Письма в ЖЭТФ, том 110, вып. 2, с. 126 – 139 © 2019 г. 25 июля

Реализация топологически нетривиальных фаз, каскад квантовых переходов и идентификация майорановских мод в киральных сверхпроводниках и нанопроволоках (Миниобзор)

В. В. Вальков[1], В. А. Мицкан, А. О. Злотников, М. С. Шустин, С. В. Аксенов

Институт физики им. Л. В. Киренского, Федеральный исследовательский центр "Красноярский научный центр Сибирского отделения РАН", 660036 Красноярск, Россия

Поступила в редакцию 11 июня 2019 г.
После переработки 11 июня 2019 г.
Принята к публикации 11 июня 2019 г.

В обзоре рассмотрены вопросы реализации и экспериментальной идентификации топологически нетривиальных фаз в конденсированных средах. Приведены результаты исследования влияния сильного внутриатомного и межатомного кулоновского взаимодействия на квантовый фазовый переход с изменением топологического индекса в ансамбле фермионов Хаббарда на треугольной решетке. Обсуждена нетривиальная топология фазы сосуществования киральной $d + id$-сверхпроводимости и 120° спинового упорядочения в системе с треугольной решеткой и продемонстрировано формирование майорановских мод в такой фазе. Для открытой нанопроволоки со спин-орбитальным взаимодействием Рашбы и наведенным потенциалом сверхпроводящего спаривания проанализирован каскад квантовых переходов, реализуемый при изменении магнитного поля или электрохимического потенциала. Показано, что в окрестности таких квантовых переходов проявляются аномалии магнето- и электрокалорических эффектов, которые могут использоваться для экспериментального тестирования материалов на существование в них топологически нетривиальных фаз. Для структуры полуметалл/сверхпроводящая проволока/полуметалл, находящейся в режиме слабой неравновесности, предсказан эффект переключения спин-поляризованного тока в фазе топологической сверхпроводимости.

DOI: 10.1134/S0370274X19140108

1. Введение. После первой волны теоретических исследований топологических изоляторов [1–3] и топологических сверхпроводников (ТС) [4–7], существование которых было предсказано для относительно простых систем, описываемых квадратичными формами по операторам вторичного квантования, возникли новые направления изучения топологически нетривиальных фаз (ТНФ) в конденсированных средах. Расширение области исследований было связано с несколькими факторами.

Один из них вытекал из необходимости рассмотрения моделей, более полно учитывающих реальные особенности материалов. В частности, представлялось актуальным исследование топологических фаз при учете кулоновского взаимодействия между фермионами. При этом часто оказывалось, что материалы, которые рассматривались как претенденты на реализацию в них топологических фаз, из-за значительного внутриатомного отталкивания электронов являлись материалами с сильными электронными корреляциями [8–14].

Второй фактор определялся стремлением найти материалы, в которых топологические фазы реализовывались бы при более доступных в экспериментальном отношении условиях. С этой целью был инициирован поиск новых механизмов, индуцирующих нетривиальную топологию в сверхпроводниках. Если в первых работах по ТС с s-типом симметрии параметра порядка в нанопроволоках [6, 7] существенную роль играло одновременное влияние внешнего магнитного поля, спин-орбитального взаимодействия и наведенного за счет эффекта близости потенциала сверхпроводящего спаривания, то в недавних работах были проведены исследования твердотельных систем, в которых сверхпроводящее спаривание происходило за счет внутренних взаимодействий в материале [15–24].

Значительный интерес вызвали материалы, в которых сверхпроводящая фаза сосуществует со спиновым неколлинеарным упорядочением [17, 18]. В этом

[1]e-maol: vvv@iph.krasn.ru

случае для формирования сверхпроводящей фазы с нетривиальной топологией не требовалось присутствия спин-орбитального взаимодействия и внешнего магнитного поля. Это оказалось возможным вследствие того, что жесткая спин-фермионная корреляция обеспечивала смешивание состояний с различными проекциями спина.

Изучение условий реализации топологически нетривиальных фаз в материалах с сильными электронными корреляциями потребовало не только расширения арсенала математических методов, но и обобщения определения топологических индексов (ТИ), поскольку подходы, разработанные ранее для гамильтонианов, представляемых квадратичными формами по операторам вторичного квантования, становились неприменимыми [25, 26].

Исследование топологических систем неразрывно связано с поиском экспериментальных доказательств реализации нетривиальной фазы. В частности, актуальным является обнаружение на практике признаков, указывающих на существование майорановской моды (ММ) в системе, приготовленной из топологического сверхпроводника в геометрии открытых границ. В этом отношении перспективным является метод туннельной спектроскопии. Обнаруженные с его помощью характерные особенности вольт-амперной характеристики [27] трактовались как проявления ММ. В качестве топологической системы использовалась полупроводниковая проволока с сильной спин-орбитальной связью во внешнем магнитном поле и наведенным за счет эффекта близости потенциалом сверхпроводящего спаривания [7, 28]. Результаты работы [27] стимулировали бурный рост исследований по идентификации ММ, поскольку трактовка полученных данных по туннельной спектроскопии представлялась неоднозначной [29]. Поэтому актуальным представляется поиск альтернативных методов идентификации топологических фаз.

В работе сделан обзор недавних исследований по отмеченным выше проблемам реализации ТНФ в конденсированных средах. Рассмотрено влияние сильного внутриатомного и межатомного кулоновского взаимодействия на топологические характеристики сверхпроводников с киральной симметрией параметра порядка и на топологические переходы между различными фазами (параграф 2). Результаты исследований возможности реализации нетривиальной топологии и ММ в фазе сосуществования киральной сверхпроводимости и неколлинеарного спинового упорядочения в слоистых материалах с треугольной решеткой отражены в параграфе 3. Работы, связанные со структурой основного состояния (ОС) квантовой проволоки со спин-орбитальным взаимодействием в топологической фазе, обсуждены в параграфе 4. В этом же параграфе описываются особенности магнетокалорического эффекта в рассмотренной нанопроволоке. В параграфе 5 приведены сведения по особенностям спин-поляризованного транспорта, связанным с наличием ММ в нанопроволоке.

2. Квантовый топологический переход в сверхпроводящей киральной $d + id$ фазе. Примером материала, в котором кулоновское взаимодействие между электронами качественно влияет на топологический переход в сверхпроводящей фазе, является интеркалированный водой кобальтит натрия $\mathrm{Na}_x\mathrm{CoO}_2 \cdot y\mathrm{H}_2\mathrm{O}$ [30, 31]. Без допирования электронной $3d^5$ конфигурации ионов Co^{4+} в октаэдрическом окружении с тригональным искажением соответствует заполнение четырьмя электронами нижнего орбитального дублета и одним электроном отщепленного орбитального синглета. Этот уровень вырожден по проекции спина, и в кристалле при сильном внутриатомном кулоновском отталкивании происходит хаббардовское расщепление на две подзоны. Нижняя подзона является заполненной. Поэтому основное состояние слоя CoO_2 соответствует антиферромагнитному диэлектрику Мотта.

При допировании происходит заполнение верхней хаббардовской подзоны. При конечных температурах в двумерной системе дальний магнитный порядок разрушен и в сверхпроводящей фазе его можно не учитывать.

Рассмотренный режим электронного допирования с заполнением верхней хаббардовской подзоны часто описывается $t - J$ моделью. В действительности при получении эффективной модели возникают трехцентровые слагаемые, которые оказываются существенными для описания сверхпроводящей фазы [32]. Поэтому ниже нами используется $t - J^* - V$ модель, в которой, кроме трехцентровых слагаемых $\mathcal{H}_3$, будет учитываться межузельное кулоновское отталкивание. В представлении операторов Хаббарда [33, 34] гамильтониан имеет следующий вид:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_T + \mathcal{H}_J + \mathcal{H}_{(3)} + \mathcal{H}_V, \qquad (1)$$

где

$$\mathcal{H}_0 = \sum_{f\sigma} (\epsilon - \mu)\, X_f^{\sigma\sigma} + \sum_f (2\epsilon + U - 2\mu)\, X_f^{22},$$
$$\mathcal{H}_T = \sum_{fm\sigma} t_{fm}\, X_f^{2\bar\sigma} X_m^{\bar\sigma 2}, \qquad (2)$$
$$\mathcal{H}_J = \frac{1}{2} \sum_{fm\sigma} J_{fm} \left(X_f^{\bar\sigma\sigma} X_m^{\sigma\bar\sigma} - X_f^{\bar\sigma\bar\sigma} X_m^{\sigma\sigma} \right),$$

$$\mathcal{H}_{(3)} = \\ = \sum_{\substack{fmg\sigma \\ (f\neq g)}} \frac{t_{fm}t_{mg}}{U} \left(X_f^{2\bar{\sigma}} X_m^{\sigma\sigma} X_g^{\bar{\sigma}2} - X_f^{2\bar{\sigma}} X_m^{\bar{\sigma}\sigma} X_g^{\sigma 2} \right), \quad (3)$$

$$\mathcal{H}_V = \frac{1}{2} \sum_{f\delta} V \left(\hat{n}_f - \langle \hat{n}_f \rangle \right) \cdot \left(\hat{n}_{f+\delta} - \langle \hat{n}_{f+\delta} \rangle \right). \quad (4)$$

В этих выражениях $\mathcal{H}_0$ является оператором энергии электронов, находящихся на узлах треугольной решетки, $\mathcal{H}_T$ и $\mathcal{H}_J$ – кинетическое и обменное слагаемые, $\mathcal{H}_{(3)}$ описывает коррелированные перескоки, кулоновское отталкивание электронов на соседних узлах учитывается посредством слагаемого $\mathcal{H}_V$. Здесь использованы обычные обозначения операторов Хаббарда для верхней хаббардовской подзоны, ϵ – энергия одноэлектронного состояния, μ – химпотенциал ансамбля, U и V – параметры внутриатомного и межатомного кулоновского взаимодействия электронов, соответственно. Оператор числа электронов на узле f задается выражением $\hat{n}_f = X_f^{\uparrow\uparrow} + X_f^{\downarrow\downarrow} + 2X_f^{22}$.

При учете обменной связи в пределах двух координационных сфер решение уравнения для сверхпроводящего параметра порядка с $d_{x^2-y^2} + id_{xy}$ симметрией записывается в виде суперпозиции

$$\Delta_d(q) = 2\Delta_{d1}^0 \varphi_{d1}(q) + 2\Delta_{d2}^0 \varphi_{d2}(q), \quad (5)$$

где базисные функции

$$\varphi_{d1}(q) = \cos q_y - \cos\left(\sqrt{3}q_x/2\right)\cos(q_y/2) + \\ + i\sqrt{3}\sin\left(\sqrt{3}q_x/2\right)\sin(q_y/2), \quad (6)$$

$$\varphi_{d2}(q) = \cos\sqrt{3}q_x - \cos\left(\sqrt{3}q_x/2\right)\cos(3q_y/2) - \\ - i\sqrt{3}\sin\left(\sqrt{3}q_x/2\right)\sin(3q_y/2)$$

соответствуют первой и второй координационным сферам [35]. Поскольку эти функции являются комплексными, то они обращаются в нуль не на линиях, а лишь в некоторых точках зоны Бриллюэна. При этом положение нодальных точек $\Delta_d(q)$ зависит от отношения амплитуд Δ_{d1}^0 и Δ_{d2}^0 (см. рис. 1). В случае, когда в $\Delta_d(q)$ дает вклад только базисная функция первой координационной сферы φ_{d1}, нодальные точки находятся в центре и на краях зоны Бриллюэна, и контур Ферми не пересекает их ни при каких конечных концентрациях. Если $\Delta_{d1}^0 = 0$, а $\Delta_{d2}^0 \neq 0$, то существуют нодальные точки внутри зоны Бриллюэна. В общем случае отношение $\Delta_{d1}^0/\Delta_{d2}^0$ зависит от концентрации носителей заряда и параметров модели. При изменении концентрации возникает взаимная динамика контура Ферми и нодальных точек, в результате которой в системе при пересечении контуром Ферми нодальных точек реализуется квантовый топологический переход (КТП).

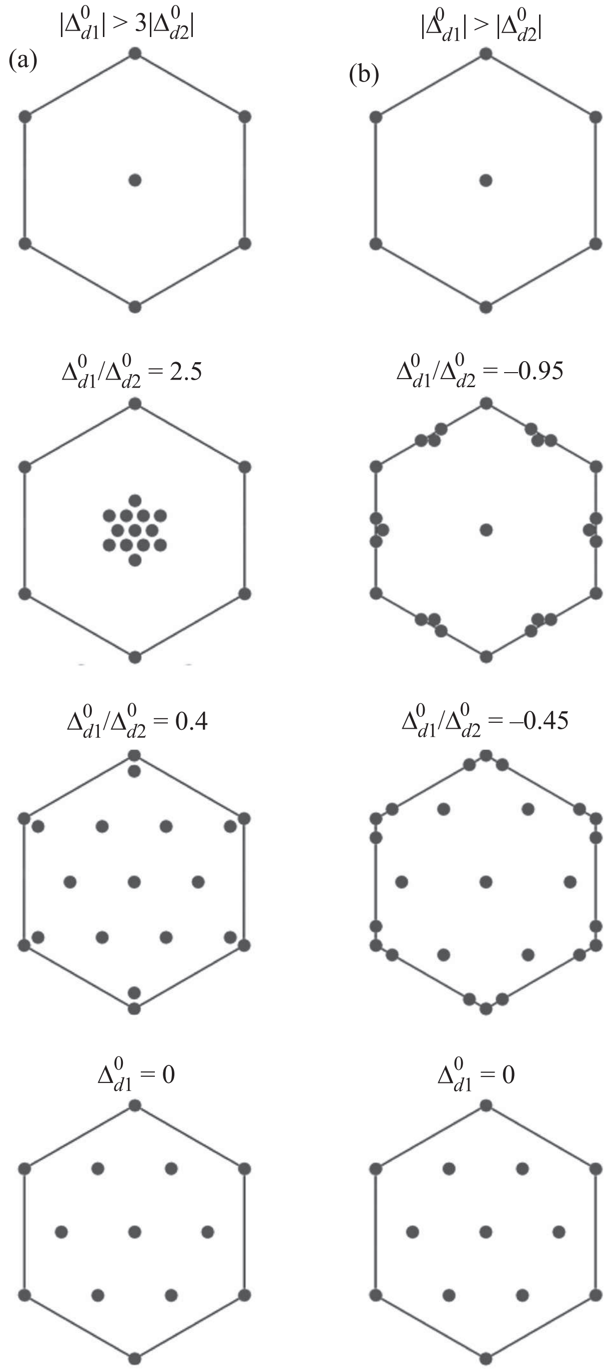

Рис. 1. (Цветной онлайн) Конфигурация нодальных точек $\Delta_d(q)$ при различных отношениях между Δ_{d1}^0 и Δ_{d2}^0 для совпадающих (a) и для противоположных (b) знаков

Важная роль межузельного кулоновского отталкивания фермионов в реализации КТП проявляется через механизм формирования нодальных точек $\Delta_d(q)$. Это взаимодействие, если говорить о главном его влиянии, стремится уничтожить сверхпроводящую фазу (здесь мы не обсуждаем высшие порядки теории возмущений, приводящие к механизму Кона–Латтинжера [36–38]). При этом взаимодействие между электронами, находящимися на ближайших узлах, имеет большее влияние на амплитуду сверхпроводящего спаривания Δ^0_{d1}, тогда как кулоновское отталкивание для второй координационной сферы существеннее сказывается на уменьшении значения Δ^0_{d2}. В результате изменяется отношение $\Delta^0_{d1}/\Delta^0_{d2}$ и положение нодальных точек $\Delta_d(q)$ смещается. В этом заключается механизм влияния межузельного кулоновского взаимодействия на точку топологического перехода при изменении концентрации носителей в системе.

Из вида спектра возбуждений в сверхпроводящей фазе $E_q = \sqrt{\xi_q^2 + |\Delta(q)|^2}$ ($\xi_q = \varepsilon_q - \mu$, ε_q – энергия электрона в нормальной фазе) вытекает, что при пересечении контуром Ферми нормальной фазы нодальных точек $\Delta(q)$, спектр сверхпроводящей фазы становится бесщелевым.

Комплексный характер $\Delta_d(q)$ инициирует топологические особенности сверхпроводящей фазы. Введение единичного вектора $\mathbf{m} = \{m_x, m_y, m_z\}$ [39] с компонентами

$$m_x = \frac{Re\Delta_d(q)}{E_q}, \quad m_y = \frac{-Im\Delta_d(q)}{E_q}, \quad m_z = \frac{\xi_q}{E_q} \quad (7)$$

позволяет построить отображение между точками зоны Бриллюэна и точками двумерной сферы единичного радиуса. Тогда движению по зоне Бриллюэна сопоставляется движение по точкам такой сферы. Для идентификации различных гомотопических классов таких траекторий вводится степень отображения – топологический индекс [35]

$$Q = \frac{1}{8\pi} \sum_{\Delta} \mathbf{m}_1 \cdot [\mathbf{m}_2 \times \mathbf{m}_3], \quad (8)$$

где суммирование проводится по всем треугольным плакетам, а вектора $\mathbf{m}_1$, $\mathbf{m}_2$, $\mathbf{m}_3$ вычисляются в вершинах плакетов. Значение Q отражает топологическую структуру сверхпроводящей фазы и связано с взаимным расположением нодальных точек $\Delta_d(q)$ и контура Ферми. При изменении концентрации, если происходит пересечение нодальных точек контуром Ферми нормальной фазы (рис. 2), то реализуется квантовый топологический переход [40, 41].

Как известно [42], ненулевые значения топологического инварианта Q в киральной сверхпроводящей

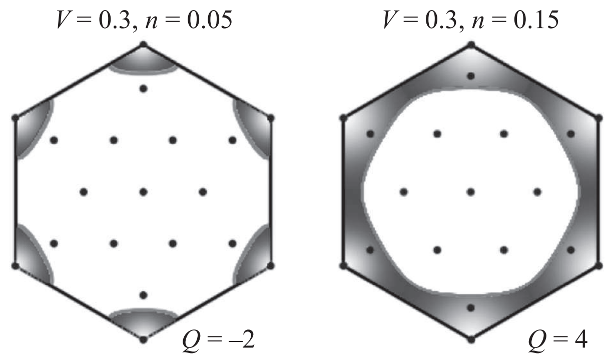

Рис. 2. (Цветной онлайн) Значения топологического индекса Q для двух конфигураций нодальных точек $\Delta_d(q)$ и контура Ферми. Параметры измеряются в единицах $|t_1|$: $J_1 = 0.3$, $J_2 = 0.2$, $t_2 = t_3 = 0$

фазе системы с периодическими граничными условиями свидетельствуют о наличии краевых состояний в аналогичной системе с открытыми границами. В следующем параграфе будет описан механизм формирования в спин-синглетной сверхпроводящей фазе с $d + id$ типом симметрии краевых состояний и ММ.

3. Майорановские моды в фазе сосуществования киральной сверхпроводимости и спинового упорядочения на треугольной решетке. Вскоре после того, как формирование ММ было предсказано в сверхпроводящих системах со спин-орбитальным взаимодействием в однородном магнитном поле [6, 7], было продемонстрировано, что аналогичную спин-орбитальной связи роль может играть внешнее неоднородное поле [43]. В этой связи, были предложены альтернативные системы для реализации ММ: 1) цепочка магнитных наночастиц с произвольными направлениями намагниченности на сверхпроводящей подложке [44]; 2) нанопроволоки с наведенной сверхпроводимостью в пространственно неоднородном магнитном поле [45]; 3) квазиодномерные системы с обменным взаимодействием Рудермана–Киттеля–Касуя–Иосиды и геликоидальным магнитным порядком в контакте со сверхпроводником [46, 47].

К другому классу систем, в которых индуцирование ММ происходит по аналогичному сценарию, относятся материалы с фазой сосуществования сверхпроводимости и неколлинеарного спинового упорядочения, например, $HoMo_6S_8$ и $ErRh_4B_4$ [17].

В работе [18] было показано, что если в соединении $Na_xCoO_2 \cdot yH_2O$ с треугольной решеткой при наличии киральной $d+id$ сверхпроводимости формируется страйповый магнитный порядок, то возникнут и ММ. Однако дальнейший анализ показал [48], что киральная сверхпроводимость не может сосуществовать со страйповым упорядочением спинов, но сосуществует с магнитным порядком, соответствующим 120° структуре. Более того, расчеты в рамках модели Хаббарда и $t-J$ модели демонстрируют реализацию именно 120° спинового упорядочения для треугольной решетки при малых уровнях допирования [49, 50]. Формирование фазы сосуществования киральной сверхпроводимости и 120° структуры в этой области допирования показано в работах [51, 52].

Преимущество данного механизма при поиске майорановских фермионов связано с отказом от создания сложных структур с эффектом близости, поскольку сверхпроводимость и магнитное упорядочение однородно сосуществуют во всем объеме образца благодаря внутренним взаимодействиям.

Для наглядности в рамках простой модели продемонстрируем реализацию нетривиальной топологии, а также появление ММ в фазе сосуществования киральной $d+id$ сверхпроводимости и 120° магнитного упорядочения на треугольной решетке [53]:

$$\mathcal{H}_{\text{SC–NCO}} = -\mu \sum_{l\sigma} a^{\dagger}_{l\sigma} a_{l\sigma} + \sum_{lm\sigma} t_{lm} a^{\dagger}_{l\sigma} a_{m\sigma} - \\ - h(\mathbf{Q}) \sum_{l} \Big(\exp(i\mathbf{Q}\mathbf{R}_l) a^{\dagger}_{l\uparrow} a_{l\downarrow} + \exp(-i\mathbf{Q}\mathbf{R}_l) a^{\dagger}_{l\downarrow} a_{l\uparrow} \Big) + \\ + \sum_{lm} \left(\Delta_{lm} a_{l\uparrow} a_{m\downarrow} + \Delta^{*}_{lm} a^{\dagger}_{m\downarrow} a^{\dagger}_{l\uparrow} \right), \qquad (9)$$

где $a_{l\sigma}$ – оператор уничтожения электрона на узле l (представление Ванье) и проекцией спина σ, μ – химпотенциал, t_{fm}, Δ_{fm} – амплитуды перескоков электронов и сверхпроводящих спариваний, $h\,(\mathbf{Q})$ – параметр обменного поля, $\mathbf{Q}$ – вектор магнитной структуры.

Гамильтониан (9) обладает электрон-дырочной симметрией и соответствует классу D [54]:

$$\Lambda H(\mathbf{k}) \Lambda = -H^{*}(-\mathbf{k}+\mathbf{Q}); \quad \Lambda = \begin{pmatrix} O & I \\ I & O \end{pmatrix}, \qquad (10)$$

где $H(\mathbf{k})$ – матрица гамильтониана Боголюбова–де Жена в квазиимпульсном представлении, O и I – нулевая и единичная матрицы.

Прямым следствием симметрии (10) является то, что с каждым значением $\varepsilon_n(\mathbf{k})$ энергии возбуждений связывается значение $-\varepsilon_n(-\mathbf{k}+\mathbf{Q})$. Рассмотрим точки зоны Бриллюэна, для которых выполняется соотношение $\mathbf{k} = -\mathbf{k}+\mathbf{Q}+\mathbf{G}$, где $\mathbf{G}$ – вектор обратной решетки. Будем называть их PHIM-точками (*particle-hole invariant momentum*) и обозначать через $\mathbf{K} = (K_1,\ K_2)$. В топологии тора, при рассмотрении периодических граничных условий вдоль обоих направлений решетки, имеется четыре PHIM точки: $\mathbf{K}_{I,\ldots,IV} = (-2\pi/3;\ -2\pi/3);\ (-2\pi/3;\ \pi/3);\ (\pi/3;\ -2\pi/3);\ (\pi/3;\ \pi/3)$.

Индикатором реализации топологически нетривиальной фазы, для которой ожидается формирование ММ, может служить отрицательная фермионная четность основного состояния (впервые на это было указано в [4]). В силу того, что состояния с квазимпульсами $\mathbf{k}$ и $-\mathbf{k}+\mathbf{Q}$ заполняются совместно и не изменяют четность ОС, достаточно проанализировать заполнение состояний в PHIM точках. В PHIM точке $\mathbf{K}_I$ сверхпроводящий параметр порядка обращается в нуль и заполнение одного состояния с энергией $\varepsilon_n(\mathbf{K}_I) < 0$ происходит при условии $h > |\mu + 3t_1 - 6t_2 + 3t_3|$. Состояния в остальных PHIM-точках не заполняются при данном условии. В трех точках $\mathbf{K}_{II-IV}$ гамильтониан сводится к гамильтониану сверхпроводника в однородном магнитном поле, а заполнение состояний происходит совместно при условии $h > \sqrt{(\mu+t_1)^2 + 4\left(\Delta^{(0)}_{d1} - 2\Delta^{(0)}_{d2}\right)^2}$. Приведенные условия определяют области, в которых ОС представляется в виде суперпозиции состояний с нечетным числом фермионов и реализуется ТНФ.

Как известно [5], топологический $\mathbb{Z}_2$ инвариант (число Майорана $\mathcal{M}$) определяется через фермионную четность $P(\mathbf{K})$ основного состояния решетки в топологии тора

$$\mathcal{M} = \prod_{\mathbf{K}} P(\mathbf{K}), \qquad (11)$$

где $P(\mathbf{K})$ вычисляется как знак пфаффиана матрицы Боголюбова–де Жена в представлении майорановских операторов. Значению $\mathcal{M} = -1$ отвечает ТНФ. При $\mathcal{M} = 1$ состояние системы топологически тривиальное и ММ не реализуются. Непосредственный расчет $\mathcal{M}$ согласуется с полученными выше условиями реализации ТНФ на основе сравнительно простого анализа четности ОС.

В квазиодномерной системе, при рассмотрении периодических граничных условий вдоль одного из направлений решетки (топология цилиндра), ММ реализуются только при $K_2 = -2\pi/3$ и в тех же параметрических областях, что и ранее. Топологический инвариант в этом случае

$$\mathcal{M}(K_2) = P(K_2, K_1 = -2\pi/3) \cdot P(K_2, K_1 = \pi/3). \qquad (12)$$

Линии границ фаз в координатах магнитное поле–химпотенциал с различными значениями числа Майорана показаны на рис. 3 жирными линиями. Вычисления проведены для следующих значений амплитуд сверхпроводящих спариваний: $\Delta^{(0)}_{d1} = 0.05|t_1|$,

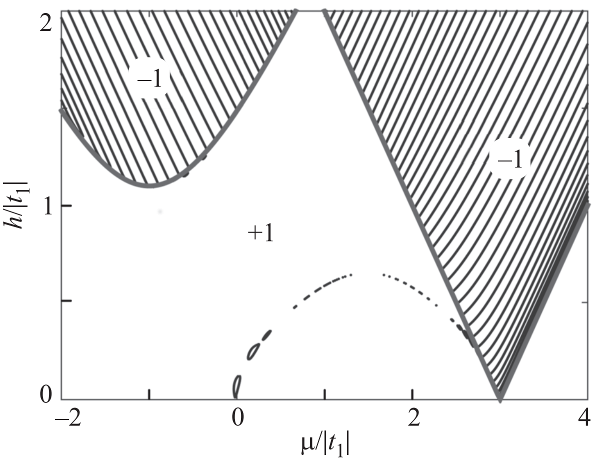

Рис. 3. (Цветной онлайн) Диаграмма состояний треугольной решетки в фазе сосуществования с различными значениями числа Майорана. Границы ТНФ показаны жирными линиями. Тонким линиям соответствуют значения параметров системы, для которых в топологии цилиндра реализуются возбуждения с нулевой энергией

$\Delta_{d2}^{(0)} = 0.3|t_1|$ при $t_2 = t_3 = 0$. Тонкими линиями на графике (рис. 3) представлены параметрические условия реализации нулевых мод для решетки в топологии цилиндра при $K_2 = -2\pi/3$ с числом узлов $N_1 = 48$ вдоль направления $\mathbf{a}_1$. Видно, что основная часть нулевых мод лежит в области параметров, отвечающей ТНФ системы в замкнутой геометрии. С увеличением N_1 все нулевые моды распределяются по областям с $\mathcal{M} = -1$. Такие нулевые моды возникают и в других моделях квазиодномерных систем класса симметрии D. В следующих параграфах будет показано, как эти моды могут быть детектированы посредством измерения калорических эффектов и транспортных свойств.

Топологически устойчивые краевые состояния могут реализовываться и при $\mathcal{M} = 1$. На их формирование указывают ненулевые значения $\mathbb{Z}$ инварианта для двумерных систем (в том числе при учете взаимодействия), который может быть выражен через функции Грина [55, 25]:

$$\tilde{N}_3 = \frac{1}{24\pi^2}\varepsilon_{\mu\nu\lambda}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dk_1 dk_2 \mathrm{Sp}\Big(G\partial_\mu G^{-1} \times \times G\partial_\nu G^{-1} G\partial_\lambda G^{-1}\Big), \tag{13}$$

где $\mu,\ \nu,\ \lambda = 1, 2, 3$, $\varepsilon_{\mu\nu\lambda}$ – антисимметричный тензор Леви–Чивиты, $\partial_1 = \partial/\partial_\omega$, $\partial_2 = \partial/\partial_{k_1}$, $\partial_3 = \partial/\partial_{k_2}$, по повторяющимся индексам подразумевается суммирование. В рассматриваемой системе невзаимодействующих электронов $G = \big[i\omega I - H(\mathbf{k})\big]^{\mathbf{-1}}$.

Следует отметить, что при рассмотрении функций Грина кирального сверхпроводника без дальнего магнитного порядка выражение (13) сводится к хорошо известному определению для числа кручений (*winding number*) вектора $\mathbf{m}$, введенному в (7) и связанному с фазой Берри и числом Черна:

$$Q = \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dk_1 dk_2\ \mathbf{m}\cdot\frac{\partial\mathbf{m}}{\partial k_1}\times\frac{\partial\mathbf{m}}{\partial k_2}. \tag{14}$$

Данное выражение эквивалентно введенному ранее ТИ (8).

В работе [56] для нецентросимметричных сверхпроводников класса симметрии D была установлена связь между $\mathbb{Z}_2$-инвариантом (11) и ТИ в 2D случае (13). В рассматриваемой системе с магнитным порядком данное соотношение имеет аналогичный вид:

$$(-1)^{\tilde{N}_3} = \mathcal{M}. \tag{15}$$

Отсюда следует, что ММ формируются в ТНФ с нечетным значением $\tilde{N}_3$. Если $\tilde{N}_3$ – четное, то реализуются топологически защищенные краевые состояния, не относящиеся, однако, к майорановскому типу. Это согласуется с расчетом условий возникновения нулевых мод в топологии цилиндра.

Фазовая диаграмма с различными ТНФ в переменных химпотенциал-величина обменного поля приведена на рис. 4. Для каждой области, находя-

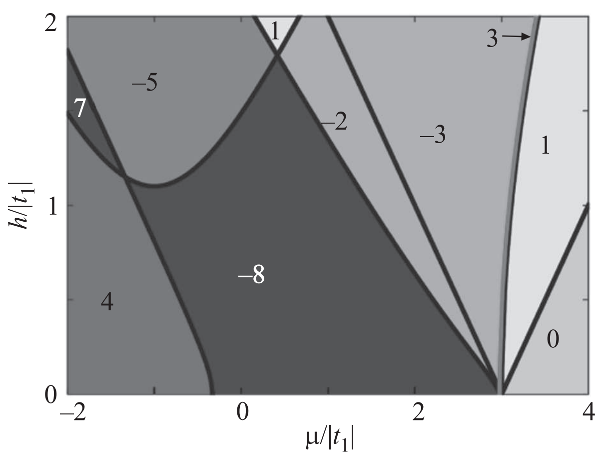

Рис. 4. (Цветной онлайн) Диаграмма топологических фаз со значениями инварианта $\tilde{N}_3$ (см. формулу (13))

щейся между двух граничных линий, реализуется свое значение ТИ $\tilde{N}_3$, отмеченное на диаграмме. Сплошные линии получены из условий на наличие бесщелевых возбуждений в топологии тора. Параметры выбраны те же, что и для рис. 3. Видно, что увеличение химпотенциала приводит к ряду КТП.

Имеются существенные отличия при анализе нулей спектра возбуждений в фазе сосуществования сверхпроводимости и неколлинеарного магнитного порядка по сравнению со спектром, получаемым в теории Бардина, Купера, Шриффера (БКШ). Как отмечалось в параграфе 2, спектр БКШ обладает нулевой энергией на границах и в середине гексагональной зоны Бриллюэна только при пересечении химпотенциалом дна или потолка затравочной зоны электронов. В фазе сосуществования за счет обменного поля спектр может иметь нули в этих точках, когда химпотеницал лежит внутри зоны. Такая ситуация реализуется на рис. 4 при переходе из области с $\tilde{N}_3 = -2$ в область с $\tilde{N}_3 = -3$ и при переходе $\tilde{N}_3 = 1 \longrightarrow \tilde{N}_3 = 0$, когда щель закрывается в точке K_I. Эта точка соответствует одной из неэквивалентных точек, лежащих на пересечении ребер гексагональной зоны Бриллюэна. В этом случае $\Delta_d(\mathbf{k}) = \Delta_d(-\mathbf{k}+\mathbf{Q}) = 0$. Второй аналогичный переход реализуется между областями с $N_3 = 3$ (данная очень узкая область обозначена жирной линией между областями с $\tilde{N}_3 = -3$ и $\tilde{N}_3 = 1$) и $\tilde{N}_3 = 1$, когда щель в спектре закрывается в точках $(0,0)$ (центр зоны Бриллюэна) и $(2\pi/3, 2\pi/3)$ (вторая неэквивалентная точка на границе зоны). Для сверхпроводника без магнитного упорядочения пересечение контуром Ферми нодальных точек сверхпроводящего параметра порядка приводит к реализации бесщелевых возбуждений. При учете неколлинеарного магнетизма из-за зависимости спектра также и от $\Delta_d(-\mathbf{k}+\mathbf{Q})$ такое условие не выполняется. Однако существуют условия, когда энергетический спектр обращается в нуль в точках, при которых параметры $\Delta_d(\mathbf{k})$, $\Delta_d(-\mathbf{k}+\mathbf{Q}) \neq 0$. Эта ситуация соответствует остальным переходам на рис. 4.

В реальных материалах с фазой сосуществования киральной $d+id$ сверхпроводимости и спинового упорядочения должны учитываться сильные электронные корреляции. В работе [52] мы показали не только устойчивость ММ по отношению к включению электронных взаимодействий, но и определили их структуру в ансамбле фермионов Хаббарда сильнокоррелированнных систем. При этом условия реализации ТНФ найдены из решения уравнений самосогласования для параметров порядка.

4. Калорические аномалии и фермионная четность нанопроволоки в сверхпроводящей фазе с нетривиальной топологией. В предыдущем параграфе на примере одной из систем класса симметрии D показано, что для области параметров, где реализуется ТНФ, изменение внешних условий индуцирует осцилляции энергии фермиевского возбуждения. Это приводит к немонотонной зависимости термодинамических характеристик, которая может служить средством идентификации ТНФ.

Кандидатами для экспериментального обнаружения ТНФ являются квазиодномерные сверхпроводники [5–7, 29]. Среди таких систем активно изучаются полупроводниковые нанопроволоки с наведенной s-волновой сверхпроводимостью во внешнем магнитном поле – сверхпроводящие нанопроволоки (СН). Их популярность связана с развитой технологией молекулярно-лучевой эпитаксии. Обычно исследуются проволоки InAs или InSb с сильным спин-орбитальным взаимодействием и большими значениями g-факторов ($g_{\mathrm{InAs}} \sim 10{-}25$ [57] и $g_{\mathrm{InSb}} \sim 20{-}70$ [58]), а также стандартные БКШ сверхпроводники, типа Al, тонкие слои которых (5–10 нм) напыляются на поверхность нанопроволоки [59].

Прогресс в создании таких гибридных структур позволил поставить эксперименты по баллистическому транспорту [29]. Был обнаружен пик дифференциальной проводимости при нулевом напряжении, высота которого в широком интервале магнитных полей равнялась двум квантам проводимости $2G_0$. Это трактовалось на основе реализации ТНФ с майорановскими модами [29]. Однако, такой резонанс может возникать из-за неоднородностей электростатического потенциала и андреевского отражения (АО) на них [60]. Неоднозначность интерпретации результатов таких экспериментов делает актуальной разработку альтернативных методов экспериментальной идентификации ТНФ в СН.

Перспективный подход к проблеме экспериментального обнаружения ТНФ может быть основан на изучении магнетокалорических аномалий [61, 62]. Физическая сторона метода обусловлена сменой фермионной четности основного состояния системы при изменении внешнего параметра.

Рассмотрим СН с гамильтонианом [63]:

$$\mathcal{H}_W = -\frac{1}{2}\sum_{l\sigma}\Big[t a^+_{l\sigma}a_{l+1,\sigma} + \alpha\eta_\sigma a^+_{l\sigma}a_{l+1,\bar{\sigma}} + h.c.\Big] + \\ + \sum_{l}\Big[\sum_{\sigma}\xi_\sigma a^+_{l\sigma}a_{l\sigma} + \Big(\Delta a_{l\uparrow}a_{l\downarrow} - h_x a^+_{l\uparrow}a_{l\downarrow} + h.c.\Big)\Big]. \quad (16)$$

Слагаемые первой строки описывают одномерную систему фермионов с интегралом перескоков $t/2$ и параметром спин-орбитального взаимодействия Рашбы $\alpha/2$. Вторая строка соответствует учету наведенного за счет эффекта близости потенциала сверхпроводящего спаривания с амплитудой $\Delta = |\Delta|e^{i\theta}$, а также отсчитанной от химпотенциала μ энергии фермиона на одном узле: $\xi_\sigma = \epsilon_0 - \mu + \eta_\sigma h_z$. Здесь и в (16) $h_{z(x)} = \frac{1}{2}g\mu_B H_{z(x)}$, g – фактор Ланде, μ_B – магнетон

Бора, $H_{z(x)}$ – компоненты внешнего магнитного поля (в данном параграфе полагается: $h_x = 0$, $\theta = 0$); $\eta_\uparrow = 1$, $\eta_\downarrow = -1$.

Простой анализ показывает, что для четного числа узлов в зависимости от параметров СН возможны четыре типа функции ОС ($\hat{G} = \prod_{0<k<\pi} \hat{R}_k$):

$$|\Psi_I\rangle = \hat{R}_0 \hat{R}_\pi \hat{G} |\, 0\, \rangle; \qquad |\Psi_{II}\rangle = \hat{R}_0 a^+_{\pi\downarrow} \hat{G} |\, 0\, \rangle;$$
$$|\Psi_{III}\rangle = a^+_{0\downarrow} \hat{R}_\pi \hat{G} |\, 0\, \rangle; \quad |\Psi_{IV}\rangle = a^+_{0\downarrow} a^+_{\pi\downarrow} \hat{G} |\, 0\, \rangle. \quad (17)$$

Входящие сюда квадратичные формы $\hat{R}_k$, $\hat{R}_0$ и $\hat{R}_\pi$:

$$\hat{R}_k = A_k + B_k a^+_{-k\downarrow} a^+_{k\uparrow} + C_k a^+_{k\downarrow} a^+_{-k\uparrow} + D_k a^+_{-k\uparrow} a^+_{k\uparrow} +$$
$$+ F_k a^+_{-k\downarrow} a^+_{k\downarrow} + G_k a^+_{-k\downarrow} a^+_{k\uparrow} a^+_{k\downarrow} a^+_{-k\uparrow}.$$
$$\hat{R}_0 = A_0 + B_0 a^+_{0\downarrow} a^+_{0\uparrow}; \quad \hat{R}_\pi = A_\pi + B_\pi a^+_{\pi\downarrow} a^+_{\pi\uparrow} \quad (18)$$

порождают суперпозицию состояний с четным числом фермионов. Поэтому отрицательная фермионная четность ОС определяется только характером заполнения состояний с $k = 0$ и $k = \pi$.

Функции $|\Psi_I\rangle$ и $|\Psi_{IV}\rangle$ представляются в виде суперпозиции состояний с четным числом фермионов. Соответственно этому число Майорана $\mathcal{M} = +1$. Для функций $|\Psi_{II}\rangle$ и $|\Psi_{III}\rangle$ в суперпозицию входят только состояния с нечетным числом фермионов и $\mathcal{M} = -1$.

Потребовав, чтобы энергия состояний $|\Psi_{II}\rangle$ и $|\Psi_{III}\rangle$ была меньше энергии состояний $|\Psi_I\rangle$ и $|\Psi_{IV}\rangle$, получим неравенства

$$\sqrt{|\Delta|^2 + (\mu - |t|)^2} < |h| < \sqrt{|\Delta|^2 + (\mu + |t|)^2}, \quad (19)$$

которые были получены ранее на основе анализа числа Майорана. При их выполнении параметры СН таковы, что реализуется ТНФ (области II и III рис. 5).

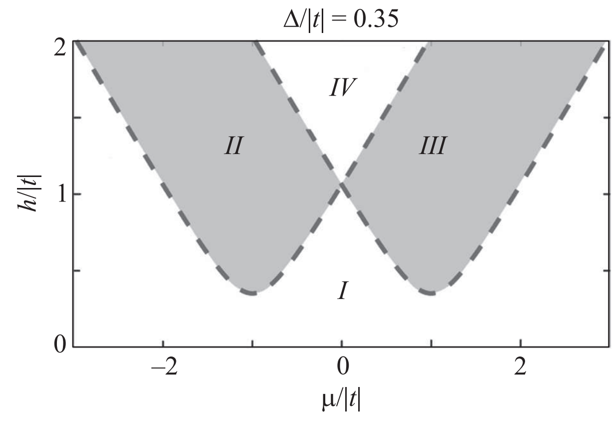

Рис. 5. (Цветной онлайн) Диаграмма топологических фаз СН. Области II и III соответствуют ТНФ ($\mathcal{M} = -1$), а I и IV – тривиальной ТФ ($\mathcal{M} = 1$)

В случае длинных открытых цепочек для области параметров, соответствующей ТНФ в замкнутой геометрии, реализуются топологически защищенные ММ с экспоненциально малой энергией возбуждений $\varepsilon_0 \sim \exp(-N)$. О свойствах такой моды можно судить, рассматривая коэффициенты разложения $w_{l\sigma,0}$ и $z_{l\sigma,0}$ самосопряженных операторов $b' = \frac{1}{2}\left(\alpha_0 + \alpha_0^+\right)$ и $b'' = \frac{i}{2}(\alpha_0^+ - \alpha_0)$ по одноузельным майорановским операторам $\gamma_{Al\sigma}$, $\gamma_{Bl\sigma}$:

$$\alpha_0 = \frac{1}{2} \sum_{l=1;\sigma}^{N} \left(w_{l\sigma,0} \gamma_{Al\sigma} + z_{l\sigma,0} \gamma_{Bl\sigma}\right);$$
$$w_{l\sigma,0} = e^{-i\theta/2} \left(u^*_{l\sigma,0} + v_{l\sigma,0}\right);$$
$$z_{l\sigma,0} = e^{-i\theta/2} \left(u^*_{l\sigma,0} - v_{l\sigma,0}\right), \quad (20)$$

где $u_{l\sigma,0}$ и $v_{l\sigma,0}$ – коэффициенты преобразования Боголюбова. Степень перекрытия распределений $w_{l\sigma,0}$ и $z_{l\sigma,0}$ экспоненциально мала. При этом реализуется электрическая и спиновая нейтральность ММ, поскольку изменение распределений электронной и спиновой плотности

$$\delta n_{l\sigma} = \langle 1| a^+_{l\sigma} a_{l\sigma} |1\rangle - \langle 0| a^+_{l\sigma} a_{l\sigma} |0\rangle =$$
$$= |u_{l\sigma,0}|^2 - |v_{l\sigma,0}|^2 = w_{l\sigma,0} z_{l\sigma,0}; \quad (21)$$
$$\delta s^z_l = \frac{1}{2} \sum_\sigma \eta_\sigma w_{l\sigma,0} z_{l\sigma,0}; \ \delta s^x_l = \frac{1}{2} \sum_\sigma w_{l\sigma,0} z_{l\bar{\sigma},0}; \quad (22)$$

при переходе СН из основного состояния $|0\rangle$ в состояние с ММ $|1\rangle = \alpha_0^+ |0\rangle$ равно нулю.

При уменьшении длины цепочки распределения $w_{l\sigma,0}$ и $z_{l\sigma,0}$ начинают значительно перекрываться. Энергия мод, вообще говоря, отлична от нуля, однако, при определенных параметрах могут возникнуть возбуждения с нулевой энергией. Последние, как и для системы (9), реализуются на линиях, ограничивающих затененные области рис. 6. Существенно, что при пересечении таких линий происходит смена фермионной четности ОС, и в системе реализуется квантовый переход. Поэтому линии нулевых мод являются линиями квантовых критических точек (ККТ). Значение фермионной четности P определяется знаком пфаффиана матрицы Боголюбова–де Жена $\tilde{H}$ гамильтониана (16), записанного в представлении майорановских операторов:

$$P = \operatorname{sign}\left(\operatorname{Pf}\left(\tilde{H}\right)\right). \quad (23)$$

Для открытой нанопроволоки результат вычисления фермионной четности позволяет построить фазовую диаграмму, показанную на рис. 6. Затененным

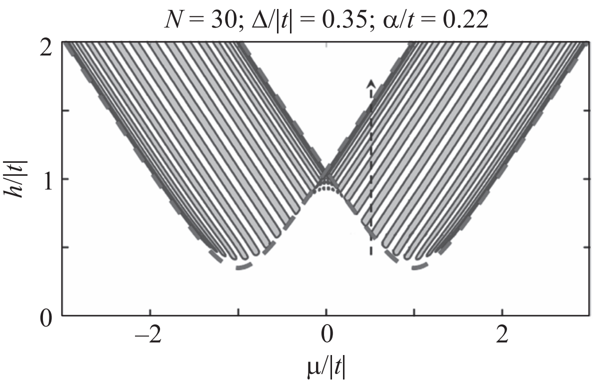

Рис. 6. (Цветной онлайн) Фазовая диаграмма открытой СН. В затененных областях фермионная четность отрицательна. Штриховые линии обозначают границы ТНФ замкнутой СН (см. рис. 5)

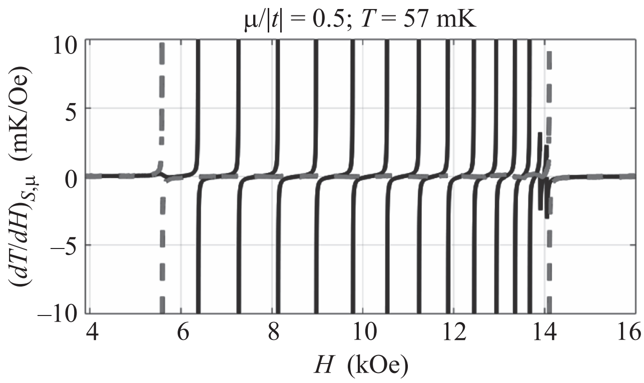

Рис. 7. (Цветной онлайн) Полевая зависимость магнетокалорического эффекта. $T = 10^{-3}|t|$, $\mu = 0.5|t|$, остальные параметры те же, что и на рис. 6. Из сравнения с рис. 6 видно, что аномальное поведение калорического эффекта реализуется в области, соответствующей ТНФ

областям соответствует значение $P = -1$. На границах этих областей существуют возбуждения с нулевой энергией. Все области с $P = -1$ находятся внутри области ТНФ цепочки в замкнутой геометрии. Поэтому идентификация линий смены фермионной четности с помощью наблюдаемых характеристик в короткой открытой нанопроволоке может служить индикатором той области параметров, для которой в бесконечно длинной открытой СН реализуются ММ.

Известно, что квантовые переходы могут быть детектированы с помощью магнетокалорического эффекта [64, 65], проявляющегося в изменении температуры системы при адиабатическом изменении магнитного поля:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial h}\right)_{S,\mu} = -T\left(\frac{\partial\langle M\rangle/\partial T}{C(T)}\right)_{\mu,h}, \tag{24}$$

где $\langle M\rangle$ и $C(T)$ – удельная намагниченность и удельная теплоемкость, соответственно. Существенно, что при низких температурах производная (24) слева и справа от ККТ имеет разные знаки и расходится в самой точке. Аналогичные утверждения имеют место для электрокалорического эффекта, заключающегося в изменении температуры при адиабатическом изменении электрохимического потенциала.

Соответственно сказанному, при низких температурах калорические эффекты будут проявлять описанное аномальное поведение, как только внешний изменяемый параметр будет находиться в пределах ТНФ замкнутой СН. Это изображено на рис. 7. Пунктирными линиями показаны зависимости калорических эффектов для замкнутой СН, в которой квантовые переходы сопровождаются изменением значения ТИ $\mathcal{M}$. Сплошными линиями отражены аналогичные зависимости для открытой нанопроволоки. Наблюдение этих особенностей может указывать на реализацию ТНФ в длинной СН и служить в качестве дополнительного критерия к уже предложенным в литературе тестам (см., например, работы [29, 66]). Представленные эффекты не ограничиваются СН и могут иметь место в других квазиодномерных системах класса симметрии D.

5. Особенности спин-поляризованного транспорта с участием майорановских состояний. Выше отмечалось, что ММ в длинных проволоках характеризуется нулевым средним значением спина. Вместе с тем в ряде работ показывалось, что за переходом в ТНФ можно проследить, наблюдая отдельно за электронной составляющей спиновой поляризации ММ [67–69], либо изучая совокупную спиновую поляризацию всех возбуждений за исключением ММ [70].

Следствием ненулевой электронной (дырочной) спиновой поляризации ММ в процессах транспорта является АО [71] без изменения проекции спина [72, 73] и неколлинеарное АО [74]. Таким образом, существование ММ может быть проверено средствами спин-поляризованной спектроскопии/микроскопии.

В этой связи рассмотрим квантовый транспорт в системе ферромагнетик/СН/ферромагнетик [75]. Гамильтониан системы имеет несколько слагаемых:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_L + \mathcal{H}_R + \mathcal{H}_W + \mathcal{H}_T. \tag{25}$$

Первые два описывают левый и правый ферромагнитные однозонные металлические контакты в модели Стонера,

$$\mathcal{H}_i = \sum_{k\sigma}\left[\xi_k - \frac{eV_i}{2} - \eta_\sigma M_i\right] c^+_{ik\sigma} c_{ik\sigma}, \quad i = L, R,$$

где $c_{ik\sigma}^{+}$ – оператор рождения электрона в i-ом контакте с квазиимпульсом k, проекцией спинового момента на ось квантования σ и энергией $\xi_k = \epsilon_k - \mu$ (μ – химический потенциал системы); M_i – энергия молекулярного поля i-ого контакта.

Слагаемое $\mathcal{H}_W$ описывает СН со спин-орбитальным взаимодействием Рашбы в скошенном магнитном поле ($h_{x,z} \neq 0$) и было введено ранее (16). Последнее слагаемое в (25) есть туннельный гамильтониан $\mathcal{H}_T$, который описывает взаимодействие между сверхпроводящей проволокой и контактами,

$$\mathcal{H}_T = t_L \sum_{k\sigma} c_{Lk\sigma}^{+} a_{1\sigma} + t_R \sum_{p\sigma} c_{Rp\sigma}^{+} a_{N\sigma} + h.c., \qquad (26)$$

где $t_{L(R)}$ – параметр туннельной связи между левым (правым) контактом и проволокой.

Для анализа транспортных свойств применим метод неравновесных функций Грина [76–78]. Для удобства описания электронных, дырочных и спиновых степеней свободы введем 4-х компонентные операторы Намбу [79, 74], $\psi_{im} = \left(d_{im\uparrow}\ d_{im\downarrow}^{+}\ d_{im\downarrow}\ d_{im\uparrow}^{+}\right)^T$, где $d_{im\sigma} = a_{j\sigma}$, $c_{ik\sigma}$. Тогда неравновесные функции Грина записываются как

$$G_{il,jm}(\tau,\tau') = -i\left\langle T_C \psi_{il}(\tau) \otimes \psi_{jm}^{+}(\tau')\right\rangle, \qquad (27)$$

где T_C – оператор упорядочения на временном контуре Келдыша. Используя (27), электронный ток в i-ом контакте определяется следующим образом:

$$I_i = e \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{\pi} Tr\left[Re\left\{\sigma\left(\Sigma_i^r G_{i,i}^{<} + \Sigma_i^{<} G_{i,i}^{a}\right)\right\}\right], \qquad (28)$$

где $\sigma = \mathrm{diag}(1,-1,1,-1)$ – позволяет учесть вклады в ток как от электронного, так и дырочного канала; $\Sigma_i^{r(<)} = T_i^{+} g_k^{r(<)} T_i$ – фурье-образ матрицы запаздывающей собственно-энергетической функции (функции "меньше"), которая описывает влияние i-ого контакта на СН; $g_k^{r(<)}$ – фурье-образ матрицы запаздывающей одночастичной функции Грина (функции "меньше") i-ого контакта. Зависящие от времени матрицы туннельной связи имеют вид $T_i(t) = t_i \cdot \mathrm{diag}\left(e^{-ieV_it}, -e^{ieV_it}, e^{-ieV_it}, -e^{ieV_it}\right)$. Далее, $G_{i,i}^{a(<)} = P_i G_W^{a(<)} P_i^{+}$ – i,i-ый блок фурье-образа матрицы опережающей функции Грина СН (функции "меньше"), который соответствует ее первому (в случае I_L) или последнему (в случае I_R) узлу. Для получения этих блоков применяются проекционные операторы $P_L = (I\ O)$ и $P_R = (O\ I)$, где I – единичная матрица размером 4×4, O – нулевой блок размером $4 \times 4N-4$ [80, 81].

Неравновесные функции Грина СН находятся в рамках решения уравнений Дайсона и Келдыша,

$$G^r = \left(\omega - H_W - \Sigma^r\right)^{-1},\ G^a = \left(G^r\right)^{+}, \qquad (29)$$

$$G^{\lessgtr} = G^r \Sigma^{\lessgtr} G^a. \qquad (30)$$

В формуле (29) H_W описывает СН в пространстве операторов Намбу. Полная собственно-энергетическая функция системы записывается как $\Sigma^n = P_L^{+}\Sigma_L^n P_L + P_R^{+}\Sigma_R^n P_R$ ($n = r,a,>$). Впоследствии мы будем рассматривать полуметаллические контакты (например, NiMnSb или CrO_2 [82]), которые характеризуются наличием носителей только с одной проекцией спина (основные носители). Тогда, компоненты, относящиеся к i-ому контакту, в рамках широкозонного приближения имеют вид $\Sigma_i^{r,a} = \mp\frac{i}{2}\Gamma_i = \mathrm{const}$, $\Sigma_i^{<} = \left(\Sigma_i^a - \Sigma_i^r\right)F_i$, где $\Gamma_i = 2\pi t_i^2\rho_i$ – параметр, характеризующий уширение уровней СН за счет связи с подзоной основных носителей i-ого контакта; ρ_i – плотность состояний подзоны основных носителей i-ого контакта; $F_i = \mathrm{diag}\left(f_{i1}, f_{i2}, f_{i1}, f_{i2}\right)$, где $f_{i1,2}(\omega \pm eV_i/2)$ – функции Ферми–Дирака.

Также в [75] анализировались флуктуации тока, в частности, дробовый шум при нулевой частоте [79, 83]:

$$\begin{aligned} S_i(0) = e^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{\pi} \mathrm{Tr}\Big[&\sigma\Sigma_i^{<}\sigma G_{i,i}^{>} + G_{i,i}^{<}\sigma\Sigma_i^{>}\sigma - \\ &- \sigma\left[\Sigma_i G_{i,i}\right]^{<}\sigma\left[\Sigma_i G_{i,i}\right]^{>} - \left[G_{i,i}\Sigma_i\right]^{<}\sigma\left[G_{i,i}\Sigma_i\right]^{>}\sigma + \\ &+ \sigma\left[\Sigma_i G_{i,i}\Sigma_i\right]^{>}\sigma\hat{G}_{i,i}^{<} + G_{i,i}^{>}\sigma\left[\Sigma_i G_{i,i}\Sigma_i\right]^{<}\sigma\Big]. \end{aligned} \qquad (31)$$

Рассмотрим особенности проводящих свойств описанной системы. Будем предполагать, что $V_{L,R} = V$. Тогда, после ряда преобразований формула (28) в случае, например, левого контакта принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} I_L &= I_L^{\mathrm{LAR}} + I_L^{\mathrm{CAR}} = \\ &= e\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi}\left[\Gamma_L^2\left(\left|G_{1,4}^r\right|^2 + \left|G_{4,1}^r\right|^2\right) + \right. \\ &\left. + \Gamma_L\Gamma_R\left(\left|G_{1,4N}^r\right|^2 + \left|G_{4,4N-3}^r\right|^2\right)\right]\left(f_2 - f_1\right), \end{aligned} \qquad (32)$$

где $f_{1,2} \equiv n(\omega \pm eV/2)$, $G_{i,j}^r$ – матричные элементы G^r.

В полученном выражении для тока присутствуют две составляющие: 1) локальный ток, $I_L^{\mathrm{LAR}} \sim \sim \Gamma_L^2$, связанный с одноименными процессами АО (LAR – *Local Andreev Reflection*); 2) нелокальный ток, $I_L^{\rm CAR} \sim \Gamma_L\Gamma_R$, связанный с процессами перекрестного АО (CAR – *Crossed Andreev Reflection*) [71, 74]. При этом матричные элементы фурье-образа запаздывающей функции Грина, которые отвечают за отмеченные процессы, имеют вид: $G^r_{1,4} = \langle\langle a_{1\uparrow}|a_{1\uparrow}\rangle\rangle$ и $G^r_{1,4N} = \langle\langle a_{1\uparrow}|a_{N\uparrow}\rangle\rangle$. Важно заметить, что андреевские процессы в системе полуметалл/сверхпроводник отсутствуют, если не учитывать процессы переворота спина. Это связано с тем, что ферромагнетик такого типа имеет только одну подзону носителей заряда. Однако, например, если при рассеянии на интерфейсе возможны спин-флип процессы, то АО без изменения проекции спина носителей имеет место [84, 85].

В случае рассматриваемой СН, ненулевой вклад в спин-поляризованный ток от андреевских каналов возникает вследствие спин-орбитального взаимодействия. Продемонстрируем это, рассматривая наиболее простую ситуацию, когда СН состоит из двух узлов ($N = 2$) и $h_x = 0$. Тогда, числители соответствующих функций Грина имеют вид:

$$\begin{gathered}
\mathrm{num}\left\{G^r_{1,4}\right\} = -16\eta_\sigma\Delta\alpha t\xi_{\bar\sigma}\left[\omega\left(16\eta_\sigma\xi_0 h_z + \Gamma_R^2\right) + \right. \\
\left. + 2i\Gamma_R\left(\Delta^2 + \alpha^2 + t^2 - \omega^2 - \xi_{\bar\sigma}^2\right)\right], \\
\mathrm{num}\left\{G^r_{1,4N}\right\} = 32\eta_\sigma\Delta\alpha\xi_{\bar\sigma}\left[\left(\Delta^2 + \alpha^2 + t^2\right)^2 + \right. \\
+ t^2\left(C_{e\bar\sigma}C_{h\bar\sigma} - \omega\left(4\omega + i\Gamma\right)\right) + \\
+ C_{e\sigma L}C_{h\sigma R}\left(t^2 + C_{e\bar\sigma}C_{h\bar\sigma}\right) - \\
- C_{e\sigma L}\left(\alpha^2 C_{e\bar\sigma} + \Delta^2 C_{h\bar\sigma}\right) - \\
\left. - C_{h\sigma R}\left(\alpha^2 C_{h\bar\sigma} + \Delta^2 C_{e\bar\sigma}\right)\right], \\
G^r_{4,1} = G^r_{1,4}, G^r_{4,4N-3} = -G^r_{1,4N}\left(L \longleftrightarrow R\right),
\end{gathered} \tag{33}$$

где $C_{e\sigma L(h\sigma R)} = \omega \mp \xi_\sigma + i\Gamma_{L(R)}/2$, $C_{e(h)\bar\sigma} = \omega \mp \xi_{\bar\sigma}$, $\Gamma = \Gamma_L + \Gamma_R$, $\xi_0 = t - \mu$. Общий для всех гриновских функций знаменатель здесь не приводится по причине громоздкости. Из (33) следует, что локальное и перекрестное АО от интерфейса полуметалл/СН имеют место только, если в СН одновременном присутствуют и сверхпроводящее спаривание, и спин-орбитальное взаимодействие.

В одноконтактной геометрии ($\Gamma_R = 0$) ток определяется только локальными процессами. Тогда, для дальнейшего рассмотрения важно заметить, что в режиме линейного отклика дифференциальная проводимость $G_L = dI_L/dV$ стремится к нулю. Такое поведение согласуется с описанным для случая, когда сверхпроводник (без спин-орбитального взаимодействия) контактирует с полуметаллом, в котором градиент намагниченности перпендикулярен интерфейсу [84, 85]. В свою очередь, в нелокальном режиме вклад в ток от обоих каналов является ненулевым при любых ω.

В дальнейшем ограничимся рассмотрением слабо неравновесного режима, $0 < eV/2 < \min(\delta\varepsilon_0)$, где под $\delta\varepsilon_0$ подразумеваются величины максимумов характерной осцилляционной зависимости энергии возбуждения ММ от внешнего магнитного поля. Такая зависимость возникает за счет гибридизации введенных выше распределений $w_{l\sigma,0}$, $z_{l\sigma,0}$ (20) и проявлялась в описанных магнетокалорических аномалиях.

На рисунке 8a изображена зависимость кондактанса левого контакта от x- и z-компонент магнитного поля (карта проводимости), направление которого перпендикулярно вектору поля Рашбы. При фиксированной ориентации $\mathbf{H}$ рост величины поля приводит к увеличению $\delta\varepsilon_0$. При этом $2G_0$ максимумы проводимости, возникающие за счет резонансного локального андреевского отражения на ММ ($G_L^{\rm LAR} = 2G_0$, $G_L^{\rm CAR} = 0$) [86], чередуются с минимумами. Далее, как видно, расчеты для различных направлений $\mathbf{H}$ приводят к возникновению концентрических резонансных колец на карте проводимости. Полученные кольца имеют несколько особенностей. Во-первых, их ширина зависит от направления поля. Во-вторых, для некоторой выделенной ориентации подавляются все максимумы кондактанса.

Расчеты показывают, что транспорт спин-поляризованных электронов (дырок) с энергией вблизи уровня Ферми определяется поведением электронной (дырочной) составляющей спиновой поляризации ММ на концах СН, $(\delta s^z_{1(N)})_e \equiv S^z_{L(R)} = \left|u_{1(N)\uparrow,0}\right|^2 - \left|u_{1(N)\downarrow,0}\right|^2$ (для достаточно короткой проволоки с $N = 30$: $(\delta s^z_{1(N)})_e \approx -(\delta s^z_{1(N)})_h$). На рисунках 8c, d приведены зависимости S^z_L и S^z_R от магнитного поля, соответственно. В нижней полуплоскости $S^z_{L,R} > 0$, так как поле направлено антипараллельно оси z. Как следствие, в этой области кольца проводимости шире.

Из сравнения рис. 8a, c вытекает, что подавление резонансов $G_L\left(h_x, h_z\right)$ наблюдается при ориентациях магнитного поля, для которых S^z_L имеет минимум (см. темно-синюю область на рис. 8c). Важно, что при этом $S^z_{L\uparrow} = \left|u_{1\uparrow,0}\right|^2 \approx 0$. В результате спин-поляризованный транспорт подавляется и $I_L \approx 0$. В то же время, поляризация на правом конце при тех же ориентациях поля стремится к нулю, причем $S^z_{R\uparrow} \approx -S^z_{R\downarrow} \neq 0$. Последнее означает, что резонансы в проводимости правого контакта, G_R, обусловленные локальным андреевским отражением на ММ, сохраняются, т.е. $I_R \neq 0$ (не показано на рис. 8) [75].

Таким образом, для указанного направления магнитного поля реализуется сильно асимметричный режим транспорта, близкий к одноконтактному, что

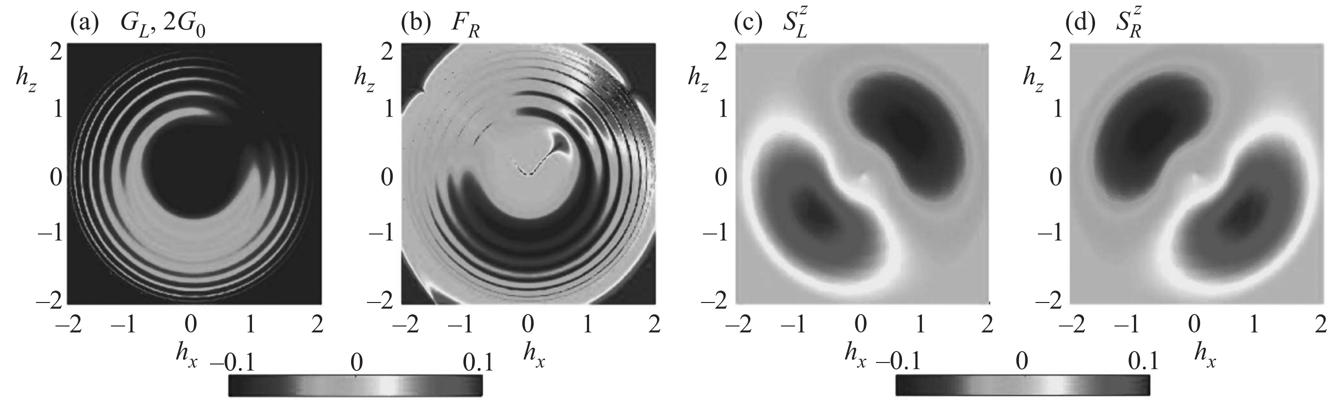

Рис. 8. (Цветной онлайн) Зависимости кондактанса левого контакта (a) и фактора Фано правого контакта (b) от энергии магнитного поля, а также аналогичные зависимости z-компоненты электронной спиновой поляризации ММ на левом, S_L^z (c), и правом, S_R^z (d), концах СН. Цвет рисунков (a) и (b) ((c) и (d)) расшифровывается на шкале слева (справа). Параметры: $t = 1$, $\mu = 0$, $\Delta = 0.4$, $\alpha = 2$, $N = 30$

также подтверждается поведением фактора Фано правого контакта, $F_R = S_R(0)/2eI_R$, представленном на рис. 8b. Видно, что при $h_x \approx h_z$ величинам магнитного поля, при которых $G_R \approx 2G_0$, соответствуют нулевые значения F_R. Тогда как в промежутках между этими минимумами $F_R \longrightarrow 2$. Это указывает на доминирование локального АО в областях со слабой проводимостью [86, 79]. Напротив, во всех других областях, где сохраняется двухконтактный режим и $G_{L,R} \ll 1$, главную роль играют процессы перекрестного АО, как результат $F_R \longrightarrow 1$ [87].

Заметим, что наблюдаемое при $h_x \approx h_z$ нарушение симметрии токов (также отмечавшееся при спин-независимом транспорте через МС [88]) характерно именно для слабо неравновесного режима транспорта. Действительно, согласно формулам (33), в одноконтактном режиме приближение линейного отклика дает $G_{L,R} = 0$ и $I_L = -I_R$.

Аналогичные рассуждения могут быть проведены и для ориентации поля, которая характеризуется соотношением $h_x \approx -h_z$ [75]. В этом случае $I_L \neq 0$, $I_R \approx 0$. В остальных ситуациях $I_L = -I_R$. Таким образом, выполненный анализ показывает, что магнитное поле позволяет управлять направлением спин-поляризованного тока в слабо неравновесной системе полупроводник/СН/сверхпроводник, если устройство находится в ТНФ.

Заключение. Представленные результаты исследований по реализации топологических фаз в конденсированных средах показывают, что учет кулоновского взаимодействия между электронами и неколлинеарного спинового упорядочения приводит к формированию новых механизмов индуцирования состояний с нетривиальной топологией.

Рассмотрены условия реализации квантовых топологических переходов в киральных $d + id$ сверхпроводниках без магнитного порядка и в фазе сосуществования $d + id$ сверхпроводимости и неколлинеарного спинового упорядочения. В первом случае топологически нетривиальные фазы обладают четным значением топологического индекса. При параметрах, для которых состояние системы является топологически нетривиальным, в случае открытых границ формируются краевые состояния.

При появлении 120° магнитного упорядочения области реализации топологически нетривиальных фаз изменяются, поскольку появляются фазы с нечетным значением топологического инварианта. В таких фазах при рассмотрении открытых систем возникающие краевые состояния являются майорановскими. Наличие множества нулевых мод существенно для экспериментального поиска топологически нетривиальных фаз.

При изучении полупроводниковой нанопроволоки с сильным спин-орбитальным взаимодействием Рашбы и наведенной сверхпроводимостью установлено, что при изменении внешнего магнитного поля в такой системе реализуется аномальное поведение калорических эффектов, если только параметры нанопроволоки соответствуют топологически нетривиальной фазе. Отмеченные особенности обусловлены каскадом квантовых переходов, связанных с изменением фермионной четности основного состояния системы. Этот эффект может использоваться в качестве нового метода экспериментальной идентификации топологически нетривиальной фазы в нанопроволоке.

Проанализированы особенности транспортных характеристик гибридных структур, содержащих сверхпроводящую нанопроволоку в топологической фазе. В частности, для структуры полуметалл/сверхпроводящая проволока/полуметалл возникает нарушение симметрии токов, связанное с реализацией нетривиальной топологической фазы. Этот эффект может быть использован как для детектирования майорановских мод, так и для создания электронных устройств нового поколения.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты # 16-02-00073, 18-32-00443, 19-02-00348), Правительства Красноярского края, Красноярского краевого фонда науки в рамках научных проектов: "Проявление кулоновских взаимодействий и эффектов ограниченной геометрии в свойствах топологических краевых состояний наноструктур со спин-орбитальным взаимодействием" (# 18-42-243017), "Контактные явления и магнитный беспорядок в проблеме формирования и детектирования топологически защищенных краевых состояний в полупроводниковых наноструктурах" (# 18-42-243018), "Одноорбитальная эффективная модель ансамбля спин-поляронных квазичастиц в проблеме описания промежуточного состояния и псевдощелевого поведения купратных сверхпроводников" (# 18-42-240014).

С. В. Аксенов и А. О. Злотников выражают благодарность совету по грантам Президента РФ (проекты МК-3722.2018.2, МК-3594.2018.2).

1. M. Z. Hasan and C. L. Kane, Rev. Mod. Phys. **82**, 3045 (2010).
2. Ю. Е. Лозовик, УФН, **182**, 111 (2012).
3. S. R. Elliott and M. Franz, Rev. Mod. Phys. **87**, 137 (2015).
4. N. Read and D. Green, Phys. Rev. B **61** 10267 (2000).
5. A. Yu. Kitaev, Phys. Usp. **44**, 131 (2001).
6. J. D. Sau, R. M. Lutchyn, S. Tewari, and S. Das Sarma, Phys. Rev. Lett. **104**, 040502 (2010).
7. R. M. Lutchyn, J. D. Sau, and S. Das Sarma, Phys. Rev. Lett. **105**, 077001 (2010).
8. L. Fidkowski and A. Yu. Kitaev, Phys. Rev. B **81**, 134509 (2010).
9. S. Gangadharaiah, B. Braunecker, P. Simon, and D. Loss, Phys. Rev. Lett. **107**, 036801 (2011).
10. J. Klinovaja and D. Loss, Phys. Rev. B **90**, 045118 (2014).
11. T. Morimoto, A. Furusaki, and Ch. Mudry, Phys. Rev. B **92**, 125104 (2015).
12. M.-Y. Yao, L. Miao, N. L. Wang, J. H. Dil, M. Z. Hasan, D. D. Guan, C. L. Gao, C. Liu, D. Qian, and J. Jia, Phys. Rev. B **91**, 161411 (2015).
13. Y. Chen and H.-Y. Kee, Phys. Rev. B **97**, 085155 (2018).
14. Y. Sato, S. Matsuo, C.-H. Hsu, P. Stano, K. Ueda, Y. Takeshige, H. Kamata, J. S. Lee, B. Shojaei, K. Wickramasinghe, J. Shabani, C. Palmstrom, Y. Tokura, D. Loss, and S. Tarucha, Phys. Rev. B **99**, 155304 (2019).
15. J. Jang, D. G. Ferguson, V. Vakaryuk, R. Budakian, S. B. Chung, P. M. Goldbart, and Y. Maeno, Science **331**, 186 (2011).
16. C. L. M. Wong and K. T. Law, Phys. Rev. B **86**, 184516 (2012).
17. I. Martin and A. F. Morpurgo, Phys. Rev. B **85**, 144505 (2012).
18. Y.-M. Lu and Z. Wang, Phys. Rev. Lett. **110**, 096403 (2013).
19. Y.-M. Lu, T. Xiang, and D.-H. Lee, Nature Phys. **10**, 634 (2014).
20. A. Lau and C. Timm, Phys. Rev. B **90**, 024517 (2014).
21. Y. Nakajima, R. Hu, K. Kirshenbaum, A. Hughes, P. Syers, X. Wang, K. Wang, R. Wang, S. R. Saha, D. Pratt, J. W. Lynn, and J. Paglione, Science Advances **1**, e1500242 (2015).
22. S. Sasaki and T. Mizushima, Physica C: Superconductivity and its Applications **514**, 206 (2015).
23. C. Youmans, A. Ghazaryan, M. Kargarian, and P. Ghaemi, Phys. Rev. B **98**, 144517 (2018).
24. S. Zhu, L. Kong, L. Cao et al. (Collaboration), ArXiv:1904.06124 [Cond-Mat] (2019).
25. G. E. Volovik and V. M. Yakovenko, J. Phys. Condens. Matter **1**, 5263 (1989).
26. C. Wang and T. Senthil, Phys. Rev. B **89**, 195124 (2014).
27. V. Mourik, K. Zuo, S. M. Frolov, S. R. Plissard, E. P. A. M. Bakkers, and L. P. Kouwenhoven, Science **336**, 1003 (2012).
28. Y. Oreg, G. Refael, and F. von Oppen, Phys. Rev. Lett. **105**, 177002 (2010).
29. R. M. Lutchyn, E. P. A. Bakkers, L. P. Kouwenhoven, P. Krogstrup, C. M. Marcus, and Y. Oreg, Nat. Rev. Mater. **3**, 52 (2018).
30. K. Takada, H. Sakurai, E. Takayama-Muromachi, F. Izumi, R. A. Dilanian, and T. Sasaki, Nature **422**, 53 (2003).
31. Н. Б. Иванова, С. Г. Овчинников, М. М. Коршунов, И. М. Еремин, Н. В. Казак, УФН **179**, 837 (2009).
32. В. В. Вальков, Т. А. Валькова, Д. М. Дзебисашвили, С. Г. Овчинников, Письма в ЖЭТФ **75**, 450 (2002).
33. R. O. Zaitsev, Sov. Phys. JETP **41**, 100 (1975).

34. R. O. Zaitsev, *Diagram Methods in Theory of Superconductivity and Ferromagnetism*, URSS, Moscow (2004) [in Russian].
35. S. Zhou and Z. Wang, Phys. Rev. Lett. **100**, 217002 (2008).
36. W. Kohn and J. M. Luttinger, Phys. Rev. Lett. **15**, 524 (1965).
37. М. Ю. Каган, А. В. Чубуков, Письма в ЖЭТФ **47**, 525 (1988).
38. М. Ю. Каган, В. А. Мицкан, М. М. Коровушкин, УФН **185**, 785 (2015).
39. P. W. Anderson, Phys. Rev. **110**, 827 (1958).
40. В. В. Вальков, Т. А. Валькова, В. А. Мицкан, Письма в ЖЭТФ **102**, 399 (2015).
41. V. V. Val'kov, T. A. Val'kova, and V. A. Mitskan, JMMM **440**, 129 (2017).
42. G. E. Volovik, Письма в ЖЭТФ **66**, 492 (1997).
43. B. Braunecker, G. I. Japaridze, J. Klinovaja, and D. Loss, Phys. Rev. B **82**, 045127 (2010).
44. T.-P. Choy, J. M. Edge, A. R. Akhmerov, and C. W. J. Beenakker, Phys. Rev. B **84**, 195442 (2011).
45. M. Kjaergaard, K. Wolms, and K. Flensberg, Phys. Rev. B **85**, 020503 (2012).
46. B. Braunecker and P. Simon, Phys. Rev. Lett. **111**, 147202 (2013).
47. J. Klinovaja, P. Stano, A. Yazdani, and D. Loss, Phys. Rev. Lett. **111**, 186805 (2013).
48. В. В. Вальков, А. О. Злотников, Письма в ЖЭТФ **104**, 512 (2016).
49. K. Jiang, S. Zhou, and Z. Wang, Phys. Rev. B **90**, 165135 (2014).
50. K. Pasrija and S. Kumar, Phys. Rev. B **93**, 195110 (2016).
51. C. Weber, A. Lauchli, F. Mila, and T. Giamarchi, Phys. Rev. B **73**, 014519 (2006).
52. В. В. Вальков, А. О. Злотников, Письма в ЖЭТФ **109**, 769 (2019).
53. V. V. Val'kov, A. O. Zlotnikov, and M. S. Shustin, J. Magn. Magn. Mater. **459**, 112 (2018).
54. A. P. Schnyder, S. Ryu, A. Furusaki, and A. W. W. Ludwig, Phys. Rev. B **78**, 195125 (2008).
55. K. Ishikawa and T. Matsuyama, Nucl. Phys. B **280**, 523 (1987).
56. P. Ghosh, J. D. Sau, S. Tewari, and S. Das Sarma, Phys. Rev. B **82**, 184525 (2010).
57. V. Aleshkin, V. Gavrilenko, A. Ikonnikov, S. Krishtopenko, Yu. G. Sadofyev, and K. E. Spirin, Semiconductors **42**, 828 (2008).
58. H. A. Nilsson, P. Caroff, C. Thelander, M. Larsson, J. B. Wagner, L.-E. Wernersson, L. Samuelson, and H. Q. Xu, Nano Lett. **9**, 3151 (2009).
59. M. T. Deng, S. Vaitiekenas, E.B. Hansen, J. Danon, M. Leijnse, K. Flensberg, J. Nygard, P. Krogstrup, and C. M. Marcus, Science **354**, 1557 (2016).
60. C. Moore, C. Zeng, T. D. Stanescu, and S. Tewari, Phys. Rev. B **98**, 155314 (2018).
61. В. В. Вальков, В. А. Мицкан, М. С. Шустин, Письма в ЖЭТФ **12**, 762 (2017).
62. В. В. Вальков, В. А. Мицкан, М. С. Шустин, ЖЭТФ **156** (2019).
63. E. M. Stoudenmire, J. Alicea, O. A. Starykh, and M. P. A. Fisher, Phys. Rev. B **84**, 014503 (2011).
64. L. Zhu, M. Garst, A. Rosch, and Q. Si, Phys. Rev. Lett. **91**, 066404 (2003).
65. M. Garst and A. Rosch, Phys. Rev. B **72**, 205129 (2005).
66. C. Beenakker, Annu. Rev. Condens. Matter Phys. **4**, 113 (2013).
67. D. Sticlet, C. Bena, and P. Simon, Phys. Rev. Lett. **108**, 096802 (2012).
68. M. Guigou, N. Sedlmayr, J. Aguiar-Hualde, and C. Bena, Eur. Phys. Lett. **115**, 47005 (2016).
69. E. Prada, R. Aguado, and P. San-Jose, Phys. Rev. B **96**, 085418 (2017).
70. M. Serina, D. Loss, and J. Klinovaja, Phys. Rev. B **98**, 035419 (2018).
71. A. F. Andreev, Sov. Phys. JETP **19**, 1228 (1964).
72. J. J. He, T. K. Ng, P. A. Lee, and K. T. Law, Phys. Rev. Lett. **112**, 037001 (2014).
73. J. J. He, J. Wu, T.-P. Choy, X.-J. Liu, Y. Tanaka, and K. T. Law, Nat. Commun. **5**, 3232 (2014).
74. B. H. Wu, W. Yi, J. C. Cao, and G.-C. Guo, Phys. Rev. B **90**, 205435 (2014).
75. V. V. Val'kov and S. V. Aksenov, J. Magn. Magn. Mater. **465**, 88 (2018).
76. Л. В. Келдыш, ЖЭТФ **47**, 1515 (1964).
77. S. Datta, *Electronic Transport in mesoscopic systems*, Cambridge University Press, N.Y. (1995).
78. S. Datta, *Quantum transport: Atom to Transistor*, Cambridge University Press, N.Y. (2005).
79. B. H. Wu and J. C. Cao, Phys. Rev. B **85**, 085415 (2012).
80. V. V. Val'kov and S. V. Aksenov, Low Temp. Phys. **43**, 436 (2017).
81. V. V. Val'kov and S. V. Aksenov, J. Magn. Magn. Mater. **440**, 112 (2017).
82. R. S. Keizer, S. T. B. Goennenwein, T. M. Klapwijk, G. Miao, G. Xiao, and A. Gupta, Nature **439**, 825 (2006).
83. V. A. Khlus, Sov. Phys. JETP **66**, 1243 (1987).
84. B. Beri, J. N. Kupferschmidt, C. W. J. Beenakker, and P. W. Brouwer, Phys. Rev. B **79**, 024517 (2009).
85. J. N. Kupferschmidt and P. W. Brouwer, Phys. Rev. B **83**, 014512 (2011).
86. K. T. Law, P. A. Lee, and T. K. Ng, Phys. Rev. Lett. **103**, 237001 (2009).
87. J. Nilsson, A. R. Akhmerov, and C. W. J. Beenakker, Phys. Rev. Lett. **101**, 120403 (2008).
88. Y. Cao, P. Wang, G. Xiong, M. Gong, and X.-Q. Li, Phys. Rev. B **86**, 115311 (2012).