

# Квантово-оптический модовый затвор для неклассического сжатого света

В. В. Сухарников<sup>+1)</sup>, О. В. Тихонова<sup>+\*</sup>

<sup>+</sup>Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Физический факультет, 119991 Москва, Россия

<sup>\*</sup>Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,  
Научно-исследовательский институт ядерной физики им. Д. В. Скобельцына, 119234 Москва, Россия

Поступила в редакцию 6 марта 2019 г.

После переработки 20 марта 2019 г.

Принята к публикации 20 марта 2019 г.

В формализме мод Шмидта и операторов фотонов в этих модах разработан теоретический подход для описания спектральных свойств света, получаемого в нелинейном процессе генерации суммарной частоты. Детально описан особый режим, при котором частотные корреляции фотонов в выходных пучках подавляются. В данном режиме продемонстрировано управление модовым составом и спектральными свойствами неклассического сжатого света, использованного в качестве подсветки сигнального канала, с возможностью генерации сжатого вакуума в моде суммарной частоты.

DOI: 10.1134/S0370274X19090030

**1. Введение.** Неклассические состояния света имеют ряд замечательных квантовых свойств, которые находят широкое применение в быстро развивающихся современных областях физики. Для решения задач в области квантовых измерений крайне перспективными оказываются так называемые сжатые состояния света [1, 2]. Под “сжатием” понимается уменьшение неопределенности одной квадратуры поля по сравнению с вакуумной, что сопровождается увеличением неопределенности в сопряженной ей квадратуре. Для задач в области квантовой информации, в свою очередь, очень важны перепутанные состояния фотонов [3–5]. При этом именно в ярких сжатых состояниях света имеет место сильная скоррелированность большого числа фотонов друг с другом.

Основной способ генерации сжатых неклассических световых полей – нелинейные оптические процессы, например, квадратично нелинейный процесс параметрического рассеяния (PDC – *parametric down-conversion*) [6, 7]. В процессе PDC поле накачки взаимодействует со средой с квадратичной нелинейностью. В результате рождаются сигнальный и холостой фотоны меньшей частоты на выходе кристалла. Интерес также представляет процесс генерации суммарной частоты (SFG – *sum-frequency generation*), для которого помимо накачки нужна еще подсветка в сигнальном канале.

Для генерируемых ярких сжатых световых полей характерны сильная перепутанность фотонов друг с другом и существенно многомодовый спектральный состав. Эти особенности затрудняют теоретический анализ таких состояний света. Наиболее удобно проводить теоретический анализ таких состояний в базисе так называемых широкополосных мод Шмидта [8–10, 12]. В работах [13, 14] нелинейное взаимодействие анализировалось в терминах операторов рождения фотонов в модах Шмидта. В [8, 10] в представлении Гейзенберга были решены уравнения для таких операторов, что позволило теоретически предсказать целый ряд важных эффектов, обнаруженных экспериментально. Одной из важных проблем, не решенных на сегодняшний день, является контролируемое изменение относительных весов мод Шмидта, характеризующих генерируемый сигнал, что фактически означает ослабление сигнала в одной или нескольких модах. Также возникает необходимость поиска способов управления спектральными свойствами неклассического сжатого света, которые бы сохранили его квантовые свойства. Это достаточно нетривиальная задача, так как сжатое состояние света очень хрупкое, поэтому при использовании обычных оптических приборов оно разрушится из-за вносимых потерь и шумов. В связи с этим необходимы квантово-оптические методы, позволяющие контролируемо изменять модовый и спектральный состав сжатого света.

<sup>1)</sup>e-mail: sukharnikov.vv14@physics.msu.ru

В данной работе предлагается метод такого управления, основанный на особом режиме процесса генерации суммарной частоты с подсветкой сжатым светом. Разработан теоретический подход для квантового описания процесса генерации суммарной частоты в терминах мод Шмидта и операторов фотонов в этих модах. В рамках данного подхода за рамками теории возмущений анализируется схема, во многом аналогичная квантовому светоделителю, предложенному в [11, 12]. Для данной схемы обнаружена возможность блокировки одной из мод Шмидта подсвечивающего сжатого вакуума. Продемонстрировано, что эффект частичной или полной блокировки сигнала в одной из мод Шмидта приводит к значительному перераспределению относительных весов входящих мод Шмидта. На основе этого эффекта впервые продемонстрирована возможность существенного изменения спектрального и временного профилей сигнала сжатого вакуума на выходе.

**2. Генерация суммарной частоты.** Рассмотрим первоначально процесс генерации суммарной частоты. Пусть на кристалл с квадратично нелинейной восприимчивостью  $\chi^{(2)}(\mathbf{r})$  падает два световых сигнала: поле накачки  $E_p$  и поле подсветки  $E_s$  в сигнальном канале. На выходе будет преобразованная подсветка и сгенерированный сигнал суммарной частоты  $E_o$ . Такому квадратично нелинейному оптическому процессу соответствует следующий гамильтониан:

$$H \sim \int d\mathbf{r} \chi^{(2)} E_p^{(+)}(\mathbf{r}, t) E_s^{(+)}(\mathbf{r}, t) E_o^{(-)}(\mathbf{r}, t) + h.c. \quad (1)$$

Поле накачки будем считать классическим. Амплитуду поля накачки обозначим как  $E_0$ , а нормированное спектральное распределение через  $\Phi(\omega)$ . Считаем, что спектр накачки ограничен, центрирован на частоте  $\omega_p$  и имеет характерную ширину  $\sigma$ . В свою очередь, для квантованных полей сигнала и суммарной частоты используем разложение по плоским волнам:

$$E_s^{(+)}(\mathbf{r}, t) = \int d\mathbf{k}_s C_{\mathbf{k}_s} e^{+i(\mathbf{k}_s \mathbf{r} - \omega_s t)} a_{\mathbf{k}_s}, \quad (2)$$

$$E_o^{(-)}(\mathbf{r}, t) = \int d\mathbf{k}_o C_{\mathbf{k}_o} e^{-i(\mathbf{k}_o \mathbf{r} - \omega_o t)} a_{\mathbf{k}_o}^\dagger. \quad (3)$$

Пусть поле сигнала также центрировано на частоте  $\omega_p$ , как и поле накачки (вырожденный режим). Однако отметим, что они имеют разные поляризации: поле накачки имеет обыкновенную поляризацию, а сигналы в сигнальном канале и канале суммарной частоты – необыкновенную [11]. Рассмотрим

коллинейное распространение полей (т.е. пренебрегаем поперечными компонентами волновых векторов), что позволяет заменить интеграл по пространству волновых векторов на интеграл по частотам в (2) и (3).

Считаем, что на длине кристалла  $L$  восприимчивость слабо зависит от пространственной переменной, т.е.  $\chi^{(2)}(\mathbf{r}) \approx \chi_0^{(2)}$ . С учетом закона сохранения энергии, при котором фотон накачки с частотой  $\omega$  и сигнальный фотон частоты  $\omega_s$  рождает фотон суммарной частоты  $\omega_o = \omega_s + \omega$ , гамильтониан (1) приводится к виду:

$$H = i\hbar\Gamma \int d\omega_s d\omega_o F(\omega_s, \omega_o) a_{\omega_s} a_{\omega_o}^\dagger + h.c., \quad (4)$$

где  $\Gamma \sim \chi_0^{(2)} E_0 \cdot L$  – эффективная константа взаимодействия внутри кристалла,  $L$  – длина кристалла, а  $F(\omega_s, \omega_o)$  – бифотонная амплитуда рассматриваемого процесса, имеющая вид:

$$F(\omega_s, \omega_o) = C \Phi(\omega_s - \omega_o) \text{sinc} \left( \frac{\Delta k_z L}{2} \right), \quad (5)$$

где  $C$  – постоянная нормировки, а  $\Delta k_z = k_p(\omega_p) + k_s(\omega_s) - k_o(\omega_o)$  – расстройка волновых векторов внутри кристалла. Считая, что нулевой порядок за нуляется настройкой кристалла, главная часть расстройки имеет вид:

$$\Delta k_z \approx [k'_p(\omega_p) - k'_o(2\omega_p)] \cdot (\omega_o - 2\omega_p). \quad (6)$$

Аппроксимируя функцию  $\text{sinc}$  гауссианой [9], приведем бифотонную амплитуду (5) к виду:

$$F(\omega_s, \omega_o) = C \Phi(\omega_s - \omega_o) \exp \left[ -\frac{(\omega_o - 2\omega_p)^2}{2A^2} \right], \quad (7)$$

где спектральная ширина  $A$ :

$$A \sim \frac{1}{L \cdot |k'_p(\omega_p) - k'_o(2\omega_p)|} \quad (8)$$

имеет физический смысл обратного времени группового запаздывания внутри кристалла (так как производная волнового вектора есть обратная групповая скорость пакета), и зависит только от характеристик кристалла и его дисперсионных свойств. Заметим, что структура бифотонной амплитуды (7) показывает частотное перепутывание фотонов на выходе, поскольку отсутствует частотная факторизация относительно  $\omega_o$  и  $\omega_s$ . Однако в случае широкого спектра накачки  $\sigma \gg A$  происходит частотная факторизация (рис. 1), поскольку значения  $\omega_o$  находятся в очень узкой окрестности  $2\omega_p$ :

$$F(\omega_s, \omega_o) \approx \frac{1}{\sqrt{\pi}A^2} \Phi(\omega_s) \exp \left[ -\frac{(\omega_o - 2\omega_p)^2}{2A^2} \right]. \quad (9)$$

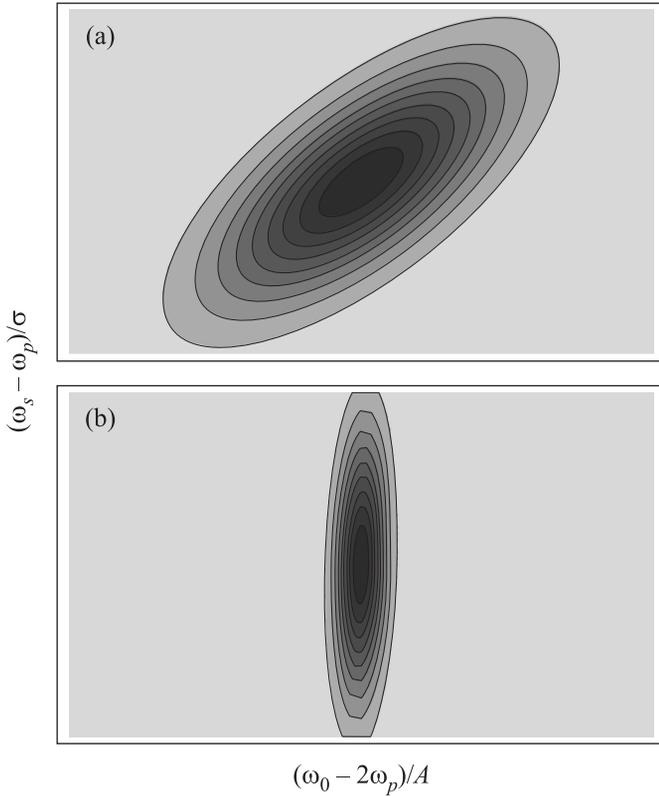


Рис. 1. (Цветной онлайн) Профили бифотонной амплитуды  $F(\omega_s, \omega_o)$ . (a) – В обычном режиме. (b) – В режиме  $A \ll \sigma$ . Поворот и сужение профиля говорит о подавлении частотных корреляций между сигналами на выходе кристалла

С физической точки зрения условие  $\sigma \gg A$  налагает ограничения на ширину группового синхронизма:

$$L \cdot \left| \frac{1}{v_p(\omega_p)} - \frac{1}{v_o(2\omega_p)} \right| \gg \tau, \quad (10)$$

где  $v_p(\omega_p) = 1/k'_p(\omega_p)$  и  $v_o(2\omega_p) = 1/k'_o(2\omega_p)$ , а  $\tau = 1/\sigma$  – характерная длительность накачки.

Отметим, что в рамках рассматриваемого режима  $\sigma \gg A$  в бифотонной амплитуде (9) множитель с суммарной частотой всегда имеет такой вид и определяется только настройкой кристалла, а частотный множитель фотонов подсветки определяется спектром накачки.

Подставим это выражение в гамильтониан (4) и определим широкополосные спектральные операторы моды суммарной частоты и сигнальной моды соответственно:

$$C = \frac{1}{\sqrt{4\pi A^2}} \int d\omega_o \exp \left[ -\frac{(\omega_o - 2\omega_p)^2}{2A^2} \right] a_{\omega_o}, \quad (11)$$

$$D = \int d\omega_s \Phi(\omega_s) a_{\omega_s}, \quad (12)$$

которые удовлетворяют стандартным коммутационным соотношениям  $[C, C^\dagger] = [D, D^\dagger] = 1$ , причем операторы разных мод коммутируют между собой  $[C, D^\dagger] = 0$ . Гамильтониан (4) переписывается в виде:

$$H = i\hbar\Gamma(C^\dagger D - D^\dagger C). \quad (13)$$

Отметим, что такой вид гамильтониана совпадает с гамильтонианом квантового светоделителя.

Изучим преобразование операторов сигнальной моды (12) и моды суммарной частоты (11) в результате взаимодействия в кристалле, для чего используем картину Гейзенберга. Начальные состояния операторов (до взаимодействия) будем обозначать приставкой *in* (оно будет отвечать значению соответствующего оператора в картине Шредингера), после взаимодействия – приставкой *out*. Все средние значения наблюдаемых рассчитываются по состоянию, которое представляет собой тензорное произведение:

$$|\Psi\rangle = |\psi\rangle_s \otimes |0\rangle_o, \quad (14)$$

где  $|0\rangle_o$  – вакуум для моды суммарной частоты, а  $|\psi\rangle_s$  – квантовое состояние фотонов поля подсветки на входе кристалла.

Решение уравнений Гейзенберга, дающее преобразование операторов в результате взаимодействия, можно записать в матричном виде, который совпадает с матрицей светоделителя [1]:

$$\begin{pmatrix} C^{\text{out}} \\ D^{\text{out}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \Theta & \sin \Theta \\ -\sin \Theta & \cos \Theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C^{\text{in}} \\ D^{\text{in}} \end{pmatrix}, \quad (15)$$

где  $\Theta = \int dt\Gamma$  – параметр, зависящий от амплитуды накачки, который, следуя аналогии, будем называть углом светоделителя.

Из структуры гамильтониана (13) видна динамика нелинейного процесса: фотоны в сигнальной моде уничтожаются, что сопровождается рождением фотонов в моде суммарной частоты.

Введем наблюдаемые операторы числа фотонов в моде суммарной частоты  $N_C = C^\dagger C$  и в сигнальной моде  $N_D = D^\dagger D$ . Вначале отметим, что динамика системы будет происходить таким образом, что суммарное число фотонов, задействованное во взаимодействии, не изменяется, т.е.  $[H, N_C + N_D] = 0$ , и следовательно:

$$\langle N_C^{\text{in}} + N_D^{\text{in}} \rangle = \langle N_C^{\text{out}} + N_D^{\text{out}} \rangle, \quad (16)$$

– интеграл движения. Средние значения наблюдаемых операторов числа фотонов в широкополосных модах вычисляются как:

$$\langle N_C^{\text{out}} \rangle = \sin^2 \Theta \cdot \langle N_D^{\text{in}} \rangle, \quad (17)$$

$$\langle N_D^{\text{out}} \rangle = \cos^2 \Theta \cdot \langle N_D^{\text{in}} \rangle. \quad (18)$$

Таким образом, в случае вакуума в моде суммарной частоты и отсутствия подсветки в сигнальную моду, процесс генерации суммарной частоты не происходит. При наличии подсветки сигнала, та ее часть, которая перекрывается только с частотной сигнальной модой  $\Phi(\omega)$ , участвует во взаимодействии, частично или полностью конвертируясь в моду суммарной частоты. Полная конвертация отвечает случаю  $\Theta = (k + 1/2)\pi$ , где  $k$  – целое число. Тогда в перекрывающейся части подсветки образуется вакуум, и все фотоны переводятся в суммарную частоту. Такая схема называется квантово-оптическим модовым затвором [11, 12]. Чтобы получить конкретные результаты, нужно задать квантовое состояние подсветки.

**3. Подсветка сжатым светом в модах Шмидта.** Выберем в качестве подсветки неклассический сжатый свет, сгенерированный в результате процесса параметрического рассеяния в вырожденном коллинеарном случае. Квантовое состояние подсветки представляет собой сжатый вакуум и задается как [10]:

$$|\psi\rangle_s = S(G)|0\rangle, \quad (19)$$

где  $S(G)$  – оператор сжатия, зависящий от параметра сжатия  $G$ :

$$S(G) = \exp \left\{ G \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{\lambda_n} (A_n^{\dagger 2} - A_n^2) \right\}. \quad (20)$$

Здесь  $A_n$  – операторы в модах Шмидта,  $\sqrt{\lambda_n}$  – собственные значения Шмидта [8, 10]. Операторы в модах Шмидта определены как:

$$A_n = \int d\omega_s u_n(\omega_s) a_{\omega_s}, \quad (21)$$

где  $u_n(\omega_s)$  – функции Эрмита–Гаусса, и операторы Шмидта удовлетворяют коммутационным соотношениям  $[A_n, A_m^{\dagger}] = \delta_{nm}$ .

Вычислим средние значения операторов числа фотонов в каждой моде Шмидта на входе в кристалл SFG:

$$\langle A_n^{\text{in}\dagger} A_n^{\text{in}} \rangle = \sinh^2 \left( 2G\sqrt{\lambda_n} \right). \quad (22)$$

Полевые квадратуры для каждой моды Шмидта  $X_n = \frac{A_n + A_n^{\dagger}}{\sqrt{2}}$  и  $P_n = \frac{A_n - A_n^{\dagger}}{\sqrt{2}i}$  имеют следующие дисперсии [1]:

$$D[X_n^{\text{in}}] = \frac{1}{2} \exp \left( +4G\sqrt{\lambda_n} \right), \quad (23)$$

$$D[P_n^{\text{in}}] = \frac{1}{2} \exp \left( -4G\sqrt{\lambda_n} \right), \quad (24)$$

– дисперсия одной квадратуры меньше вакуумной, а другая превышает ее (в зависимости от знака  $G$ ) таким образом, что произведение этих дисперсий дает  $1/4$ .

Полное спектральное распределение определяется как сумма произведений веса каждой моды Шмидта на квадрат модуля соответствующей функции Эрмита–Гаусса:

$$\mathcal{N}^{\text{in}}(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} |u_n(\omega)|^2 \Lambda_n^{\text{in}}, \quad (25)$$

где  $\Lambda_n^{\text{in}}$  – относительный вес  $n$ -й моды в in-состоянии, т.е. вероятность обнаружить ее:

$$\Lambda_n^{\text{in}} = \frac{\langle A_n^{\text{in}\dagger} A_n^{\text{in}} \rangle}{\sum_{k=0}^{\infty} \langle A_k^{\text{in}\dagger} A_k^{\text{in}} \rangle}. \quad (26)$$

На рисунке 2 представлено распределение весов мод Шмидта (26) и спектральный сигнал яркого сжато-

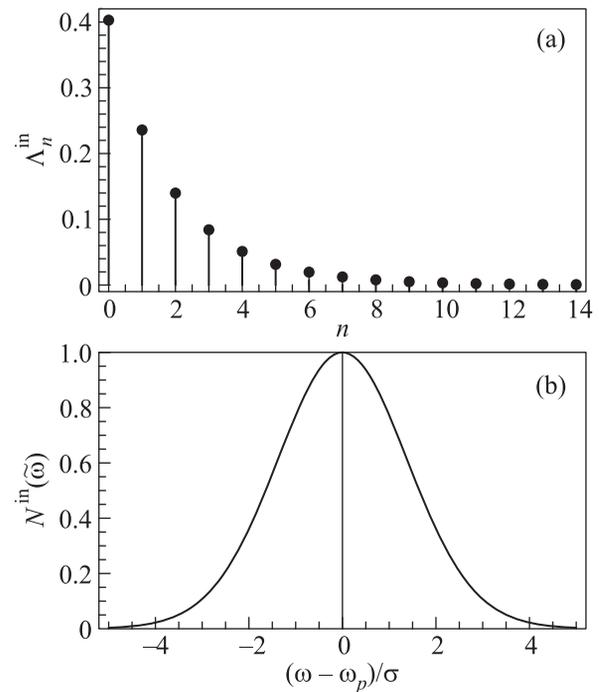


Рис. 2. Распределение весов мод Шмидта (а) и нормированный на максимум спектральный сигнал (б) яркого сжатого вакуума, рассчитанные для вырожденного параметрического рассеяния на длине волны 800 нм в кристалле ВВО длиной  $L = 3$  мм при длительности импульса накачки 1 пс и коэффициенте параметрического усиления 11 ( $G = 25$ ). Частота отсчитывается от центра спектра накачки для процесса SFG в единицах ее спектральной ширины  $\sigma$

го вакуума (25), рассчитанные для типичных значений реальных параметров эксперимента по вынужденному параметрическому рассеянию света в режиме большого усиления [15].

Подсветим кристалл, в котором проходит процесс генерации суммарной частоты в режиме подавления частотных корреляций, неклассическим сжатым светом, состояние которого определено в (19).

Рассмотрим случай, когда спектр сигнальной моды полностью совпадает с какой-либо  $n$ -й модой Шмидта подсветки, т.е.  $\Phi(\omega) \equiv u_n(\omega)$ . В этом случае мы можем отождествить операторы  $D$  и  $A_n$ . Так как операторы несовпавших мод коммутируют с гамильтонианом, то они никак не преобразуются. Совпавшая мода преобразуется согласно уже полученному решению (15):

$$A_n^{\text{out}} = A_n^{\text{in}} \cos \Theta - C^{\text{in}} \cos \Theta, \quad (27)$$

что дает число фотонов в этой моде на выходе из кристалла:

$$\langle A_n^{\text{out}\dagger} A_n^{\text{out}} \rangle = \cos^2 \Theta \cdot \sinh^2 (2G\sqrt{\lambda_n}), \quad (28)$$

а число фотонов в моде суммарной частоты, согласно (15):

$$\langle C^{\text{out}\dagger} C^{\text{out}} \rangle = \sin^2 \Theta \cdot \sinh^2 (2G\sqrt{\lambda_n}). \quad (29)$$

Частичная (или полная конвертация) совпавшей моды Шмидта приводит к перераспределению весов мод (26):

$$\Lambda_m^{\text{out}} = \frac{\langle A_m^{\text{out}\dagger} A_m^{\text{out}} \rangle}{\sum_{k=0}^{\infty} \langle A_k^{\text{out}\dagger} A_k^{\text{out}} \rangle}. \quad (30)$$

При углах светоделителя, равных  $\pi(k + 1/2)$  (где  $k$  – целое число), совпавшая мода полностью конвертируется в сигнал суммарной частоты, т.е. после взаимодействия в этой моде образуется вакуум, без какого-либо влияния на другие моды. В этом и заключается принцип действия квантово-оптического модового затвора. Важно отметить, что зануление веса какой-нибудь моды Шмидта сопровождается перераспределением весов остальных мод, что позволяет управлять вкладами мод Шмидта. Изменение вкладов мод Шмидта позволяет манипулировать спектром выходного сигнала. Этот эффект носит существенный характер, что демонстрируется на рис. 3 на примере блокирования нулевой моды Шмидта из подсветки. На центральной частоте образуется “впадина” (по сравнению с рис. 2), соответствующая обнулению вклада нулевой моды Шмидта.

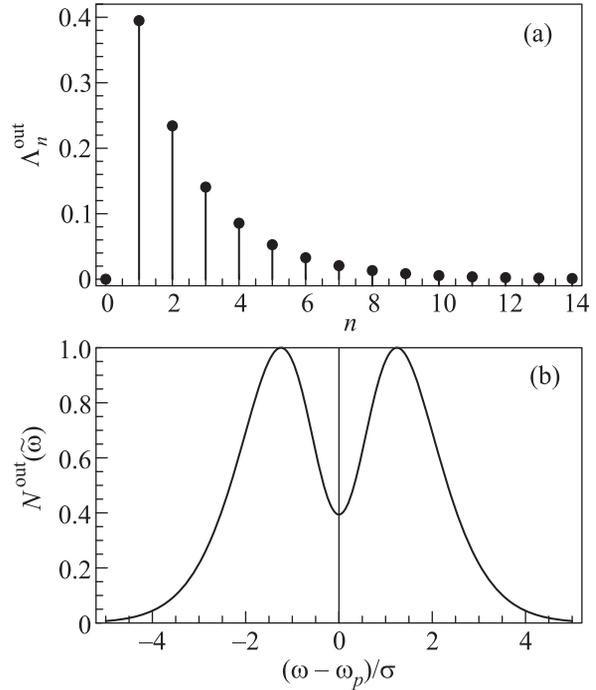


Рис. 3. Полное блокирование нулевой моды Шмидта из подсветки. (a) – Перенормировка весов  $\Lambda_n^{\text{out}}$  вследствие блокирования фотонов из нулевой моды. (b) – Соответствующее изменение нормированного на максимум распределения частотного сигнала на выходе  $N^{\text{out}}(\omega)$

Изучим, что происходит с дисперсиями квадратур совпавшей моды Шмидта. В общем случае дисперсии будут уже отвечать не идеальному сжатию (сжатому вакууму), которое было до взаимодействия, а имеют следующие значения:

$$D[X_n^{\text{out}}] = \frac{1}{2} \cdot \left\{ \sin^2 \Theta + \cos^2 \Theta \cdot e^{+4G\sqrt{\lambda_n}} \right\}, \quad (31)$$

$$D[P_n^{\text{out}}] = \frac{1}{2} \cdot \left\{ \sin^2 \Theta + \cos^2 \Theta \cdot e^{-4G\sqrt{\lambda_n}} \right\}. \quad (32)$$

Пусть  $G > 0$ . При значениях угла светоделителя  $\pi(k + 1/2)$  дисперсии квадратур соответствуют значениям для вакуума, что отражает факт полной конвертации из данной моды в моду суммарной частоты. В промежуточных значениях угла дисперсия координатной квадратуры превышает вакуумную, а для импульсной квадратуры – меньше вакуумной. Таким образом, свет остается сжатым, однако произведение дисперсий может теперь превышать 1/4:

$$D[X_n^{\text{out}}] \cdot D[P_n^{\text{out}}] = \frac{1}{4} + \sinh^2 (G\sqrt{\lambda_n}) \frac{\sin^2 2\Theta}{4}. \quad (33)$$

Заметим, что для дисперсий квадратур  $X_C$  и  $P_C$  моды суммарной частоты можно получить следующие значения:

$$D [X_C^{\text{out}}] = \frac{1}{2} \cdot \left\{ \cos^2 \Theta + \sin^2 \Theta e^{+4G\sqrt{\lambda_n}} \right\}, \quad (34)$$

$$D [P_C^{\text{out}}] = \frac{1}{2} \cdot \left\{ \cos^2 \Theta + \sin^2 \Theta e^{-4G\sqrt{\lambda_n}} \right\}, \quad (35)$$

следовательно, сигнал суммарной частоты также является сжатым. При углах полной конвертации  $\pi(k + 1/2)$  свет в моде суммарной частоты является сжатым вакуумом. То есть, предложенная схема может рассматриваться как конвертер по частоте для сжатого вакуума.

**4. Заключение.** Таким образом, на основе формализма мод Шмидта был разработан теоретический подход для описания частотных свойств света, получаемого в процессе генерации суммарной частоты, за рамками теории возмущений. Проанализировано влияние спектра накачки на свойства полей, участвующих в процессе генерации суммарной частоты, а также выделен особый режим подавления частотных корреляций фотонов в выходных пучках. Этот режим пригоден для управления модовым составом сжатого света в модах Шмидта в случае его использования в качестве подсветки для процесса генерации суммарной частоты. Фактически, рассмотренная схема квантово-оптического затвора позволяет управлять модовым составом яркого сжатого света, варьировать веса входящих мод Шмидта, а также контролируемым образом изменять спектральный и временной сигнал сжатого света за счет вовлечения определенной моды Шмидта в процесс суммарной частоты. Замечательно то, что свет не только остается сжатым, но и генерируемый свет в моде суммарной частоты также является сжатым, причем в

случае полной конвертации, оказывается сжатым вакуумом.

Исследование выполнено за счет гранта Российского Научного Фонда, проект # 19-42-04105.

1. M. O. Scully and M. S. Zubairy, *Quantum Optics*, Cambridge U.P., N.Y. (1997).
2. N. Corzo, A. M. Marino, K. M. Jones, and P. D. Lett, *Opt. Express*. **19**, 21358 (2011).
3. G. Brida, L. Caspani, A. Gatti, M. Genovese, A. Meda, and I. R. Berchera, *Phys. Rev. Lett.* **102**, 213602 (2009).
4. N. Agafonov, M. V. Chekhova, and G. Leuchs, *Phys. Rev. A* **82**, 011801 (2010).
5. B. Brecht, D. V. Reddy, C. Silberhorn, and M. G. Raymer, *Phys. Rev. X* **5**, 041017 (2015).
6. T. Iskhakov, M. V. Chekhova, and G. Leuchs, *Phys. Rev. Lett.* **102**, 183602 (2009).
7. K. Yu. Spasibko, T. Sh. Iskhakov, and M. V. Chekhova, *Opt. Express*. **20**, 7507 (2012).
8. S. Lemieux, M. Manceau, P. Sharapova, O. V. Tikhonova, R. W. Boyd, G. Leuchs, and M. V. Chekhova, *Phys. Rev. Lett.* **117**, 183601 (2016).
9. M. V. Fedorov, Yu. M. Mikhailova, and P. A. Volkov, *J. Phys. B: At. Mol. Opt.* **42**, 175503 (2009).
10. P. Sharapova, O. V. Tikhonova, S. Lemieux, R. W. Boyd, and M. V. Chekhova, *Phys. Rev. A* **97**, 053827 (2018).
11. A. Eckstein, B. Brecht, and C. Silberhorn, *Opt. Express*. **19**, 13770 (2011).
12. B. Brecht, A. Eckstein, A. Christ, H. Suche, and C. Silberhorn, *New J. Phys.* **13**, 065029 (2011).
13. A. Christ, K. Laiho, A. Eckstein, K. N. Cassemiro, and C. Silberhorn, *New J. Phys.* **13**, 033027 (2011).
14. A. Eckstein, A. Christ, P. J. Mosley, and C. Silberhorn, *Phys. Rev. Lett.* **106**, 013603 (2011).
15. T. Iskhakov, A. Pérez, K. Spasibko, M. Chekhova, and G. Leuchs, *Opt. Lett.* **37**, 1919 (2012).