

# Термодинамика симметричной спин-орбитальной модели: одномерный и двумерный случаи<sup>1)</sup>

В. Э. Валиулин<sup>+</sup>\*, А. В. Михеенков<sup>+\*× 2)</sup>, К. И. Кугель<sup>°∇</sup>, А. Ф. Барабанов<sup>×</sup>

<sup>+</sup>Московский физико-технический институт, 141701 Долгопрудный, Россия

\*Национальный исследовательский центр “Курчатовский институт”, 123182 Москва, Россия

×Институт физики высоких давлений им. Л. Ф. Верещагина РАН, 108840 Троицк, Москва, Россия

°Институт теоретической и прикладной электродинамики РАН, 125412 Москва, Россия

∇Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики, 101000 Москва, Россия

Поступила в редакцию 6 марта 2019 г.

После переработки 20 марта 2019 г.

Принята к публикации 20 марта 2019 г.

В рамках сферически симметричного самосогласованного подхода рассчитаны теплоемкость и восприимчивости двумерной и одномерной спин-орбитальной модели при различных температурах и соотношениях между параметрами системы. Показано, что даже в отсутствие дальнего спинового и орбитального порядка в системе возникают особенности поведения термодинамических величин, характерные для фазовых переходов. Такие особенности оказываются связанными с появлением квантовой запутанности при взаимодействии спиновых и орбитальных степеней свободы.

DOI: 10.1134/S0370274X19080125

**1. Введение.** Проблема формирования запутанных (*entangled*) квантовых состояний играет важную роль во многих областях физики, привлекая к себе особое внимание в вопросах квантовых вычислений и их возможной реализации [1, 2]. При этом речь чаще всего идет о смешивании состояний, отвечающих различным проекциям спина. Не менее интересные задачи возникают и в двухспиновых системах, где эта запутанность понимается как некоторое коррелированное состояние двух спиновых переменных [3].

Сами двухспиновые модели характерны обычно для описания особенностей соединений переходных металлов со взаимосвязанными спиновыми и орбитальными степенями свободы, поэтому такие модели часто называются спин-орбитальными [4–6]. Необычные эффекты, связанные со спин-орбитальными корреляциями и соответствующей квантовой запутанностью, широко обсуждались в литературе. В частности, отмечалась возможность своеобразных типов спин-орбитальных квантовых состояний и переходов между ними [7–9].

Интересно, что необычное поведение спин-орбитальных корреляций может проявляться и в

системах, в которых, в силу низкой размерности, отсутствует какой-либо спиновый или орбитальный порядок. Так, для симметричной двумерной модели оказывается характерным обращение спин-орбитальных корреляций в нуль при некоторых пороговых значениях температуры или параметров модели [10]. При этом поведение спиновой и орбитальной корреляционных функций не демонстрирует каких-либо особенностей.

Мотивация работы состоит в том, чтобы выяснить, как эта необычная особенность спин-орбитальных корреляций проявляется в термодинамических характеристиках рассматриваемых систем. Ниже мы показываем, что, несмотря на обусловленное низкой размерностью отсутствие дальнего порядка, при некоторой величине межподсистемного обмена одновременно с пороговым ростом спин-орбитальных корреляций четко проявляются особенности термодинамических величин, напоминающие фазовый переход. Появление этих особенностей мы интерпретируем как возникновение квантового запутанного спин-орбитального состояния.

Рассматриваются одномерный (1D) двумерный случаи (2D), использован сферически симметричный самосогласованный подход, который дает достаточно надежные результаты для низкоразмерных си-

<sup>1)</sup>См. дополнительные материалы к данной статье на сайте нашего журнала [www.jetpletters.ac.ru](http://www.jetpletters.ac.ru)

<sup>2)</sup>e-mail: mikheen@bk.ru

стем [10, 11]. Причем корреляционные и термодинамические особенности проявляются разным образом в разных размерностях. В частности, в рамках принятого подхода оказывается, что в 1D, в отличие от 2D, возможен возвратный (по температуре) переход в состояние с межподсистемными корреляциями.

**2. Модель и метод.** Будем исходить из симметричного варианта квантовой спин-орбитальной модели (симметричной модели Кугеля–Хомского) на квадратной (или линейной) решетке. Гамильтониан системы имеет вид

$$\hat{\mathbf{H}} = J \sum_{\langle i, j \rangle} \mathbf{S}_i \mathbf{S}_j + I \sum_{\langle i, j \rangle} \mathbf{T}_i \mathbf{T}_j + K \sum_{\langle i, j \rangle} (\mathbf{S}_i \mathbf{S}_j) (\mathbf{T}_i \mathbf{T}_j),$$

$$\hat{\mathbf{H}} = \hat{J} + \hat{I} + \hat{K}, \quad (1)$$

где  $\langle i, j \rangle$  означает суммирование по связям ближайших соседей на квадратной решетке или линейной цепочке;  $\hat{\mathbf{S}}_i$  и  $\hat{\mathbf{T}}_i$  – операторы спина и операторы псевдоспина, отвечающего за орбитальные степени свободы,  $S = 1/2$ ,  $T = 1/2$ .

Рассматривается случай антиферромагнитного (АФМ) спин-спинового и псевдоспин-псевдоспинового взаимодействий  $J = I > 0$  и отрицательного обмена между подсистемами  $K < 0$  (везде далее все энергетические величины приведены в единицах  $J = I = 1$ ). Как показано в [12], на примере симметричной спин-орбитальной модели, при таком соотношении обменных параметров взаимодействия спиновых и псевдоспиновых (орбитальных) степеней свободы проявляется наиболее наглядно и приводят к “запутанности” спиновых и псевдоспиновых степеней свободы [13, 14].

В соответствии с теоремой Мермина–Вагнера [15] для несвязанных подсистем ( $K = 0$ ) в 2D и 1D дальний порядок невозможен при любой  $T \neq 0$ . Естественно считать, что с включением межподсистемного взаимодействия  $K \neq 0$  роль температурных и квантовых флуктуаций только растет, и дальнего порядка нет. Ниже мы ограничиваемся ненулевыми температурами.

С учетом сказанного вычисления в работе исходят из предположения, что:

- i) все узлы в системе равноправны (трансляционная симметрия не нарушена);
- ii) одноузельные средние равны нулю (отсутствует дальний порядок)

$$\langle \hat{S}_i \rangle = \langle \hat{T}_i \rangle = 0; \quad (2)$$

- iii) корреляционные функции для различных компонент спина и псевдоспина ( $\alpha \neq \beta$ ) так-

же равны нулю (SU(2) симметрии в спиновом и псевдоспиновом пространствах не нарушены)

$$\langle \hat{S}_i^\alpha \hat{S}_j^\beta \rangle = 0, \quad \langle \hat{T}_i^\alpha \hat{T}_j^\beta \rangle = 0, \quad \langle \hat{S}_i^\alpha \hat{T}_j^\beta \rangle = 0. \quad (3)$$

Условия i–iii автоматически выполняются в квантовом сферически симметричном самосогласованном подходе (СССП) (см., например, [11, 16, 17]), который и используется ниже.

Как и в [10], рассматриваются спин-спиновая и спин-псевдоспиновая запаздывающие функции Грина:

$$G_{\mathbf{q}} = \langle S_{\mathbf{q}}^z | S_{-\mathbf{q}}^z \rangle_{\omega}, \quad (4)$$

$$R_{\mathbf{q}} = \langle T_{\mathbf{q}}^z | S_{-\mathbf{q}}^z \rangle_{\omega}. \quad (5)$$

Очевидно,  $\langle T_{\mathbf{q}}^z | T_{-\mathbf{q}}^z \rangle_{\omega} = \langle S_{\mathbf{q}}^z | S_{-\mathbf{q}}^z \rangle_{\omega}$ , поскольку рассматривается симметричный случай  $I = J$ .

Вычисления в рамках стандартной схемы СССП (см., например, [10, 11]) с учетом принятых в [10] приближений для  $\hat{K}$  и доминирующего вклада внутриузельного межподсистемного обмена приводят к следующим выражениям для  $G_{\mathbf{q}}$  и  $R_{\mathbf{q}}$ .

$$G_{\mathbf{q}} = \frac{F_{\text{ac}}(\mathbf{q})}{\omega^2 - \omega_{\text{ac}}^2(\mathbf{q})} + \frac{F_{\text{opt}}(\mathbf{q})}{\omega^2 - \omega_{\text{opt}}^2(\mathbf{q})}, \quad (6)$$

$$R_{\mathbf{q}} = \frac{F_{\text{ac}}(\mathbf{q})}{\omega^2 - \omega_{\text{ac}}^2(\mathbf{q})} - \frac{F_{\text{opt}}(\mathbf{q})}{\omega^2 - \omega_{\text{opt}}^2(\mathbf{q})}. \quad (7)$$

Громоздкие выражения для числителей функций Грина и спектров оптической и акустической ветвей возбуждений см. в дополнительных материалах.

В (6) и (7) входят спин-спиновые корреляторы. В двумерном случае

$$c_r = \langle \hat{S}_i^z \hat{S}_{i+r}^z \rangle, \quad r = g, d, 2g \quad (8)$$

– спин-спиновые корреляторы, соответственно, для первого (сторона квадрата)  $c_g \equiv c_1$ , второго (диагональ)  $c_d \equiv c_2$  и третьего (удвоенная сторона)  $c_{2g} \equiv c_3$  ближайших соседей. В одномерном же случае, очевидно, отсутствуют корреляторы по диагонали.

Спин-псевдоспиновые корреляторы – внутриузельный  $m_0$  и межузельный  $m_g \equiv m_1$  равны

$$m_0 = \langle S_i^z T_i^z \rangle, \quad m_g = \langle S_i^z T_{i+g}^z \rangle, \quad (9)$$

Далее численная процедура состоит в следующем: все корреляторы –  $c_r$ ,  $m_0$ ,  $m_g$  находятся самосогласованно через функции Грина  $G$  и  $R$ .

**3. Результаты и обсуждение. Случай 2D.** Важный качественный результат в 2D отмечался уже в работе [10]. А именно, при фиксированной температуре и малом параметре межподсистемного взаимодействия  $|K|$  спин-псевдоспиновые корреляторы

$m_0$  и  $m_1$  равны нулю. Но с ростом  $|K|$  при достижении некоего порогового значения  $K_c$  корреляторы  $m_0$  и  $m_1$  становятся отличными от нуля и нарастают степенным образом. Аналогичная ситуация имеет место при фиксированном  $K$  и падении температуры. Корреляторы  $m_0$  и  $m_1$  начинают нарастать степенным образом при достижении пороговой температуры  $T_c$ .

В обоих случаях внутрисистемные (спин-спиновые) корреляторы  $c_r$  меняются слабо и не проявляют каких-либо аномалий в критической точке. Для удобства соответствующие кривые из [10] приведены в дополнительных материалах.

Очевидно, что возникновение межподсистемных корреляций должно существенным образом влиять на термодинамические свойства. Энергия в рассматриваемом подходе полностью определяется одноузельными и двухузельными корреляторами. Поэтому естественно ожидать, что резкий рост спин-псевдоспиновых корреляторов в запутанном состоянии приведет к особенности теплоемкости.

На рисунке 1 показана эволюция теплоемкости в зависимости от  $K$  при фиксированных  $T$  (рис. 1a) и в зависимости от  $T$  при фиксированных  $K$  (рис. 1b). Как и следовало ожидать, при входе в область с межподсистемными корреляциями теплоемкость испытывает скачок. Чем выше критическая температура  $T_c$ , тем больше величина этого скачка. Из рисунка 1b также видно, что при высоких температурах все кривые выходят на единую асимптотику, а при  $T \rightarrow 0$  для всех кривых  $C \rightarrow 0$  (теорема Нернста выполняется).

На следующей иллюстрации – рис. 2 представлена спин-спиновая  $\chi_{ss}$  и спин-псевдоспиновая  $\chi_{st}$  восприимчивости вдоль тех же линий на фазовой плоскости – в зависимости от  $K$  при фиксированных  $T$  (рис. 2a) и зависимость от  $T$  при фиксированных  $K$  (рис. 2b). Как и теплоемкость, восприимчивость испытывает скачок в критических точках.

Вне перехода восприимчивость слабо зависит от  $T$  и  $K$ . Поведение спин-спиновой восприимчивости при малых  $|K|$  согласуется с хорошо изученным случаем модели Гейзенберга [17].

Таким образом, в 2D случае, т.е. на квадратной решетке при любой температуре с ростом межподсистемного взаимодействия  $K$  возникает состояние с запутанными спиновой и псевдоспиновой степенями свободы.

#### 4. Результаты и обсуждение. Случай 1D.

Вычисления в одномерном случае аналогичны приведенным выше для 2D (соответствующие выражения см. в дополнительных материалах).

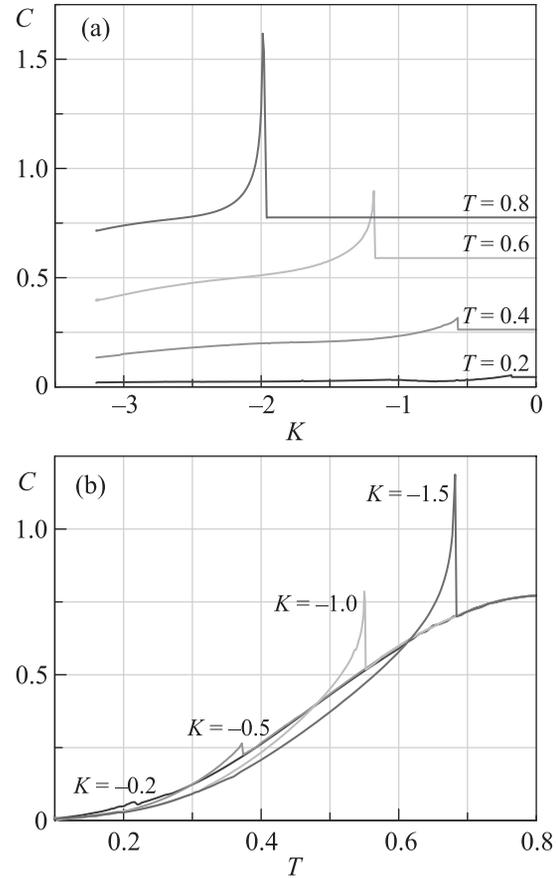


Рис. 1. (Цветной онлайн) 2D решетка. (a) – Теплоемкость в зависимости от межподсистемного обмена  $K$  при фиксированных температурах  $T$ . Цвета отвечают различным температурам (значения  $T$  указаны справа). (b) – Теплоемкость в зависимости от температуры  $T$  при фиксированном обмене  $K$ . Цвета отвечают различным  $K$  (значения  $K$  указаны на пиках)

Принятый здесь подход является среднеполевым, в том смысле, что затухание спиновых возбуждений в функциях Грина (6), (7) равно нулю. Однако в 1D его результаты, в силу заложенных условий i–iii (см. раздел 2), приводят к хорошему согласию с данными точного решения, а при наличии фрустрации, когда нет точного решения, – с численными результатами для конечных цепочек [18–20].

Приведем сразу фазовую диаграммы – совместно для обеих размерностей, см. рис. 3. Видно, что одномерный случай качественно отличается от двумерного. В отличие от 2D случая, в 1D линия, разделяющая области с нулевыми и ненулевыми спин-псевдоспиновыми корреляциями, начинается при конечном межподсистемном обмене, в точке ( $K \approx -2.44$ ,  $T = 0$ ). Кроме того, граница раздела немо-

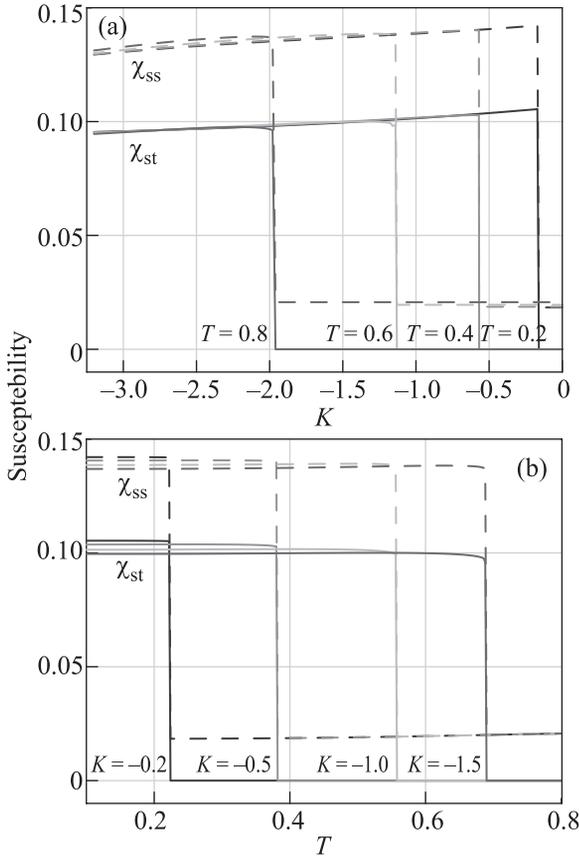


Рис. 2. (Цветной онлайн) 2D решетка. (а) – Восприимчивость в зависимости от межподсистемного обмена  $K$  при фиксированных температурах  $T$ . (б) – Восприимчивость в зависимости от температуры  $T$  при фиксированном межподсистемном обмене  $K$ . На обоих рисунках пунктир – спин-спиновая восприимчивость  $\chi_{ss}$ , сплошная линия – спин-псевдоспиновая восприимчивость  $\chi_{st}$ . Цвета отвечают различным значениям  $T$  (а) и  $K$  (б)

нотонна, что делает возможным возвратный переход в перепутанную область по температуре.

Эта немонотонность сказывается, разумеется, и на остальных результатах. На рисунке 4а, и 4б (аналог рис. S1 и S3 для 2D из дополнительных материалов) для 1D решетки показана эволюция спин-спиновых и спин-псевдоспиновых корреляторов вдоль горизонтальных и вертикальных траекторий рис. 3 (зависимость от  $K$  при фиксированных  $T$  и зависимость от  $T$  при фиксированных  $K$ ).

Рисунок 4а гораздо менее нагляден, чем представляющий аналогичные зависимости в 2D рис. S1, поскольку линии, отвечающие температурам по обе стороны от точки перегиба фазовой границы, накладываются. Еще одно качественное отличие от двумерного случая в том, что в точке  $K_c$  одновременно с

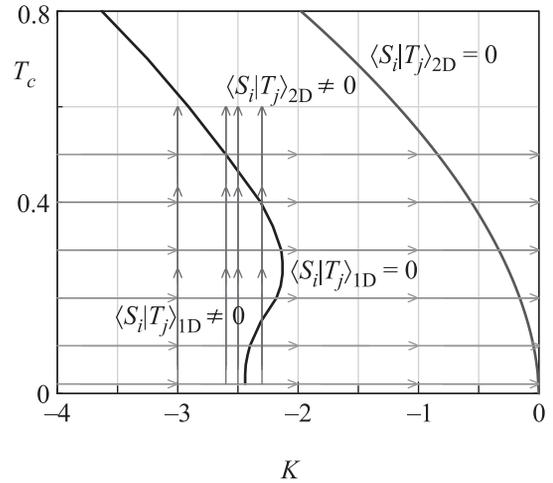


Рис. 3. (Цветной онлайн) 1D и 2D случаи. Области с нулевыми и ненулевыми спин-псевдоспиновыми корреляциями. Черная линия – фазовая граница в 1D, синяя – в 2D. Прямые со стрелками – траектории, вдоль которых представлены результаты в 1D (рис. 4–6)

началом степенного роста спин-псевдоспиновых корреляторов (внутриузельного  $m_0$  и междуузельного  $m_1$ ) спин-спиновый коррелятор  $c_1$  испытывает излом.

Наиболее заметная особенность рис. 4б – “пузырь” при  $K = -2.3$  – обусловлена именно возвратным переходом по температуре в перепутанную область и обратно. На рисунке 4а также видно, что в точке  $K_c$ , одновременно с ростом спин-псевдоспиновых корреляторов спин-спиновый коррелятор  $c_1$  испытывает излом и внутри перепутанной области резко убывает по модулю с ростом  $|K|$ .

Интуитивно понятно, что наличие в 1D одновременных особенностей у корреляторов обоих типов – внутриподсистемного и межподсистемного, – в отличие от 2D, где особенность есть только у межподсистемных корреляторов, может привести к существенному различию поведения, по крайней мере, теплоемкости в этих двух размерностях.

И это действительно видно на рис. 5 (аналог рис. 1 для 2D). Как и в двумерном случае, при входе в перепутанную область наблюдается скачок теплоемкости. Однако, в отличие от двумерного случая, знак этого скачка зависит от температуры перехода. На нижней части 1D фазовой границы (см. рис. 3) скачок положительный, но на верхней – отрицательный. Такое поведение не согласуется с интуитивным представлением о скачке теплоемкости при переходе в более упорядоченную фазу и обусловлено совместным влиянием разнонаправленных изменений внутриподсистемных и межподсистемных корреляторов. При низких температурах резкий рост спин-

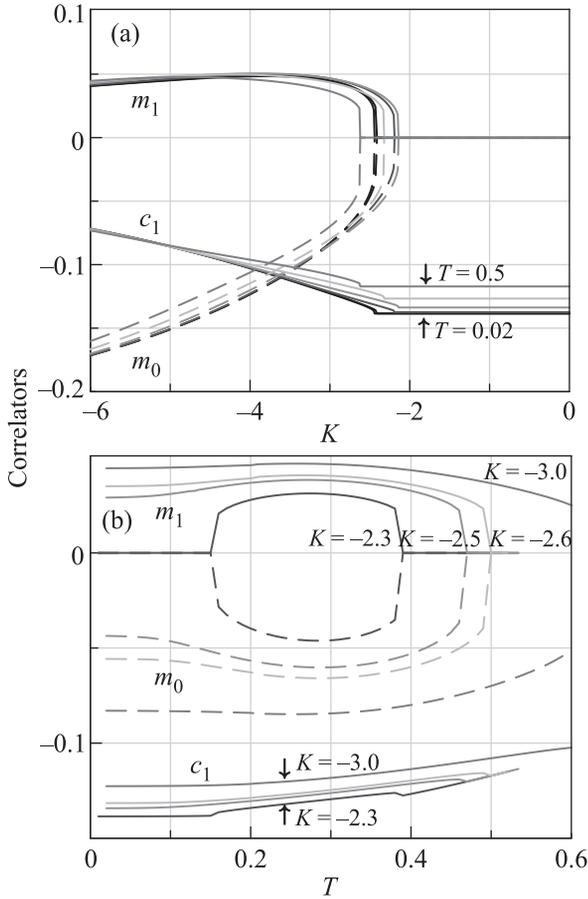


Рис. 4. (Цветной онлайн) 1D решетка. (а) – Корреляторы в зависимости от межподсистемного обмена  $K$  при фиксированных температурах  $T$ . (б) – Корреляторы в зависимости от температуры  $T$  при фиксированных значениях обмена  $K$ . Пунктир – внутриузельный спин-псевдоспиновый коррелятор  $m_0$ , верхние сплошные линии – спин-псевдоспиновый коррелятор  $m_1$  на ближайших соседях, нижние сплошные – спин-спиновый коррелятор  $c_1$  на ближайших соседях. Цвета отвечают, соответственно, различным значениям  $T$  (а) и  $K$  (б)

псевдоспиновых корреляторов превалирует над падением спин-спинового коррелятора, при температурах выше точки перегиба фазовой границы ситуация обратная.

Асимптотическое поведение кривых теплоемкости в пределах высоких и низких температур для всех значений  $K$  в 1D качественно такое же, как и в 2D: при высоких температурах все кривые выходят на единую асимптотику, а при  $T \rightarrow 0$  для всех кривых  $C \rightarrow 0$ .

И, наконец, последняя иллюстрация – рис. 6 (аналог рис. 2 для 2D), где демонстрируется спин-спиновая  $\chi_{ss}$  и спин-псевдоспиновая  $\chi_{st}$  восприимчивости вдоль горизонтальных и вертикальных траек-

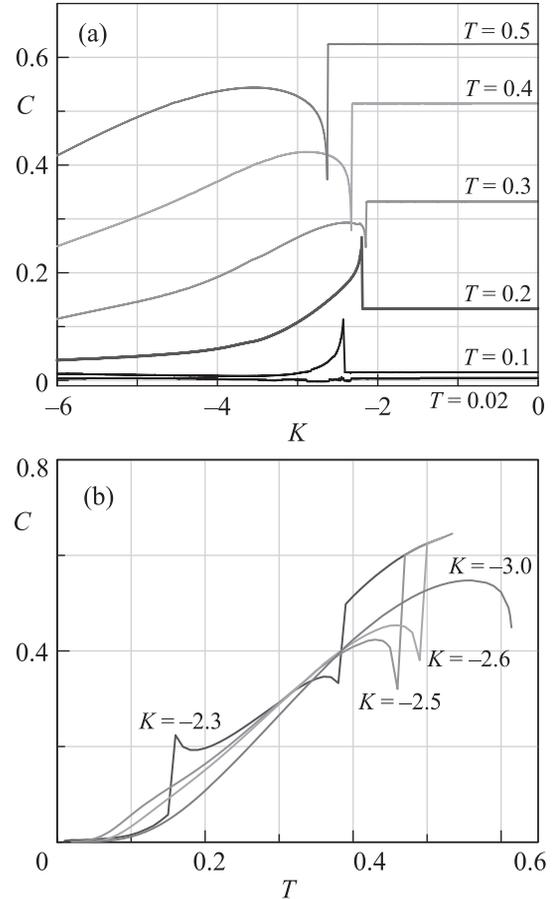


Рис. 5. (Цветной онлайн) 1D решетка. (а) – Теплоемкость в зависимости от межподсистемного обмена  $K$  при фиксированных температурах  $T$ . Цвета отвечают различным температурам (значения  $T$  указаны справа). (б) – Теплоемкость в зависимости от температуры  $T$  при фиксированном межподсистемном обмене  $K$ . Цвета отвечают различным  $K$  (значения  $K$  указаны на пиках). Сравните с рис. 1

торий рис. 3. Рисунок ба, как и аналогичный рисунок для корреляторов, не очень нагляден из-за наложения линий, отвечающих температурам по обе стороны от точки перегиба фазовой границы. Заметно, однако, быстрое падение спин-спинового коррелятора с ростом  $|K|$ .

Двусторонние ступени на рис. 6b, как и “пузырь” для коррелятора  $m_1$  на рис. 4b, очевидно, обусловлены возвратным переходом по температуре в перепутанную область и обратно.

В остальном поведение обеих восприимчивостей качественно аналогично ситуации в двумерном случае. И спин-спиновая  $\chi_{ss}$ , и спин-псевдоспиновая  $\chi_{st}$  восприимчивости испытывают скачок в критических точках.

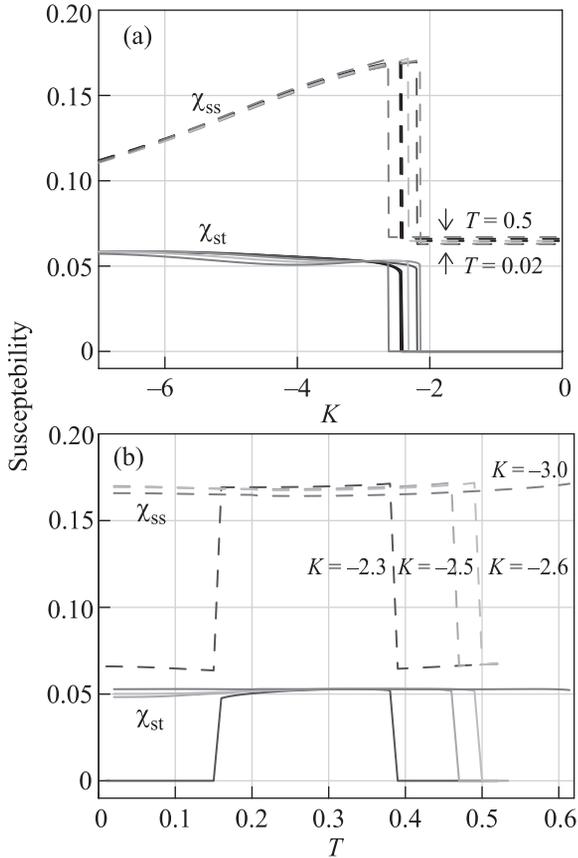


Рис. 6. (Цветной онлайн) 1D решетка. (а) – Восприимчивость в зависимости от межподсистемного обмена  $K$  при фиксированных температурах  $T$ . (б) – Восприимчивость в зависимости от температуры  $T$  при фиксированном обмене  $K$ . Пунктир – спин-спиновая восприимчивость  $\chi_{ss}$ , сплошная линия – спин-псевдоспиновая восприимчивость  $\chi_{st}$ . Цвета отвечают, соответственно, различным значениям  $T$  (а) и  $K$  (б). Сравните с рис. 2

**5. Заключение.** Отметим, что полученные результаты наглядно демонстрируют возможность перехода в состояние с квантовой запутанностью в спин-орбитальных системах даже при отсутствии дальнего порядка. Такой переход, характеризующийся пороговым возникновением спин-орбитальных корреляций, имеет явную аналогию с обычными фазовыми переходами (четко проявляющиеся особенности в теплоемкости и восприимчивостях). Фактически, мы тут имеем дело с фазовым переходом в некоторой квантовой жидкости, что позволяет предположить возможность таких явлений и в других системах с квантовой запутанностью. Отметим, что при выбранном знаке параметров модели ( $I, J > 0, K < 0$ ), запутанное состояние реализуется в широком интервале температур и значений параметров. Заметим здесь, что возмож-

ность квантовой запутанности в спин-орбитальных моделях широко обсуждалась в литературе (см., например, [6, 12, 14, 22, 23]), однако обычно при другом соотношении параметров (в частности, когда  $K > 0$  при одинаковых знаках  $I$  и  $J$ ), что приводит к возникновению запутанности в довольно ограниченной области фазовой диаграммы. Подчеркнем, что изученные особенности термодинамических характеристик имеют, по-видимому, чисто квантовую природу. Действительно, проведенный анализ точного решения одномерной спин-орбитальной модели для классических спинов [21] не выявляет аналогичных особенностей спин-орбитальной корреляционной функции (резкого обращения ее в нуль при некоторых конкретных значениях температуры и параметров модели) и, соответственно, особенностей термодинамики системы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований, проекты # 17-52-53014 и 19-02-00509. Работа К. И. Кугеля выполнена также при поддержке проектов #17-02-00323 и 17-02-00135.

1. I. Bengtsson and K. Zyczkowski, *Geometry of Quantum States: An Introduction to Quantum Entanglement*, Cambridge University Press, Cambridge (2006).
2. G. Benenti, G. Casati, and G. Strini, *Principles of Quantum Computation and Information*, World Scientific, Singapore (2007).
3. W.-L. You, A. M. Oleś, and P. Horsch, *New J. Phys.* **17**, 083009 (2015).
4. К. И. Кугель, Д. И. Хомский, *УФН* **136**, 621 (1982).
5. A. M. Oleś, *Acta Phys. Pol. A* **115**, 36 (2009).
6. A. M. Oleś, *J. Phys.: Condens. Matter* **24**, 313201 (2012).
7. A. M. Belemuk, N. M. Chtchelkatchev, A. V. Mikheyenkov, and K. I. Kugel, *Phys. Rev. B* **96**, 094435 (2017).
8. A. M. Belemuk, N. M. Chtchelkatchev, A. V. Mikheyenkov, and K. I. Kugel, *New J. Phys.* **20**, 063039 (2018).
9. W. Brzezicki, M. Cuoco, F. Forte, and A. M. Oleś, *J. Supercond. Novel Magn.* **31**, 639 (2018).
10. М. Ю. Каган, К. И. Кугель, А. В. Михеенков, А. Ф. Барабанов, *Письма в ЖЭТФ* **100**, 207 (2014).
11. А. Ф. Барабанов, А. В. Михеенков, А. В. Шварцберг, *ТМФ* **168**, 389 (2011).
12. S. K. Pati, R. R. P. Singh, and D. I. Khomskii, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 5406 (1998).
13. W.-L. You, A. M. Oleś, and P. Horsch, *Phys. Rev. B* **86**, 094412 (2012).
14. R. Lundgren, V. Chua, and G. A. Fiete, *Phys. Rev. B* **86**, 224422 (2012).
15. N. D. Mermin and H. Wagner, *Phys. Rev. Lett.* **17**, 1133 (1966).

16. J. Kondo and K. Yamaji, *Prog. Theor. Phys.* **47**, 807 (1972).
17. H. Shimahara and S. Takada, *J. Phys. Soc. Jpn.* **60**, 2394 (1991).
18. F. Suzuki, N. Shimata, and C. Ishii, *J. Phys. Soc. Jpn.* **63**, 1539 (1994).
19. I. Junger, D. Ihle, J. Richter, and A. Klümper, *Phys. Rev. B* **70**, 104419 (2004).
20. M. Härtel, J. Richter, D. Ihle, and S.-L. Drechsler, *Phys. Rev. B* **78**, 174412 (2008).
21. К. И. Кугель, Д. И. Хомский, *ФНТ* **6**, 207 (1980).
22. C. Itoi, S. Qin, and I. Affleck, *Phys. Rev. B* **61**, 6747 (2000).
23. Y. Chen, Z. D. Wang, Y. Q. Li, and F. C. Zhang, *Phys. Rev. B* **75**, 195113 (2007).