время наиболее полная формулировка проблемы основана на трехмерных уравнениях потенциального движения жидкости со свободной поверхностью. Эти уравнения удобно записывать в отслеживающей поверхности системе координат:

$$\xi = x, \quad \vartheta = y, \quad \zeta = z - \eta(\xi, \vartheta, \tau), \quad \tau = t, \quad (1)$$

где $\eta(x, y, t) = \eta(\xi, \vartheta, \tau)$ – периодическая волновая поверхность, задаваемая рядом Фурье

$$\eta(\xi, \vartheta, \tau) = \sum_{-M_\xi < k < M_\xi} \sum_{-M_\vartheta < l < M_\vartheta} h_{k,l}(\tau) \Theta_{k,l}, \quad (2)$$

где k и l – компоненты вектора волнового числа k ; $h_{k,l}(\tau)$ – амплитуды Фурье возвышения $\eta(\xi, \vartheta, \tau)$; M_ξ и M_ϑ – число мод в направлениях ξ

и ϑ соответственно; $\Theta_{k,l}$ – базовые функции разложения Фурье, представленные в виде матрицы:

$$\Theta_{kl} = \begin{cases} \cos(k\xi + l\vartheta) & -M_x \leq k \leq M_x, \quad -M_y < l < 0 \\ \cos(k\xi) & -M_x \leq k \leq 0, \quad l = 0 \\ \sin(k\xi) & 0 \leq k \leq M_y, \quad l = 0 \\ \sin(k\xi + l\vartheta) & -M_x \leq k \leq M_x, \quad 0 < l \leq M_y. \end{cases} \quad (3)$$

Трехмерные потенциальные уравнения в системе координат (1) при $\zeta \leq 0$ имеют вид

$$\eta_\tau = -\eta_\xi \varphi_\xi - \eta_\vartheta \varphi_\vartheta + (1 + \eta_\xi^2 + \eta_\vartheta^2) \varphi_\zeta, \quad (4)$$

$$\varphi_\tau = -\frac{1}{2}(\varphi_\xi^2 + \varphi_\vartheta^2 - (1 + \eta_\xi^2 + \eta_\vartheta^2) \varphi_\zeta^2) - \eta - p, \quad (5)$$

$$\varphi_{\xi\xi} + \varphi_{\vartheta\vartheta} + \varphi_{\zeta\zeta} = Y(\varphi), \quad (6)$$

где Y – оператор:

$$Y() = 2\eta_\xi()_{\xi\xi} + 2\eta_\vartheta()_{\vartheta\vartheta} + (\eta_{\xi\xi} + \eta_{\vartheta\vartheta})()_{\zeta} - (\eta_\xi^2 + \eta_\vartheta^2)()_{\zeta\zeta}. \quad (7)$$

Уравнения (4), (5) относятся к поверхности $\zeta = 0$, т.е. являются двухмерными; уравнение (6) – трехмерное. Переменная p в (5) описывает давление на поверхности $\zeta = 0$.

Уравнения (4)–(6) записаны в безразмерной форме с использованием следующих масштабов: длины L (при этом величина $2\pi L$ равна размерной длине области); времени $L^{1/2}g^{-1/2}$, потенциала скорости $L^{3/2}g^{1/2}$ (g – ускорение свободного падения). Давление p отнесено к единице плотности; масштаб для него равен Lg . Уравнения (4)–(6) автомодельны, т.е. инвариантны к изменениям L .

В статье [5] предложено представить потенциал скорости φ в виде суммы двух компонент: аналитической (линейной) $\bar{\varphi}(\xi, \vartheta, \zeta, \tau)$ и произвольной (нелинейной) $\tilde{\varphi}(\xi, \vartheta, \zeta, \tau)$:

$$\varphi = \bar{\varphi} + \tilde{\varphi}. \quad (8)$$

Компонента $\bar{\varphi}$ удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\bar{\varphi}_{\xi\xi} + \bar{\varphi}_{\vartheta\vartheta} + \bar{\varphi}_{\zeta\zeta} = 0 \quad (9)$$

с известным решением:

$$\bar{\varphi}(\xi, \vartheta, \zeta, \tau) = \sum_{k,l} \bar{\varphi}_{k,l}(\tau) \exp(k\xi) \Theta_{k,l}, \quad (10)$$

где $k = (k^2 + l^2)^{1/2}$, $\bar{\varphi}_{k,l}$ – коэффициенты Фурье потенциала $\bar{\varphi}$ на поверхности при $\zeta = 0$, ось ζ направлена вниз. Решение удовлетворяет граничным условиям:

$$\begin{aligned} \zeta = 0: \quad \bar{\varphi} &= \bar{\varphi}(\zeta = 0), \\ \zeta \rightarrow -\infty: \quad \bar{\varphi}_\zeta &\rightarrow 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Представление (8) не используется для эволюционных уравнений (4) и (5), поскольку было

установлено, что оно не дает заметных преимуществ.

Нелинейная компонента $\tilde{\varphi}$ удовлетворяет уравнению:

$$\tilde{\varphi}_{\xi\xi} + \tilde{\varphi}_{\vartheta\vartheta} + \tilde{\varphi}_{\zeta\zeta} = Y(\varphi). \quad (12)$$

Уравнение (12) решается при граничных условиях:

$$\begin{aligned} \zeta = 0: \quad \tilde{\varphi} &= 0, \\ \zeta \rightarrow -\infty: \quad \tilde{\varphi}_\zeta &\rightarrow 0. \end{aligned} \quad (13)$$

На поверхности $\zeta = 0$ уравнение (12) принимает вид:

$$\tilde{\varphi}_{\zeta\zeta} = Y(\varphi). \quad (14)$$

Производные компоненты $\bar{\varphi}$ в (7) рассчитываются аналитически (см. ниже).

2. СВЕДЕНИЕ ТРЕХМЕРНОЙ ЗАДАЧИ К ДВУХМЕРНОЙ

Преимуществом трехмерного прямого моделирования является возможность воспроизведения реального движения жидкости с учетом всех нелинейностей, разрешенных в потенциальном приближении. Основным недостатком всех трехмерных моделей является их низкая производительность. Причиной этого является высокая консервативность волн: временные и пространственные масштабы развития волнового поля на порядки превосходят периоды и длины волн. Между тем, именно фазовая скорость волн ограничивает величину шага по времени, причем на каждом шаге приходится решать эллиптическое уравнение для потенциала скорости с применением итераций. Поскольку точные нелинейные начальные условия не могут быть сформулированы, сбалансированное нелинейное решение вырабатывается за достаточно длинный период в течение тысяч шагов по времени. Нестационарная задача с учетом притока и диссипации энергии становится еще более громоздкой. В конечном итоге работа с моделью сводится к непрерывному ожиданию результатов, что сильно затрудняет ее усовершенствование.

Досадно, что трехмерная структура волнового поля рассчитывается по трехмерному уравнению для потенциала только для того, чтобы рассчитать неизвестную характеристику на поверхности – вертикальную скорость $w = \varphi_\zeta$ ($\zeta = 0$). Таким образом, оказывается, что, так же как и в конформной проблеме, эволюция волн полностью определяется поверхностными характеристиками, а трехмерная структура потенциала скорости не используется. Маловероятно, что точные двухмерные (поверхностные) уравнения для трехмерных волн могут быть сформулированы. Тем не менее, возникает соблазн найти приближенный подход, сочетающий возможность использова-

ния полной формы уравнений с отказом от расчета вертикальной структуры движения.

Обратимся к уравнению для нелинейной компоненты потенциала (14). Поскольку $\tilde{\varphi}(0) = 0$ при $\zeta = 0$, уравнение принимает вид:

$$\tilde{w}_\zeta = 2(\eta_\xi w_\xi + 2\eta_\vartheta w_\vartheta) + \Delta\eta w - s w_\zeta. \quad (15)$$

Здесь использованы обозначения $w = \varphi_\zeta$, $w_\xi = \varphi_{\xi\xi}$, $\Delta = (\)_{\xi\xi} + (\)_{\vartheta\vartheta}$, $s = \eta_\xi^2 + \eta_\vartheta^2$. Уравнение (15) является точным. Используя представление $w = \bar{w} + \tilde{w}$, получаем:

$$\tilde{w}_\zeta = 2\eta_\xi(\bar{w}_\xi + \tilde{w}_\xi) + 2\eta_\vartheta(\bar{w}_\vartheta + \tilde{w}_\vartheta) + \Delta\eta(\bar{w} + \tilde{w}) - s(\bar{w}_\zeta + \tilde{w}_\zeta). \quad (16)$$

Принимая во внимание, что $w_\xi = 0$ и $w_\vartheta = 0$, уравнение (15) можно представить в форме

$$(1 + s)\tilde{w}_\zeta = 2(\eta_\xi \tilde{w}_\xi + \eta_\vartheta \tilde{w}_\vartheta) + \Delta\eta \tilde{w} + r, \quad (17)$$

где член r

$$r = 2(\eta_\xi \bar{w}_\xi + \eta_\vartheta \bar{w}_\vartheta) + \Delta\eta \bar{w} - s\bar{w}_\zeta, \quad (18)$$

зависящий только от линейной компоненты, рассчитывается с использованием представления Фурье (10) по формулам:

$$\bar{w}(\xi, \vartheta, \zeta) = \sum_{k,l} k \bar{\varphi}_{k,l} \Theta_{k,l}, \quad (19)$$

$$\bar{w}_\xi(\xi, \vartheta, \zeta) = \sum_{k,l} k^2 \bar{\varphi}_{k,l} \Theta_{k,l}, \quad (20)$$

$$\bar{w}_\xi(\xi, \vartheta, \zeta) = -\sum_{k,l} k \bar{w}_{-k,-l} \Theta_{k,l}, \quad (21)$$

$$\bar{w}_\vartheta(\xi, \vartheta, \zeta) = -\sum_{k,l} l \bar{w}_{-k,-l} \Theta_{k,l}. \quad (22)$$

Здесь $\bar{\varphi}_{k,l}$ – коэффициенты Фурье аналитической компоненты потенциала скорости $\bar{\varphi}$, $\bar{w}_{k,l}$ – коэффициенты Фурье аналитической компоненты вертикальной скорости \bar{w} .

Точное двухмерное уравнение (18) по сравнению с уравнением (12) выглядит обескураживающе простым, но это, скорее, обман зрения, поскольку оно содержит две переменные – первую и вторую производные потенциала по вертикали.

В первичной формулировке проблемы в декартовых координатах трехмерная структура потенциала скорости описывается уравнением Лапласа. Возмущения возникают, поскольку граничные условия задаются на криволинейной поверхности. Поэтому можно ожидать, что вертикальные профили потенциала скорости являются гладкими и они имеют более или менее универсальную структуру. Ситуация упрощается тем, что, в отличие от трехмерного уравнения (12), переменные \tilde{w} и \tilde{w}_ζ определяются асимптотическим поведением потенциала скорости вблизи поверх-

ности. В работах [2, 3], выполненных на основе точной трехмерной модели с высоким вертикальным разрешением, показано, что вертикальные профили $\varphi(\zeta)$ имеют универсальный вид в достаточно широкой окрестности $\zeta = 0$ и очень близки к линейным. Анализ профилей, рассчитанных по полной модели, показывает, что \tilde{w} и \tilde{w}_ζ оказываются всегда одного знака, поэтому профиль потенциала удобно аппроксимировать следующей двухпараметрической формулой:

$$\tilde{\varphi} = \tilde{w}_\zeta \exp\left(\frac{\zeta}{2A}\right), \quad (23)$$

которая определяет зависимость между \tilde{w} и \tilde{w}_ζ

$$\tilde{w} = A\tilde{w}_\zeta, \quad (24)$$

выполняющуюся на поверхности $\zeta = 0$. Коэффициент A может быть функцией горизонтальных координат и зависеть от параметров проблемы. Связь между \tilde{w} и \tilde{w}_ζ можно исследовать с помощью детальной трехмерной модели, в которой рассчитывается вертикальная структура потенциала скорости, включая данные о \tilde{w} и \tilde{w}_ζ . Для этих исследований использовалось большое число трехмерных полей потенциала для широких диапазонов интегральной крутизны s , рассчитываемой по волновому спектру $S(k, l)$ возвышения η

$$s = \left(\iint_{k,l} k^2 S(k, l) dk dl \right)^{1/2}, \quad (0.02 < s < 0.20) \quad (25)$$

и дисперсии возвышения

$$\sigma = \left(\iint_{k,l} S(k, l) dk dl \right)^{1/2}, \quad (0.033 < \sigma < 0.066). \quad (26)$$

Первоначально зависимость $\tilde{w}(\tilde{w}_\zeta)$ исследовалась в Фурье пространстве. Результаты оказались недостаточно детерминированными, поэтому далее основные усилия были направлены на анализ профилей $\tilde{\varphi}_\zeta$ в физическом пространстве. Для получения зависимости $\tilde{w}(\tilde{w}_\zeta)$ использовалась модель, разработанная автором и описанная в статьях [2, 5] и монографии [1]. Использовалось разрешение 1024×512 узлов, число уровней по вертикали равнялось 50. Численная схема сочетает Фурье-метод с расчетом нелинейностей на сгущенной сетке, конечно-разностные аппроксимации второго порядка для производных по вертикали на разнесенной сетке, растянутой по правилу $\Delta\zeta_{j+1} = \chi\Delta\zeta_j$ ($\Delta\zeta$ – вертикальный шаг, $j = 1$ на поверхности). Коэффициент растяжения χ был равен 1.2, что обеспечило высокую точность конечно-разностной аппроксимации производных $\tilde{w} = \tilde{\varphi}_\zeta$ и $\tilde{w}_\zeta = \tilde{\varphi}_{\zeta\zeta}$ при $\zeta = 0$. Уравнение (12)

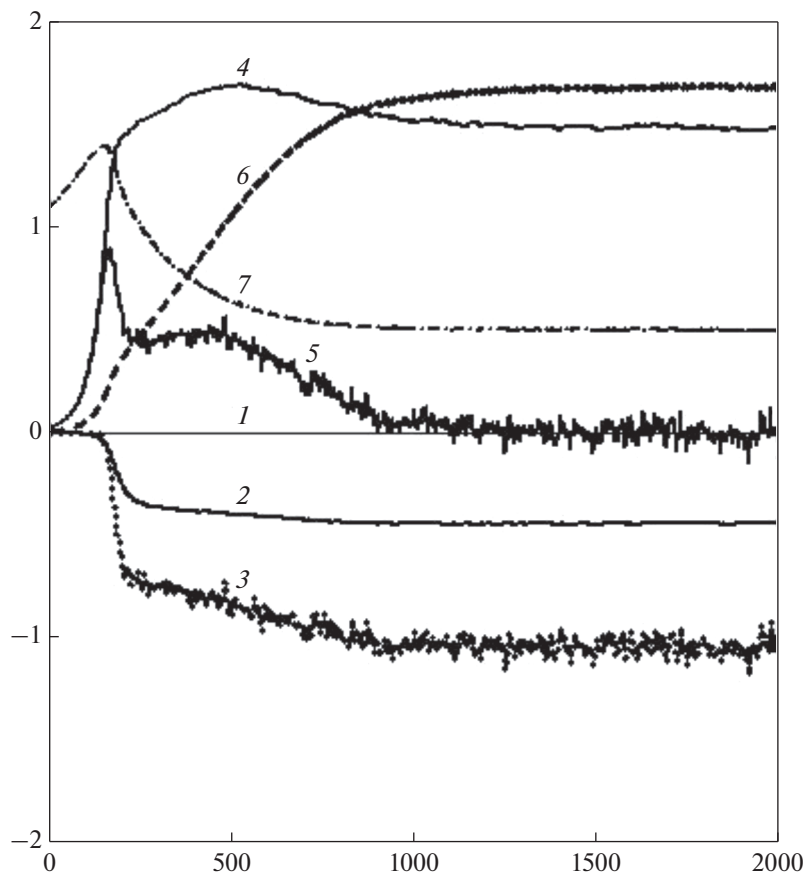


Рис. 1. Эволюция интегральных характеристик решения (ссылки в скобках даны на уравнения в работе [2]: 1 – интегральный эффект нелинейных взаимодействий; 2 – скорость диссипации на высоких волновых числах ((19)–(23)); 3 – скорость диссипации за счет обрушения ((24)–(27)); 4 – скорость притока энергии от ветра ((14)–(18)); 5 – сумма притоков и диссипации; 6 – эволюция потенциальной энергии; 7 – эволюция взвешенной волновым спектром волнового числа \bar{k} (с множителем 0.01).

решается как уравнение Пуассона методом прогонки с итерациями по правой части. Относительная точность в терминах нормы вертикальной скорости на поверхности задается равной 10^{-5} . Для того чтобы результаты отражали ситуации с разными интегральными характеристиками, в модель были включены алгоритмы, описывающие приток энергии к волнам и диссипацию, т.е. волны моделировались в процессе их развития. Алгоритмы физических процессов подробно описаны в цитируемых выше публикациях. Расчеты производились с временным шагом $\Delta\tau = 0.01$ на период $\tau = 2000$. Эволюция интегральных характеристик решения показана на рис. 1.

Безразмерные притоки и стоки энергии (т.е. кривые 1–5) имеют одинаковую нормировку и поэтому их можно сопоставлять. Баланс энергии стремится к нулю (кривая 5), поэтому энергия (кривая 6) становится постоянной. Кривая 7, описывающая эволюцию взвешенного волновым

спектром волнового числа \bar{k} до времени $\tau = 200$, показывает развитие спектра. Далее \bar{k} убывает под влиянием нелинейных взаимодействий от значения $\bar{k} = 130$ до $\bar{k} = 50$ ('downshifting'). Рисунок 1 приведен как качественная характеристика результатов, используемых ниже для замыкания системы уравнений.

Данные, полученные до времени $\tau = 200$, в дальнейшем анализе не использовались, поскольку в течение этого периода происходило нелинейное согласование полей возвышения η и потенциала скорости ϕ . Для анализа записывались двумерные поля вертикальной скорости w и ее производной w_ζ с интервалом $\Delta\tau = 20$. Таким образом, использовалось 91 двумерное поле, каждое размером 1024×512 . Все поля включали 52, 428, 800 пар значений \tilde{w} и \tilde{w}_ζ . Статистическая связь между этими переменными показана на рис. 2. Поскольку объем информации очень велик, данные о средних величинах \tilde{w} , \tilde{w}_ζ и диспер-

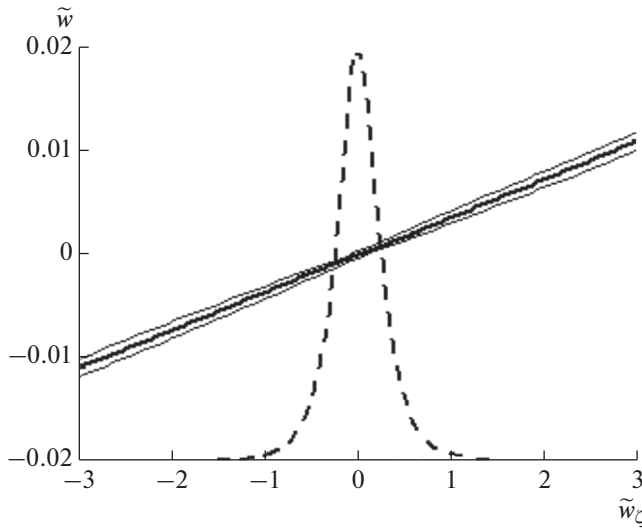


Рис. 2. Зависимость вертикальной скорости на поверхности \tilde{w} от ее вертикальной производной \tilde{w}_z . Жирная линия показывает осредненные для каждого интервала $\Delta\tilde{w}_z = 0.06$ значения и совпадающие с ними значения, полученные аппроксимацией (27). Тонкие линии соответствуют дисперсии аппроксимации. Пунктирная кривая качественно описывает распределение вероятности $P(\tilde{w}_z)$, нормированное его максимальным значением. Для этой кривой значение $\tilde{w} = -0.02$ соответствует значению $P = 0$.

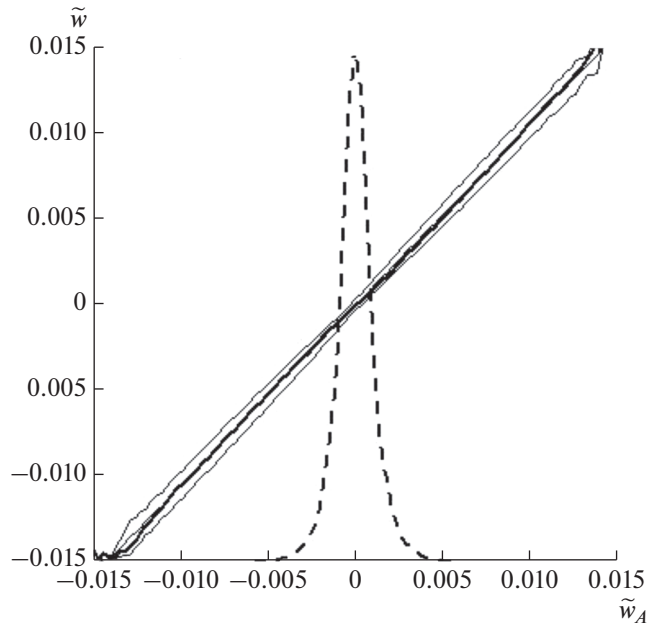


Рис. 3. Сравнение нелинейной компоненты вертикальной скорости на поверхности \tilde{w} , рассчитанной по полной модели, с такой же вертикальной скоростью w_A , рассчитанной по двумерному уравнению (17). Жирная линия показывает осредненные для каждого интервала $\Delta\tilde{w}_z = 0.06$ значения \tilde{w} как функции w_A , рассчитанные с учетом (27). Тонкие линии соответствуют дисперсии аппроксимации. Пунктирная кривая описывает распределение вероятности $P(\tilde{w}_A)$, нормированное его максимальным значением. Для этой кривой значение $\tilde{w} = -0.015$ соответствует значению $P = 0$.

сии w накапливались в 100 интервалах величиной $\Delta w_z = 0.06$, в промежутке $-3 < w_z < 3$. Вне этого промежутка данные практически отсутствовали. Далее связь между осредненными по интервалам значениям \tilde{w} , \tilde{w}_z аппроксимировалась линейной зависимостью

$$\tilde{w} = A_0 + A\tilde{w}_z, \tag{27}$$

с коэффициентами $A_0 = 4 \times 10^{-6}$, $A = 0.00363$. Среднеквадратичная ошибка аппроксимации (27) меньше 7×10^{-4} .

Распределение вероятности $P(\tilde{w}_z)$ (пунктирная кривая) показывает, что почти все значения w_z приходятся на интервал $-1 < \tilde{w}_z < 1$, что соответствует значениям $-0.003 < \tilde{w} < 0.003$. В этой области точность аппроксимации (27) максимальна. Рисунок 2 показывает, что вертикальная скорость тесно связана с ее производной, хотя имеется небольшая ошибка. Природа расхождений не очень ясна, причиной ошибок может быть нелокальность этой связи. Нельзя также исключить влияния ошибок аппроксимации, главным образом, аппроксимации второй производной от потенциала на поверхности, вычисляемой направленными разностями.

Ответ на вопрос о применимости соотношения (27) может дать прямое сравнение нелинейной компоненты вертикальной скорости \tilde{w} , рассчитанной по уравнению Пуассона (6), и той же величины \tilde{w}_A , рассчитанной по поверхностному условию (17). Это сопоставление дано на рис. 3. Жирная линия показывает осредненные для каждого интервала $\Delta\tilde{w}_z = 0.0003$ значения \tilde{w} как функции w_A , рассчитанные по уравнению (17). Связь между w_A и w определяется тонкой линией, которая везде полностью совпадает с жирной линией. Тонкие окаймляющие линии соответствуют дисперсии аппроксимации. Средняя дисперсия ошибки равна 6×10^{-4} . Распределение вероятности для \tilde{w}_A (пунктирная кривая) показывает, что величины нелинейной компоненты вертикальной скорости \tilde{w}_A (и \tilde{w}) приходятся, в основном, на интервал $-0.005 < \tilde{w}_A < 0.005$.

Как видно из рисунка, значения \tilde{w} и \tilde{w}_A хорошо согласуются, однако имеются небольшие систематические и случайные расхождения.

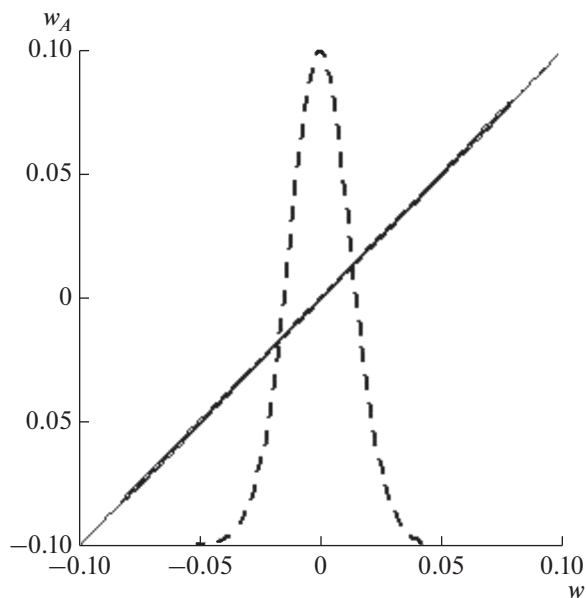


Рис. 4. Сравнение полной компоненты вертикальной скорости на поверхности w , рассчитанной по полной модели с такой же вертикальной скоростью w_A , рассчитанной по двумерному уравнению (17). Жирная линия показывает осредненные для каждого интервала $\Delta w = 0.001$ значения w_A , рассчитанные с учетом (17). Пунктирная кривая описывает распределение вероятности $P(\tilde{w})$, нормированное его максимальным значением. Для этой кривой значение $\tilde{w} = -0.10$ соответствует значению $P = 0$.

Тем не менее, эволюционные уравнения (4) и (5) содержат только полную вертикальную скорость (в пределах $(-0.1, 0.1)$), а нелинейная компонента \tilde{w} обеспечивает сравнительно малую поправку к линейной \bar{w} (в пределах $(-0.01, 0.01)$). Сравнение полной компоненты w , рассчитанной по уравнению Пуассона (12) и (8) и $w_A = \bar{w} + \tilde{w}$ — по двумерному уравнению (17), дано на рис. 4. Жирная линия показывает осредненные для каждого интервала $\Delta w = 0.001$ значения w_A , рассчитанные с учетом (27). Связь между \tilde{w} и \tilde{w}_A определяется линейным уравнением

$$w_A = 9 \times 10^{-5} + 0.995w. \quad (28)$$

Эта зависимость изображена тонкой линией, которая везде совпадает с жирной линией и окаймляющими линиями, описывающими дисперсию аппроксимации. Средняя дисперсия ошибки меньше, чем 6×10^{-4} , поэтому ее нельзя отразить на графике. Распределение вероятности для w (пунктирная кривая) показывает, что величины полной компоненты вертикальной скорости w (и w_A) приходятся, в основном, на интервал $-0.05 < w < 0.05$. Таким образом, нелинейная по-

правка оказывается в среднем на один порядок меньше полной вертикальной скорости. Можно надеяться, что ошибки воспроизведения нелинейной компоненты вертикальной скорости по упрощенной схеме оказывают не очень большое влияние на решение.

3. СРАВНЕНИЕ ДВУХМЕРНЫХ И ТРЕХМЕРНЫХ МОДЕЛЕЙ

Наиболее убедительная проверка применимости изложенного выше упрощения должна основываться на сравнении результатов численного интегрирования по полной модели, описываемой уравнениями (4)–(6), и упрощенной модели, описываемой уравнениями:

$$\eta_\tau = -\eta_\xi \phi_\xi - \eta_\vartheta \phi_\vartheta + (1+s)w, \quad (29)$$

$$\phi_\tau = -\frac{1}{2}(\phi_\xi^2 + \phi_\vartheta^2 - (1+s)w^2) - \eta - p, \quad (30)$$

$$\tilde{w} = \frac{A(2(\eta_\xi w_\xi + \eta_\vartheta w_\vartheta) + \Delta\eta w - s\bar{w}_\xi)}{1+s}, \quad (31)$$

где $\Delta = \left(\begin{smallmatrix} \eta_\xi \\ \eta_\vartheta \end{smallmatrix} \right)_{\xi\xi} + \left(\begin{smallmatrix} \eta_\xi \\ \eta_\vartheta \end{smallmatrix} \right)_{\vartheta\vartheta}$, $s = \eta_\xi^2 + \eta_\vartheta^2$. Заметим, что уравнения (29) и (30) содержат полные переменные η , ϕ , w , а правая часть уравнения (31) включает как полную вертикальную скорость $w = \bar{w} + \tilde{w}$, так и линейную компоненту \tilde{w} . Уравнение (31) определяет \tilde{w} неявно, оно записано в форме, удобной для итераций. Поскольку в качестве начальных условий для итераций использовались значения с предыдущего шага по времени, то число итераций, необходимых для достижения точности 10^{-5} (по норме \tilde{w}), редко превышало 2. Для сравнения моделей были проведены новые расчеты по обеим моделям с аналогичными формулировками физических процессов, но с уменьшенным разрешением (128×64 моды) на период $\tau = 1000$. Начальные условия для моделей были полностью идентичны. Начальные поля возвышения и поверхностного потенциала рассчитывались в линейном приближении с использованием аппроксимации JONSWAP при значении обратного возраста волны $U/c_p = 1$ (U — скорость ветра, c_p — фазовая скорость волны пика с волновым числом $k_p = 30$). При таких параметрах приток энергии от ветра компенсировался слабой диссипацией на высоких волновых числах, так что полная энергия в течение всего периода интегрирования оставалась постоянной.

Для сравнения результатов интегрирования рассчитывались коэффициент корреляции $C(n)$ и среднеквадратичная разность $D(n)$ (n — число шагов по времени) между полем возвышения η^f ,

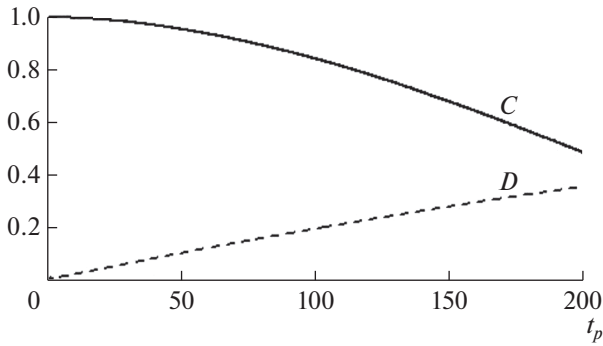


Рис. 5. Эволюция коэффициента корреляции C и среднеквадратичной разности D (уравнение (32)); t_p – время в периодах волны в пике спектра.

реляции $C(n)$ рассчитывались с интервалом времени, равным $100\Delta t$ для 10000 пар полей η^f и η^c . Эволюция $D(n)$ и $C(n)$ приведена на рис. 5.

Сходство между полями возвышения уменьшается со временем, однако, учитывая, что поверхности имеют сложную многомодовую квазислучайную природу, предполагалось, что нарушение сходства будет происходить гораздо быстрее. Ввиду того, что вертикальная скорость вычисляется неточно, ускоренную модель можно рассматривать как точную модель с наложенными возмущениями. Если амплитуды возмущений невелики, можно ожидать, что модель воспроизводит статистический режим волнового поля удовлетворительно.

генерируемым полной моделью и упрощенной моделью η^a

$$D(n) = (\sigma_f^2 + \sigma_c^2)^{-1} \times \left(N_\xi^{-1} N_\vartheta^{-1} \sum_{i,j} (\eta_{i,j}^f - \eta_{i,j}^a)^2 \right)^{1/2}. \quad (32)$$

Здесь N_ξ и N_ϑ – число узлов в направлениях x и y ; σ_f и σ_c – дисперсии полей η^f и η^c . При полной некоррелированности процессов величина D обращается в 1. Правая часть (32) и коэффициент кор-

В следующей серии расчетов в качестве начальных условий были приняты те же поля возвышения и поверхностного потенциала, но наборы случайных фаз для полной и упрощенной моделей были различны, т.е. исходные поля были идентичны только в статистическом смысле.

На рис. 6 представлены одномерные спектры, полученные трансформацией $S(k, l)$ двухмерного спектра в полярный спектр $S'(\theta, r)$ (θ – направление; $r = |k|$ – модуль волнового числа) и осреднением по углу θ . В левой панели здесь и далее представлены результаты, полученные по полной трехмерной модели, в правой – по двухмерной

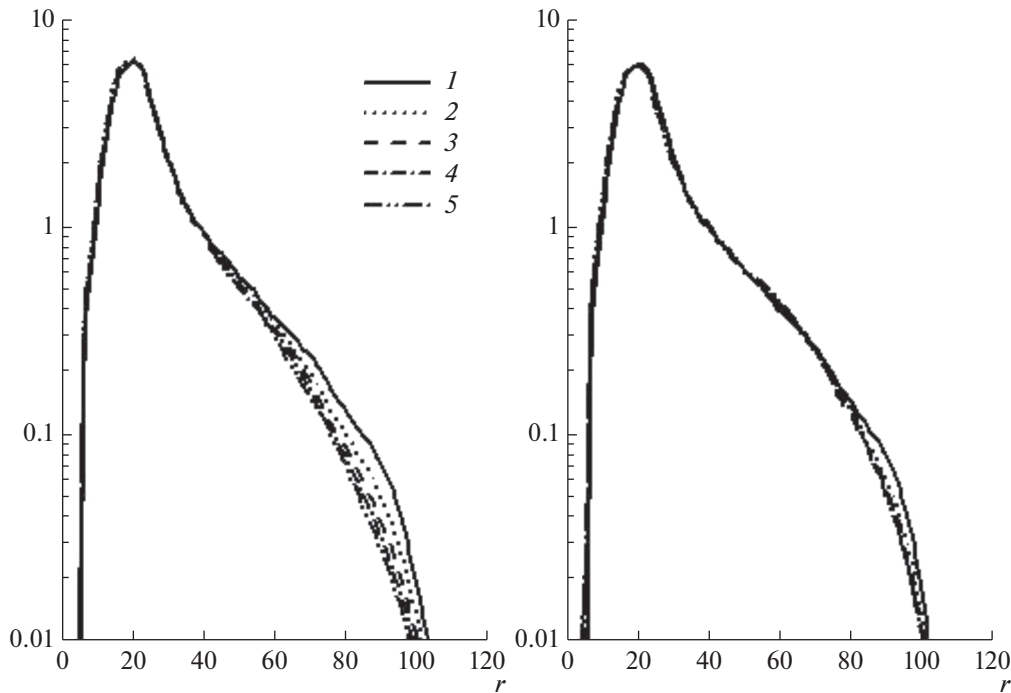


Рис. 6. Волновые спектры, осредненные по пяти промежуткам времени длиной $\Delta t = 50$. Левая панель – расчеты по полной модели; правая панель – по упрощенной.

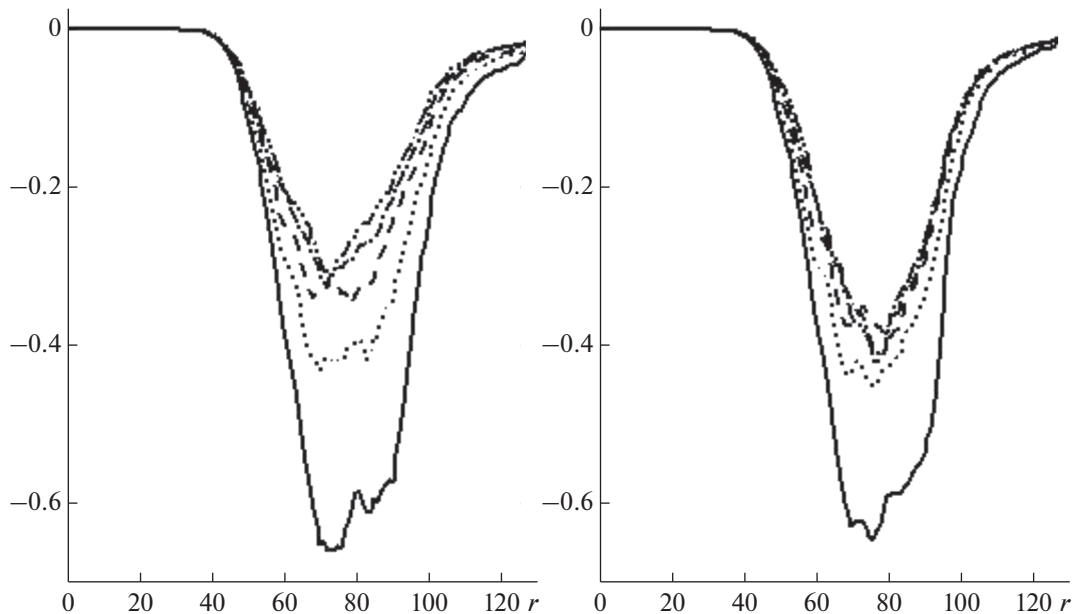


Рис. 7. Спектры высокочастотной диссипации (см. легенду на рис. 6, левая панель).

версии трехмерной модели. Как видим, в основном, спектры довольно близки друг к другу, в особенности в энергонесущей части спектра. Расхождения, заметные при $r > 40$, могут объясняться несколько меньшей высокочастотной диссипацией в полной модели.

Поскольку рассматривался квазистационарный, почти адиабатический режим, то диссипация в виде обрушения отсутствовала, и очень малый приток энергии полностью компенсировался высокочастотной диссипацией. Алгоритм диссипации описан в работах [2, 3]). Напомним, что спектральный коэффициент, определяющий высокочастотную диссипацию, равен нулю внутри эллипса с полуосями aM_x и aM_y и растет квадратично по k вне эллипса. Коэффициент a в данной работе равен 0.5. Спектр диссипации для двух вариантов расчета показан на рис. 7. Как видно из рисунка, спектры диссипации качественно близки друг к другу, но в полной модели диссипация несколько меньше, что и проявляется на рис. 6.

Волновые спектры и диссипация являются сравнительно грубыми характеристиками решения. На рис. 8 представлены спектры гораздо более чувствительной характеристики — спектры наклона η_ξ .

Данные на рис. 8 показывают, что в энергонесущей части спектра распределение наклонов воспроизведено упрощенной моделью очень хорошо, а на высоких волновых числах оно завышено, что объясняется завышенной в этой области диссипацией.

Нетрудно заметить, что в обеих моделях используются одни и те же эволюционные уравнения, и лишь вертикальная скорость вычисляется по различным алгоритмам: в полной модели — через трехмерное уравнение Пуассона (12), а в двухмерной модели — через граничное условие (31) гипотезой (27) (где малый коэффициент A_0 опущен). Поэтому наиболее важной характеристикой, отличающей упрощенную модель от исходной, является полная вертикальная скорость w . Сопоставление спектров этой величины для полной и упрощенной моделей представлено на рис. 9.

Любопытно, что вертикальная скорость имеет спектр, сходный с волновым спектром (рис. 6). В целом эти спектры обладают теми же свойствами, что и предыдущие. Между спектрами, рассчитанными по разным моделям, наблюдается очевидное сходство.

В заключение приведем распределение вероятности возвышения. На рис. 10 показаны вероятности возвышения поверхности η , рассчитанные по полной (сплошная кривая) и упрощенной моделям. Кривые весьма близки к друг другу, и обе демонстрируют типичное распределение вероятностей: высоты волн значительно превышают глубины подошв. В данном расчете повторяемость экстремальных волн, определяемых по критерию $\eta/H_s > 1.2$ [3], равна 10^{-6} . Эта величина зависит от интегральной крутизны волны, которая в данном случае была невелика, порядка 0.05–0.06.

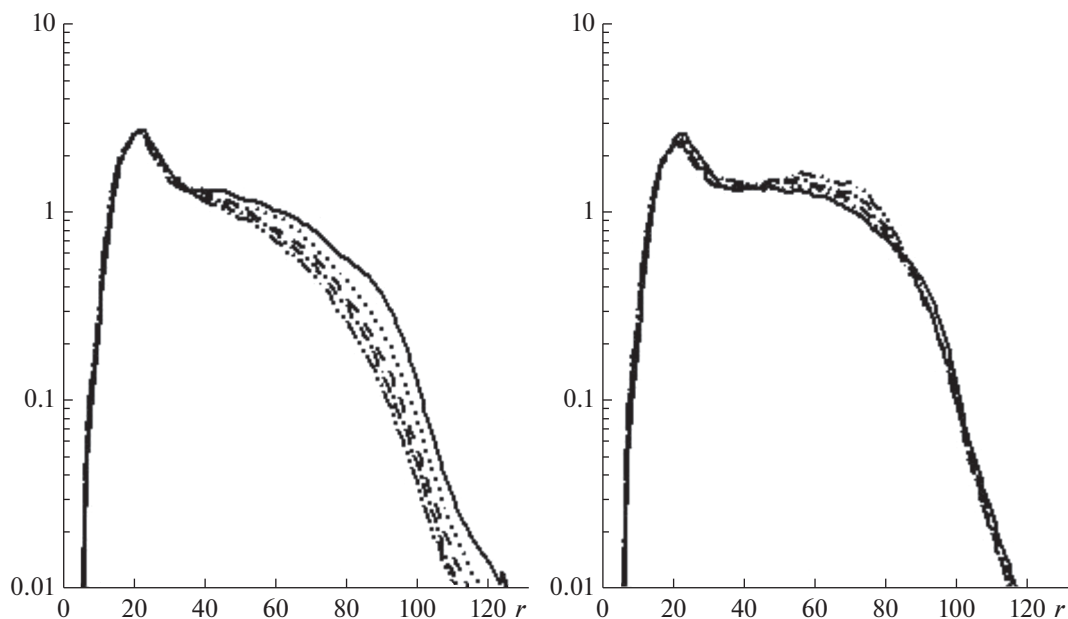


Рис. 8. Спектры продольного наклона поверхности η_ξ (см. легенду на рис. 6, левая панель).

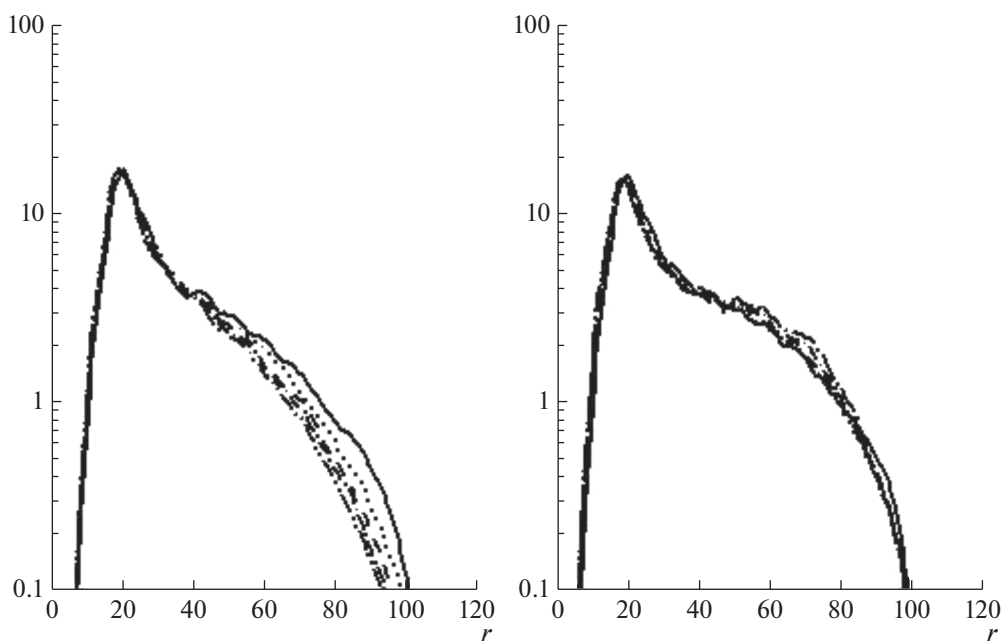


Рис. 9. Спектры вертикальной скорости w на поверхности (см. легенду на рис. 6, левая панель).

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье предложен новый подход к прямому численному моделированию периодических трехмерных волновых движений. Подход основан на разделении потенциала скорости на линейную и нелинейную компоненты. Это оправдано, так как более 95% энергии волн описывается линейной

компонентой, а нелинейная является малой поправкой. Впрочем, поскольку эволюционные уравнения принимаются в полной форме, многие нелинейные процессы описываются также в линейном приближении (например, квазилинейная теория Хассельманна [8]). Решение для линейной компоненты потенциала известно, следовательно

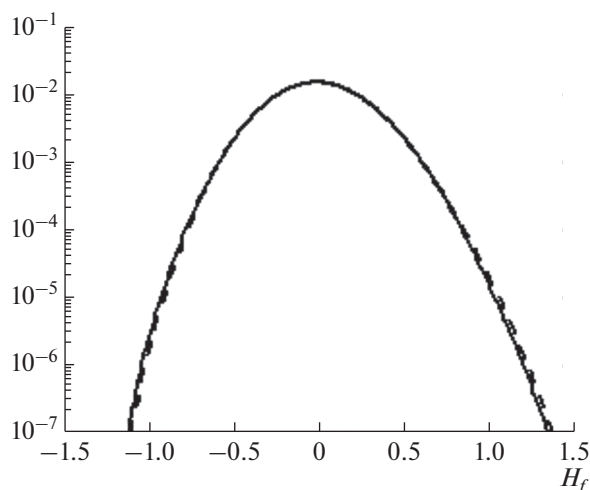


Рис. 10. Распределение вероятности возвышения, рассчитанное по полной модели (сплошная кривая) и по упрощенной модели (пунктир).

но, уравнение Лапласа (которое в криволинейной системе координат обращается в полное эллиптическое уравнение) используется для отыскания нелинейной компоненты. Уравнение решается как уравнение Пуассона с итерациями по правой части. Этот подход был реализован в предыдущих статьях (см. [3]). Полная модель при достаточном разрешении по горизонтали и вертикали может рассматриваться как базовая модель для описания адиабатического движения в периодической области.

Парадоксально, что достаточно сложная схема, используемая для решения трехмерного уравнения Пуассона, нужна только для того, чтобы вычислить вертикальную скорость на поверхности (т.е. первую производную по вертикали от потенциала). Между тем, на это решение затрачивается не менее 90% машинного времени и 95% памяти. Возникает соблазн найти подход в моделировании, основанный целиком на поверхностных характеристиках, аналогичный формулировке этой же проблемы для двухмерного волнового движения в конформных координатах. Почти очевидно, что точная формулировка проблемы в терминах поверхностных переменных для трехмерного движения невозможна. Тем не менее, возникает мысль о возможности использования малости нелинейной компоненты потенциала для формулировки приближенного подхода, такая схема может основываться на уравнении для потенциала, записанном для самой поверхности. Это уравнение точно как для полного потенциала, так и для нелинейной компоненты, но конструктивным оказывается уравнение (17) для нелинейной поправки. По сути это уравнение является дополнительным поверхностным кинематиче-

ским условием. Трудность состоит в том, что это уравнение содержит, помимо вертикальной скорости $w = \tilde{\varphi}_z$, и ее вертикальную производную $w_z = \varphi_{zz}$. В течение многих лет это препятствие казалось непреодолимым, однако в текущем году была найдена схема замыкания уравнений. Идея замыкания возникла при детальном рассмотрении вертикальной структуры потенциала скорости вблизи поверхности раздела. Поскольку структура потенциала первично описывается уравнением Лапласа, кажется очевидным, что решение должно быть достаточно гладким, несмотря на то, что граничные условия ставятся на криволинейной поверхности. Это подтверждается расчетами [5]. В качестве гипотезы предполагалось, что первая и вторая производные потенциала на поверхности связаны между собой функциональной зависимостью $\varphi_z = f(\varphi_{zz})$. Эта гипотеза ничего не предопределяет, поскольку функция f может зависеть от локальных параметров или даже быть нелокальной, т.е. зависеть от полей $\eta(\xi, \vartheta)$ и $\varphi(\xi, \vartheta)$.

Для определения функции можно использовать “точную” трехмерную модель [2]. Сначала зависимость $\varphi_z = f(\varphi_{zz})$ исследовалась в Фурье пространстве. Производные $\varphi_z(0)$ и $\varphi_{zz}(0)$ рассчитывались конечными разностями на основе решения уравнения Пуассона для нелинейной компоненты потенциала. Заметим, что эти величины не являются прямым продуктом решения, поэтому они рассчитывались направленными разностями. Было получено, что Фурье-компоненты производных $\varphi_z(0)$ и $\varphi_{zz}(0)$ связаны между собой линейно, однако разброс этой зависимости оказался довольно велик. Далее функция f исследовалась для физических сеточных переменных. В предыдущей статье [4], где использовалось число уровней по вертикали, равное 30, была получена надежная линейная связь между $\varphi_z(0)$ и $\varphi_{zz}(0)$. Относительный разброс значений w был гораздо меньше, чем для Фурье коэффициентов, но все же составлял порядка $0.1w$. Полученная зависимость использовалась при моделировании эволюции волнового поля и параллельных расчетов с теми же параметрами по полной модели. Совпадение результатов было вполне удовлетворительным. Тем не менее, исследование связи между $\varphi_z(0)$ и $\varphi_{zz}(0)$ было продолжено с использованием модели более высокого разрешения. Неожиданно выяснилось, что точность расчета второй производной φ_{zz} с помощью направленных разностей существенно зависит от числа использованных уровней для решения уравнения Пуассона. При выполнении данной работы число уровней было увеличено до 50 и проведено спе-

циальное исследование точности аппроксимации. В результате согласование между $\varphi_\zeta(0)$ и $\varphi_{\zeta\zeta}(0)$ значительно улучшилось (рис. 3).

Важно, что в эволюционные уравнения (29) и (30) входит полная вертикальная скорость. Расчеты показали, что вертикальные скорости, рассчитанные по уравнению Пуассона (12) и по поверхностному условию (31), согласуются между собой очень хорошо (рис. 4).

Сравнение результатов интегрирования полной и упрощенной моделей показало вполне удовлетворительное согласование. Это было подтверждено буквальным сравнением полей возвышения (рис. 5) и сопоставлением ряда статистических характеристик решения (рис. 6–10).

Нельзя считать, что разработка двумерного подхода в трехмерной проблеме закончена. Вероятно, связь между $\varphi_\zeta(0)$ и $\varphi_{\zeta\zeta}(0)$ можно улучшить или заменить на более точную. Тем не менее, предложенный подход представляется весьма перспективным. Его главным преимуществом является гораздо более высокая скорость счета: в варианте, описанном в работе [4], упрощенная модель считала в 84 раза быстрее, чем полная; в последнем варианте – в 74 раза. Некоторое замедление объясняется внесением изменений в итерационную схему для повышения устойчивости. Коэффициент ускорения существенно зависит от объема и частоты запоминаемой информации. В оптимальном варианте можно достичь ускорение в 100 раз.

Область применения новой схемы достаточно широка. Известно, что счет по полной модели происходит очень долго, так что работа над усовершенствованием модели (главным образом, в ее физической части) сводится к непрерывному ожиданию результатов, что лишает возможности многократного повторения результатов и подбора параметров. Уточненные с помощью упрощенной модели схемы параметризации можно включить в точную модель. Заметим, что программирование модели ((29)–(31)) на основе метода Фурье неизмеримо проще, чем программирование исходной модели ((4)–(6)).

Упрощенная модель может использоваться для интерпретации результатов спектральных расчетов по модели типа WAVEWATCH. В специально выбранных районах результаты спектрального прогноза могут быть конвертированы в начальные условия для прямого моделирования. Трехмерные модели в такой схеме не могут быть использованы ввиду низкой эффективности. Расчеты по модели позволяют получить все необходимые статистические характеристики волнения. Этот подход аналогичен многомасштабному моделированию в прогнозе погоды.

Упрощенная модель может оказаться полезной при моделировании совместной динамики двумерных волн и волнового пограничного слоя (ВПС), описываемого LES моделью [9].

Данная модель хорошо работает для воспроизведения статистического режима многомодового волнового поля с реальной крутизной. Модель заведомо не подходит для исследования очень нелинейных процессов типа опрокидывания волн. Впрочем, для таких исследований не подходит и исходная полная модель, так же как и любые трехмерные модели в отслеживающих поверхность координатах. Для исследования сложных локальных процессов надо использовать модель, основанную на поверхностном интеграле [7], или конформную модель [6].

Благодарности. Автор благодарит О.И. Чаликову за помощь в работе над рукописью.

Источник финансирования. Работа выполнена в рамках программы РАН (№ 0149-2019-0015) и частично при поддержке РФФИ (проект 18-05-01122).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Chalikov D.* Numerical modeling of sea waves. Springer, 2016. 330 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-32916-1>
2. *Chalikov D.* Numerical modeling of surface wave development under the action of wind // *Ocean Sci.* 2018. V. 14. P. 453–470. <https://doi.org/10.5194/os-14-453-2018>
3. *Chalikov D.* High-Resolution Numerical Simulation of Surface Wave Development under the Action of Wind // In book: *Ocean Wave Studies.* 2020. <https://doi.org/10.5772/intechopen.92262>
4. *Chalikov D.* Accelerated Reproduction of 2-D Periodic Waves // *Ocean Dynamics.* 2021. V. 71(10). <https://doi.org/10.1007/s10236-020-01435-8>
5. *Chalikov D., Babanin A.V., Sanina E.* Numerical Modeling of Three-Dimensional Fully Nonlinear Potential Periodic Waves // *Ocean Dynamics.* 2014. V. 64. № 10. P. 1469–1486.
6. *Chalikov D., Sheinin D.* Direct Modeling of One-dimensional Nonlinear Potential Waves. *Nonlinear Ocean Waves // Advances in Fluid Mechanics*, Perrie W. (ed.). 1998. V. 17. P. 207–258.
7. *Grue J., Fructus D.* Model For Fully Nonlinear Ocean Wave Simulations Derived Using Fourier Inversion Of Integral Equations In 3D // *Advances in Numerical Simulation of Nonlinear Water Waves.* 2010. V. 11. P. 1–42.
8. *Hasselmann K.* On the non-linear energy transfer in a gravity wave spectrum, Part 1. // *J. Fluid Mech.* 1962. V. 12. P. 481–500.
9. *Sullivan P.P., McWilliams J.C.* Dynamics of Winds and Currents Coupled to Surface Waves // *Annu. Rev. Fluid Mech.* 2010. V. 42. P. 19–42.

Two-Dimensional Modeling of Three-Dimensional Waves

D. Chalikov^{a, b, #} (ORCID: 0000-0001-8698-9558)

^a*Shirshov Institute of Oceanology RAS, Moscow, Russia*

^b*University of Melbourne, Victoria, Australia*

[#]*e-mail: dmitry-chalikov@yandex.ru*

An approximate method of direct modeling of three-dimensional surface waves is proposed. The method is based on the full equations of the potential motion of a liquid with a free surface in a curvilinear non-stationary coordinate system. The separation of the velocity potential into nonlinear and linear components is used. The two-dimensional equations of the model are derived on the basis of an exact three-dimensional equation for the nonlinear component of the velocity potential written on the surface. The equation contains the first and second vertical derivatives of the potential on the surface; thus, the system of equations turns out to be unclosed. The analysis of the results of accurate three-dimensional modeling allowed us to suggest that the first and second derivatives are linearly related to each other. This connection allows a closed two-dimensional (surface) formulation of the problem of three-dimensional waves. The first derivative of the potential (i.e., the vertical velocity on the surface) is calculated from the equation for the velocity potential on the surface using iterations. The relationship between the derivatives of the potential is not completely accurate, so in general, the method is approximate. Nevertheless, the model accurately reproduces the evolution of the wave field and its main statistical characteristics. The most obvious advantage of the model is its high efficiency: the speed of integration of a two-dimensional model is approximately two orders of magnitude higher than the speed of an equivalent three-dimensional model. The model is designed to quickly reproduce the dynamics of a two-dimensional wave field based on information about the wave spectrum.

Keywords: numerical modeling, wind waves, wave development, wave spectrum, Fourier method, vertical velocity on the surface, energy input from the wind, wave dissipation, wave statistics