Письма в ЖЭТФ, том 109, вып. 8, с. 564 – 569

Квантовый эффект Телбота для цепочки частично коррелированных конденсатов Бозе–Эйнштейна (Миниобзор)

В. Б. Махалов, А. В. Турлапов[1)]

Институт прикладной физики РАН, 603950 Нижний Новгород, Россия

Поступила в редакцию 18 марта 2019 г.
После переработки 18 марта 2019 г.
Принята к публикации 19 марта 2019 г.

Картина интерференции материальных волн, возникающая в рамках квантового эффекта Телбота, качественно меняется в ответ на сколь угодно малую разупорядоченность фаз источников. В пространственном спектре возникают пики с волновыми векторами, которых нет в случае равных фаз. Приведена математическая модель эффекта. Обсуждаются проявления разупорядоченности фаз в экспериментах с цепочками интерферирующих бозе-конденсатов атомов и молекул. Предложена термометрия на основе наблюдаемых последствий разупорядоченности фаз.

DOI: 10.1134/S0370274X19080137

1. Введение. В классической оптике эффект Телбота [1] состоит в самоотображении поля, имеющего периодическое распределение в исходной плоскости. Позже подобные эффекты наблюдались для акустических волн [2, 3], волновых функций атомов [4] и электронов [5, 6], плазмонов [7] и спиновых волн [8]. В оптике начальное распределение поля воспроизводится в параксиальном приближении. В квантовой механике эффект точен для периодической волновой функции $\psi(z+d)=\psi(z)$ и гамильтониана свободной частицы $\hat{H}=\hat{p}^2/2M$. В квантовом случае не требуется перемещение волнового фронта в пространстве – периодическое распределение волновой функции может восстанавливаться в том же месте.

В квантовой системе многих тел, ограниченной по x и y, из-за флуктуаций фазы оказывается сложным или невозможным выполнить исходное условие эффекта Телбота, создать точно периодическое по z распределение источников в начальный момент времени. В вытянутом по z бозе-конденсате фаза флуктуирует вплоть до температур существенно меньших, чем температура конденсации [9]. В бесконечно длинной цепочке сверхпроводников или бозе-конденсатов присутствуют длинноволновые флуктуации фазы даже при нулевой температуре [10], и следовательно фазы соседних источников хотя бы частично некоррелированы. Сколь угодно малая флуктуация фазы приводит к качественному отличию интерференционной картины от эффекта Телбота [11]. В спектре пространственного распределения с одной стороны частично сохраняются пики с волновым вектором $k=2\pi/d$, отвечающие исходному пространственному периоду модуляции, а с другой – появляются пики с волновыми векторами $k<2\pi/d$, что наблюдалось в эксперименте с цепочкой бозе-конденсатов [11].

Данная работа посвящена интерференции цепочки бозе-конденсатов, фазы которых коррелированы лишь частично. В разделе 2 изложена модель интерференции для предельных случаев полностью коррелированных и полностью некоррелированных фаз, и выполнен расчет для промежуточного случая частично коррелированных фаз. Раздел 3 посвящен экспериментам по интерференции конденсатов с флуктуирующими фазами. В разделе 4 предлагается метод термометрии для цепочки бозе-конденсатов на основе обнаруженного вклада флуктуаций фазы в пространственный спектр интерференции. Заключение представлено в разделе 5.

2. Модель интерференции для цепочки источников с произвольными фазами. В качестве модели рассмотрим цепочку локализованных волновых функций

$$\psi(z,t=0)=\sqrt{\frac{N}{\sigma\sqrt{2\pi}}}\sum_{j=1}^{K}e^{-(z-jd)^2/4\sigma^2}\,e^{i\varphi_j}, \qquad (1)$$

где $\sigma\ll d$, а цепочка длинная, т.е. $K\to\infty$. Соответствующая этой волновой функции плотность периодична – $|\psi(z+d)|^2=|\psi(z)|^2$. Ограничения на фазы

[1)]e-mail: turlapov@appl.sci-nnov.ru

φ_j в общем случае отсутствуют. Волновая функция (1) соответствует цепочке бозе-конденсатов в оптической решетке, показанной на рис. 1a, а сама волновая функция (1) приведена на рис. 1b.

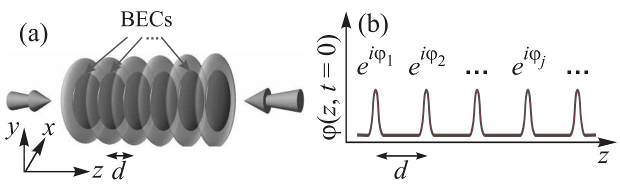

Рис. 1. (Цветной онлайн) (a) – Бозе-эйнштейновские конденсаты (БЭК – BECs) в оптической решетке непосредственно перед ее отключением, началом разлета и интерференции. Конденсаты показаны темно-красным, а интенсивность стоячей оптической волны – светло-сиреневым. (b) – Начальная волновая функция интерферирующих конденсатов – модуль периодичен, в то время как на разности фаз соседних конденсатов в общем случае нет ограничений

В случае равных фаз $\varphi_j = \mathrm{inv}(j)$ волновая функция (1) соответствует начальному условию эффекта Телбота. Применяя оператор эволюции в свободном пространстве $\exp(-i\hat{p}^2 t/(2M\hbar))$ для бозона массы M, можно найти волновую функцию в произвольный момент времени t и увидеть, что в любой момент времени $\psi(z,t)$ пространственно периодична с периодом d, а в моменты, кратные времени Телбота $T_d \equiv Md^2/\pi\hbar$, начальное распределение волновой функции восстанавливается, т.е. $\psi(z, t = nT_d) = \psi(z, t = 0)$, где $n \in \mathbb{N}$.

Рассмотрим другой предельный случай – фазы конденсатов φ_j полностью случайны относительно друг друга. В этом случае снова можно вычислить эволюцию волновой функции (1) в свободном пространстве, а затем рассчитать спектр распределения плотности

$$\tilde{n}_1(k,t) = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(z,t)|^2 e^{-ikz} dz. \tag{2}$$

В пределе длинной цепочки $K \to \infty$ спектр $\tilde{n}_1(k,t)$ имеет вид [11]

$$\tilde{n}_1(k,t) \propto \frac{2\pi}{d}\delta(k) + \frac{\sqrt{\pi K}}{2} e^{-k^2\sigma^2/2} \times \\ \times \sum_{j=-\infty,\, j\neq 0}^{\infty} e^{-(j-kdt/T_d\pi)^2 d^2/8\sigma^2} e^{i\varphi'_j}, \tag{3}$$

где φ'_j – случайные фазы, подчиняющиеся условию $\varphi'_j = -\varphi'_{-j}$. Благодаря условию $\sigma \ll d$, спектр (3) состоит из последовательности пиков, что видно, например, на рис. 2. В общем случае для произвольного

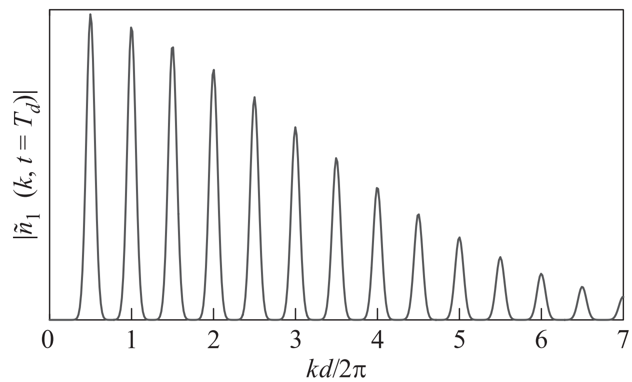

Рис. 2. (Цветной онлайн) Модуль спектра (3) при $t = T_d$. Основная гармоника при $k = \pi/d$ отвечает пространственному периоду $2d$

времени t спектр представляет собой сумму гармоник с волновыми векторами $k = j\pi T_d/(td)$, $j \in \mathbb{N}$, а само 1-мерное распределение концентрации $n_1(z,t)$ имеет пространственный период

$$\frac{2\pi}{k} = d\frac{2t}{T_d}. \tag{4}$$

Период линейно растет со временем. Интересно, что $n_1(z,t)$ периодична несмотря на случайное распределение фаз. Величина пространственного периода является качественным отличием от эффекта Телбота, в котором отсутствуют периоды длиннее, чем d.

Для промежуточного случая частично коррелированных фаз на данный момент аналитическое решение не известно. Эволюцию волновой функции (1) можно рассчитать численно. Модуль пространственного спектра, $|\tilde{n}_1(k)|$, вычисленный для $t = T_d$, показан на рис. 3. Можно видеть, что в спектре сочетаются черты как эффекта Телбота, так и интерференции некоррелированных источников. Узкий пик при $k = 2\pi/d$ соответствует частично сохраняющемуся эффекту Телбота, а широкие пики с центрами при $k = \pi/d$ и $k = 2\pi/d$ возникают из-за частичной разупорядоченности фаз. Расчет выполнен для $K = 51$ конденсата, отношения $\sigma/d = 0.1$, величины корреляции $\langle\cos(\varphi_{j+1} - \varphi_j)\rangle = 0.57$. Модуль спектра $|\tilde{n}_1(k, t = T_d)|$ усреднен по 100 повторениям.

3. Проявление флуктуаций фазы в эксперименте. Конденсация Бозе–Эйнштейна является предметом активных исследований [12–18], что во многом связано с развитием лазерного охлаждения и пленения [19–21].

Влияние флуктуаций фазы конденсатов на эффект Телбота наблюдалось в эксперименте [22]. Начальные условия близки рис. 1a. В минимумах оптического потенциала, отстоящих друг от друга на

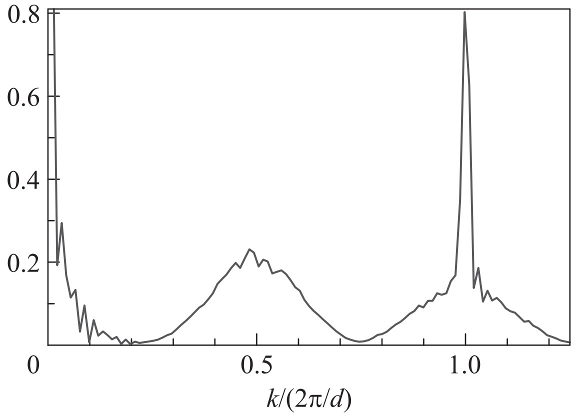

Рис. 3. (Цветной онлайн) Рассчитанный модуль спектра $|\tilde{n}_1(k, t = T_d)|$ при частичной корреляции. Величина корреляции $\langle\cos(\varphi_{j+1} - \varphi_j)\rangle = 0.57$ выбрана так, чтобы отношение высот узкого и широкого пиков при $k = 2\pi/d$ было близко к полученному в эксперименте, результат которого показан на рис. 5c

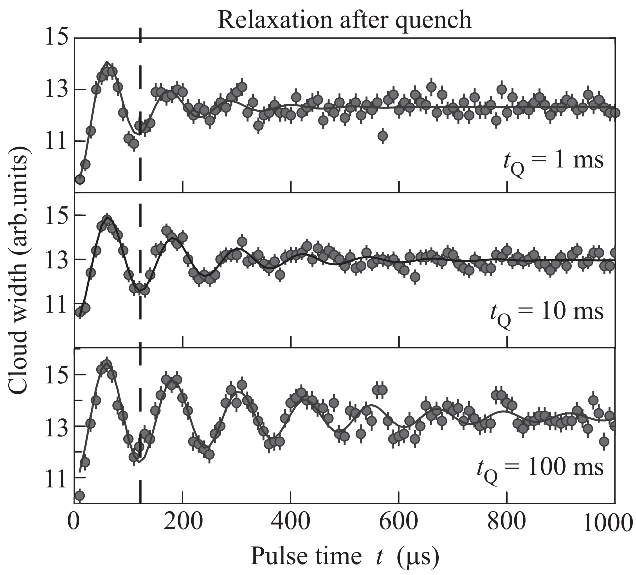

Рис. 4. (Цветной онлайн) Зависимость размера разлетевшегося облака от времени интерференции t. Меньшие значения параметра t_Q отвечают предыстории, способствующей флуктуациям. Из работы [22]

$d = 547$ нм, удерживаются бозе-конденсаты атомов ^{87}Rb. При $t = 0$ удержание вдоль z резко отключается, удержание в плоскости xy остается. Конденсаты расплываются и интерферируют вплоть до момента времени t, в который потенциал решетки резко восстанавливается. Для полностью когерентных конденсатов, при $\varphi_j = \varphi_{j+1}$, восстановление решетки при $t = nT_d$ приводило бы к точному восстановлению начального состояния конденсатов в решетке. Если же $t \neq nT_d$ или $\varphi_j \neq \varphi_{j+1}$, то частично населяются возбужденные зоны Блоха, и в результате восстановления решетки в систему, таким образом, вводится энергия. Для обнаружения ввода энергии система термализуется, затем пленение полностью отключается, и газ разлетается в свободном пространстве. Введенная энергия проявляется в более быстром разлете. Экспериментальная зависимость размера разлетевшегося облака от времени интерференции t показана на рис. 4. Три зависимости отвечают разной предыстории приготовления цепочки конденсатов. Графики сверху вниз расположены в порядке убывания флуктуации разности фаз конденсатов. На каждом из трех графиков можно видеть, что при $t = nT_d$ возникают локальные минимумы энергии, которые отвечают частичному восстановлению начальной волновой функции. В момент $t = T_d$ эксперимент с наименьшими флуктуациями (нижний график рис. 4) соответствует наименьшему вводу энергии при восстановлении исходного потенциала.

Качественное проявление флуктуаций фаз, состоящее в изменении пространственного спектра, обнаружено в работе [11]. Начальные условия соответствуют рис. 1a. Цепочка бозе-конденсатов молекул $^6\mathrm{Li}_2$ приготовлена в оптической решетке с расстоянием между минимумами $d = 5.3$ мкм. В каждом конденсате $N \sim 1000$ бозонов. В момент времени $t = 0$ пленяющее поле отключается и конденсаты расширяются в свободном пространстве, интерферируя друг с другом. Интерференция прекращается в момент t, в который происходит съемка, разрушающая квантовую систему. На рисунке 5a показана цепочка бозе-конденсатов при $t = 0$, в момент отключения оптической решетки. В спектре $|\tilde{n}_1(k, t = 0)|$ видна гармоника с волновым вектором $k = 2\pi/d$, соответствующая начальной модуляции. На рис. 5b, c показана система при $t = T_d$. Рисунок 5b соответствует меньшей, а рис. 5c большей флуктуации фазы. Для небольших флуктуаций фазы, на рис. 5b, можно видеть эффект Телбота – начальное распределение концентрации вдоль z восстанавливается почти точно. В спектре явно доминирует пик при $k = 2\pi/d$.

На снимке рис. 5c в спектре проявляется как частичная корреляция фаз, так и разупорядочение. О частичной корреляции свидетельствует узкий пик при $k = 2\pi/d$, отвечающий эффекту Телбота. О частичном разупорядочении фаз говорят уширенные пики вблизи $k = \pi/d$ и $k = 2\pi/d$.

Спектр с рис. 5c близок к расчетному $|\tilde{n}_1(k, T_d)|$, который показан на рис. 3. В эксперименте и расчете одинаковое отношение высот узкого и широкого

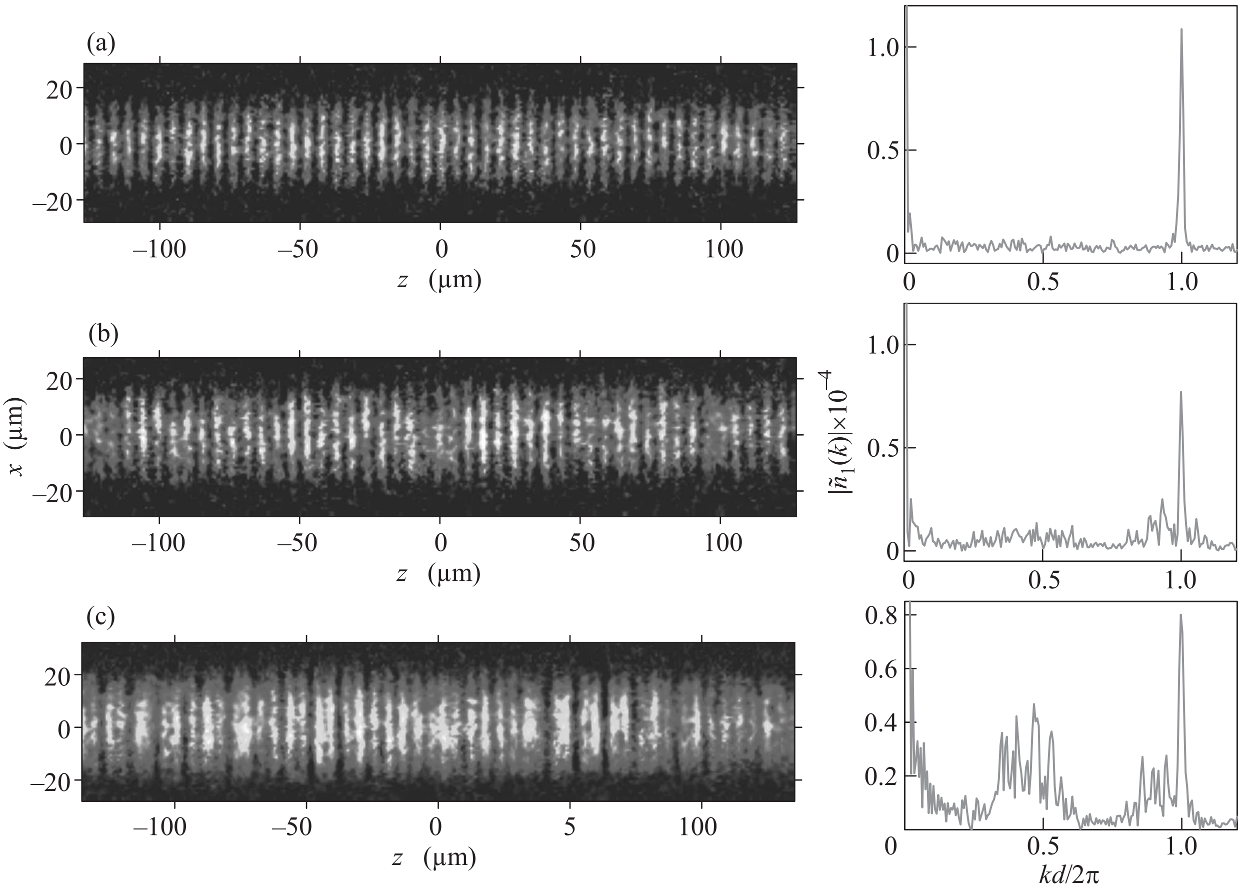

Рис. 5. (Цветной онлайн) Интерференция цепочек бозе-конденсатов в разные моменты времени и для разного уровня корреляций – снимки слева, и пространственные спектры $|\tilde{n}_1(k)|$ справа. (a) – При $t = 0$, в момент выпуска конденсатов из решетки. (b) – При $t = T_d$, для сильно коррелированных конденсатов. Виден эффект Телбота. (c) – При $t = T_d$, для конденсатов с меньшей степенью корреляции. Присутствует признак эффекта Телбота – узкий пик при $k = 2\pi/d$. Также видны признаки разупорядоченности фаз – широкие пики вблизи $k = \pi/d$ и $k = 2\pi/d$

пиков при $k = 2\pi/d$. Это отношение определяется величиной корреляции $\langle\cos(\varphi_{j+1} - \varphi_j)\rangle$. Таким образом, сравнение экспериментального и расчетного спектров позволяет установить $\langle\cos(\varphi_{j+1}-\varphi_j)\rangle$ в экспериментальной системе.

У экспериментального спектра рис. 5c и расчетного с рис. 3 два различия. Во-первых, спектр рис. 5c существенно более шумный. Это связано с тем, что представлен результат единичного эксперимента, в то время как в расчете $|\tilde{n}_1(k, t = T_d)|$ усреднен по 100 повторениям. Во-вторых, в эксперименте уширенные пики сдвинуты слегка влево, что связано со средним полем межбозонных взаимодействий [11], которое не учтено в расчете.

4. Термометрия для цепочки конденсатов на основе интерференции. Наиболее популярный метод термометрии бозе-конденсатов основан на подгонке профиля концентрации конденсата, либо после выпуска из ловушки и последующего разлета, либо непосредственно в ловушке. Двухкомпонентная (бимодальная) подгоночная функция позволяет определить N_0/N – отношение числа частиц в конденсате к полному числу. Температура в свою очередь определяется из уравнения

$$\frac{N_0}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^D, \tag{5}$$

где $D = 2$ или 3 – кинематическая размерность, $T_c(N, D)$ – температура бозе-конденсации. При малых T/T_c тепловая фракция мала, и температура неопределима. Например в работе [23] нижняя граница применимости указанного метода составила $T = T_c/2$. Для двух связанных конденсатов низкотемпературная термометрия достигнута на основе интерференции выпущенных из ловушки конденсатов [23, 24]. Температура определяется по флуктуации положения интерференционных полос в повторениях эксперимента. Метод требует неоднократного приготовления идентичных конденсатов и наблюдения интерференции.

Для цепочки конденсатов в оптической решетке температуру можно измерить в однократном интерференционном эксперименте. Температура может быть определена из пространственного спектра, подобного изображенному на рис. 5с. По соотношению пиков, отвечающих, соответственно, эффекту Телбота и некогерентной интерференции можно установить флуктуацию фаз соседних конденсатов $\langle(\varphi_{j+1} - \varphi_j)^2\rangle$. В свою очередь модель [25] позволяет установить связь между $\langle(\varphi_{j+1}-\varphi_j)^2\rangle$ и температурой T.

Применим модель [25] к цепочке бозе-конденсатов в оптической решетке с потенциалом

$$V_s(\mathbf{x}) = sE_{\rm rec}\left[1 - e^{-2ME_{\rm rec}(x^2+y^2)/(\hbar\lambda)^2}\cos^2\kappa z\right], \quad (6)$$

где $\mathbf{x} \equiv (x, y, z)$, κ – волновой вектор световой волны, $E_{\rm rec} = \hbar^2\kappa^2/2M$ – энергия отдачи фотона, s – безразмерная глубина, $\lambda \gg 1$ – степень анизотропии плоской ячейки. Период потенциала $d = \pi/\kappa$. Вблизи минимумов потенциал $V_s(\mathbf{x})$ гармонический с частотами $\omega_z \equiv 2\sqrt{s}E_{\rm rec}/\hbar$, $\omega_\perp = \omega_z/\lambda$. Описание конденсатов в каждой ячейке при помощи 1-частичных волновых функций позволяет перейти к джозефсоновскому гамильтониану [25]

$$\hat{H} = -\frac{E_{\rm c}}{4}\sum_{j=1}^{K}\frac{\partial^2}{\partial\varphi_j^2} - E_{\rm J}\sum_{j=1}^{K-1}\cos(\varphi_{j+1} - \varphi_j), \quad (7)$$

где $\hbar/E_{\rm J}$ – характерное время туннелирования, $E_{\rm c} = 2d\mu/dN$ и μ – характерная внутренняя энергия и химический потенциал одного конденсата, соответственно. Рассчитаем параметры для кинематически двумерного конденсата в решетке (6). Химический потенциал

$$\mu = \hbar\omega_\perp\sqrt{2N\frac{a_{\rm b}}{l_z}\sqrt{\frac{2}{\pi}}}, \quad (8)$$

где $l_z \equiv \sqrt{\hbar/(M\omega_z)}$, $a_{\rm b}$ – длина s-рассеяния бозонов. Предположим, что в кинематически двумерном бозе-конденсате волновая функция разделяется на радиальную и аксиальную часть $\Psi_j(\mathbf{x}) = \psi_j(z)\Psi(\boldsymbol{\rho})$, причем радиальная часть для всех конденсатов одинакова. Это позволяет записать $E_{\rm J}$ в виде [26]

$$E_{\rm J} = \frac{\hbar^2}{M}\left(\psi_j\frac{d\psi_{j+1}}{dz} - \psi_{j+1}\frac{d\psi_j}{dz}\right)\Bigg|_{z=(j+1/2)d}. \quad (9)$$

При условии $\mu \ll \hbar\omega_z$ волновые функции $\psi_j(z)$ можно приблизить слагаемыми суммы (1), причем $\sigma = l_z/\sqrt{2} = d/(\pi\sqrt{2\sqrt{s}})$. Прямое вычисление дает

$$E_{\rm J} = \frac{\hbar^2}{M}\frac{Nde^{-d^2/8\sigma^2}}{\sigma^3 2\sqrt{2\pi}} = \frac{\hbar^2}{Md^2}N\pi^2\sqrt{\pi}\sqrt{s\sqrt{s}}e^{-\pi^2\sqrt{s}/4}. \quad (10)$$

Стоит отметить, что использование гауссовых функций с шириной σ заужает волновую функцию конденсата и, таким образом, дает оценку $E_{\rm J}$ снизу, которая приближается к точному значению с ростом глубины s.

Рассмотрим случай малых квантовых флуктуаций фазы. Квантовая часть флуктуаций вычисляется из гамильтониана (7) при $T = 0$, что дает условие ее малости

$$\langle(\varphi_{j+1} - \varphi_j)^2\rangle = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{E_{\rm c}}{E_{\rm J}}} \ll 1. \quad (11)$$

Также предположим, что тепловые флуктуации доминируют. В этом случае [25]

$$\langle\cos(\varphi_j - \varphi_l)\rangle = \alpha^{|j-l|}, \quad (12)$$

где α – функция температуры, задаваемая выражением [25, 24]

$$\alpha(T) = \frac{I_1(E_{\rm J}/T)}{I_0(E_{\rm J}/T)}, \quad (13)$$

а I_ν – модифицированная функция Бесселя. Выражение (12) упрощается при условии $T \ll E_{\rm J}$:

$$\langle(\varphi_j - \varphi_l)^2\rangle = |j - l|\frac{T}{E_J}. \quad (14)$$

Выражение (12) и его частный случай (14) устанавливают связь между температурой и флуктуациями фаз конденсатов в пренебрежении квантовыми флуктуациями. Таким образом, формулы (12), (14) совместно с анализом спектров, подобных приведенным на рис. 3 и 5, могут служить основой для термометрии.

5. Заключение. Частичное разупорядочивание фаз источников приводит к изменению в эффекте Телбота. Количественно это выражается в уменьшении контраста интерференции. Качественное изменение состоит в появлении новых пиков в пространственном спектре интерференции. Эти изменения пространственного спектра могут быть использованы для термометрии.

В. Б. Махалов благодарит за финансовую поддержку Российский Фонд Фундаментальных Исследований, гранты # 15-02-08464 и 18-42-520024. А. В. Турлапов благодарит Российский научный фонд, грант # 18-12-00002.

1. H. F. Talbot, Phil. Mag. **6**, 401 (1836).
2. N. Saiga and Y. Ichioka, Appl. Opt. **24**(10), 1459 (1985).
3. А. Н. Морозов, М. П. Крикунова, Б. Г. Скуйбин, Е. В. Смирнов, Письма в ЖЭТФ **106**(1), 26 (2017).
4. M. S. Chapman, Ch. R. Ekstrom, T. D. Hammond, J. Schmiedmayer, B. E. Tannian, S. Wehinger, and D. E. Pritchard, Phys. Rev. A **51**, R14 (1995).
5. V. L. Bratman, G. G. Denisov, N. S. Ginzburg, B. D. Kol'chugin, N. Y. Peskov, S. V. Samsonov, and A. B. Volkov, IEEE Transactions on Plasma Science **24**(3), 744 (1996).
6. T. G. A. Verhoeven, W. A. Bongers, V. L. Bratman, M. Caplan, G. G. Denisov, C. A. J. van der Geer, P. Manintveld, A. J. Poelman, J. Plomp, A. V. Savilov, P. H. M. Smeets, A. B. Sterk, and W. H. Urbanus, IEEE Transactions on Plasma Science **27**(4), 1084 (1999).
7. W. Zhang, C. Zhao, J. Wang, and J. Zhang. Opt. Express **17**(22), 19757 (2009).
8. S. Mansfeld, J. Topp, K. Martens, J. N. Toedt, W. Hansen, D. Heitmann, and S. Mendach, Phys. Rev. Lett. **108**, 047204 (2012).
9. D. S. Petrov, G. V. Shlyapnikov, and J. T. M. Walraven, Phys. Rev. Lett. **87**, 050404 (2001).
10. R. M. Bradley and S. Doniach, Phys. Rev. B **30**, 1138 (1984).
11. V. Makhalov and A. Turlapov, Phys. Rev. Lett. **122**, 090403 (2019).
12. I. Bloch, J. Dalibard, and W. Zwerger, Rev. Mod. Phys. **80**(3), 885 (2008).
13. Л. В. Ильичев, П. Л. Чаповский, Квантовая электроника **47**(5), 463 (2017).
14. Ю. В. Лиханова, С. Б. Медведев, М. П. Федорук, П. Л. Чаповский, Квантовая электроника **47**(5), 484 (2017).
15. В. П. Рубан, Письма в ЖЭТФ **108**, 638 (2018).
16. F. Dalfovo, R. N. Bisset, C. Mordini, G. Lamporesi, and G. Ferrari, ЖЭТФ **154**, 949 (2018).
17. С. Стрингари, ЖЭТФ **154**, 964 (2018).
18. В. М. Порозова, В. А. Пивоваров, Л. В. Герасимов, Д. В. Куприянов, Письма в ЖЭТФ **108**, 726 (2018).
19. V. I. Balykin, V. G. Minogin, and V. S. Letokhov, Rep. Progr. Phys. **63**(9), 1429 (2000).
20. Р. Онофрио, УФН **186**(11), 1229 (2016) [R. Onofio, Phys. Usp. **59**, 1129 (2016)].
21. О. Н. Прудников, А. В. Тайченачев, В. И. Юдин, Квантовая электроника **47**(5), 438 (2017).
22. B. Santra, Ch. Baals, R. Labouvie, A. B. Bhattacherjee, A. Pelster, and H. Ott, Nature Comm. **8**, 15601 (2017).
23. R. Gati, B. Hemmerling, J. Fölling, M. Albiez, and M. K. Oberthaler, Phys. Rev. Lett. **96**, 130404 (2006).
24. R. Gati, J. Esteve, B. Hemmerling, T. B. Ottenstein, J. Appmeier, A. Weller, and M. K. Oberthaler, New J. Phys. **8**(9), 189 (2006).
25. L. Pitaevskii and S. Stringari, Phys. Rev. Lett. **87**, 180402 (2001).
26. P. Pedri, L. Pitaevskii, S. Stringari, C. Fort, S. Burger, F. S. Cataliotti, P. Maddaloni, F. Minardi, and M. Inguscio, Phys. Rev. Lett. **87**, 220401 (2001).