Письма в ЖЭТФ, том 110, вып. 11, с. 723 – 726 © 2019 г. 10 декабря

Интегрируемая $\mathfrak{gl}(n|n)$ теория Тоды и дуальная ей сигма-модель

А. В. Литвинов[1)]

Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН, 142432 Черноголовка, Россия

Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики", 119048 Москва, Россия

Поступила в редакцию 29 октября 2019 г.
После переработки 29 октября 2019 г.
Принята к публикации 31 октября 2019 г.

Исследуется явление дуальности между сигма-моделями и квантовыми теориями Тоды. Сделано утверждение о том, что $\mathfrak{gl}(n|n)$ аффинная теория Тоды ведет себя в режиме сильной связи как η-деформированная $\mathbb{CP}(n-1)$ сигма-модель, взаимодействующая с бозонным полем.

DOI: 10.1134/S0370274X19230012

Дуальность – интересное явление в современной теоретической физике [1]. Особенно дуальность типа "*weak/strong coupling*". Она связывает сильно взаимодействующий режим одной теории с пертурбативным режимом другой и наоборот. В этой статье будет исследована дуальность между интегрируемыми квантовыми теориями Тоды и η-деформированными сигма-моделями, следуя логике недавних работ [2, 3].

Мы рассмотрим $\mathfrak{gl}(n|n)$ аффинную теорию Тоды [4, 5]

$$\mathcal{A}_n = \int \Big(\frac{1}{8\pi}\,(\partial_a\Phi\cdot\partial_a\Phi) + \frac{1}{8\pi}\,(\partial_a\phi\cdot\partial_a\phi) + \\ + \Lambda\sum_{k=1}^{n}\big(e^{b\Phi_k - i\beta\phi_k} + e^{i\beta\phi_k - b\Phi_{k+1}}\big)\Big)\, d^2\xi, \tag{1}$$

где $\beta = \sqrt{1+b^2}$, $\phi = (\phi_1,\ldots,\phi_n)$, $\Phi = (\Phi_1,\ldots,\Phi_n)$ – два $n-$компонентных бозонных поля и $\Phi_{n+1} \overset{\text{def}}{=} \Phi_1$. Параметр b играет роль константы связи теории. Каждая экспонента в (1) имеет фермионные скейлинговые размерности $\Delta = \bar{\Delta} = \frac{1}{2}$ и поэтому параметр Λ имеет размерность массы. Теория (1) содержит тривиальную $U(1)$ часть $\chi = \beta\sum\Phi_k - ib\sum\phi_k$, которая ни с чем не взаимодействует. Для того чтобы ее явно выделить, рассмотрим следующее преобразование полей (здесь $Z = \sum_{k=1}^{n}(\Phi_k + i\phi_k)$)

$$Z \to (\beta + b)Z, \quad \bar{Z} \to (\beta - b)\bar{Z}. \tag{2}$$

После этого преобразования действие приобретает вид

$$\mathcal{A}_n' = \int \Big(\frac{1}{8\pi}\,(\partial_a\Phi\cdot\partial_a\Phi) + \frac{1}{8\pi}\,(\partial_a\phi\cdot\partial_a\phi) + \\ + \Lambda\sum_{k=1}^{n}\big(e^{b(h_k\cdot\Phi) - i\beta(\mathfrak{h}_k\cdot\phi)} + e^{i\beta(\mathfrak{h}_k\cdot\phi) - b(h_{k+1}\cdot\Phi)}\big)\Big)\, d^2\xi, \tag{3}$$

где $h_k = e_k - \frac{1}{n}(e_1 + \ldots + e_n)$ и $\mathfrak{h}_k = e_k - \frac{\beta-1}{n\beta}(e_1 + \cdots + e_n)$, а вектора e_k образуют ортонормированный базис в $\mathbb{R}^n$. Из действия (3) сразу видно, что поле "центра масс" $\sum_k \Phi_k$ тривиально отщепляется.

Для того чтобы определить квантовую теорию поля (1) корректно, необходимо также задать область изменения константы связи b. Имеется два режима: область слабой связи $b \to 0$ и область сильной связи $b \to \infty$. В области $b \to 0$ к действию (1) необходимо добавить члены, регуляризующие ультрафиолетовое поведение

$$-\frac{\pi\Lambda^2}{2b^2}\sum_{k=1}^{n}\int e^{b(\Phi_k - \Phi_{k+1})}\, d^2\xi. \tag{4}$$

Модель описываемая действием (1) является интегрируемой в смысле разложения по параметру Λ. В пределе $\Lambda \to 0$ можно построить бесконечную башню локальных интегралов движения всех спинов $(\mathbf{I}_s^{(0)}, \bar{\mathbf{I}}_s^{(0)})$, $s = 1, 2, \ldots$

$$\mathbf{I}_s^{(0)} = \oint \left(\sum_{k=1}^{n} \big(b^{s-2}(\partial\Phi_k)^s + (i\beta)^{s-2}(\partial\phi_k)^s \big) + \ldots \right) d\xi, \tag{5}$$

и аналогичное выражение для $\bar{\mathbf{I}}_s^{(0)}$. Используя аналог квантового преобразования Миуры [6], можно, в принципе, написать явные формулы для простейших интегралов. Имеется эквивалентный способ за-

1)e-mail: litvinov@itp.ac.ru

дать эту систему интегралов движения, как коммутант набора экранирующих операторов

$$\mathcal{S}_k = \oint e^{b\Phi_k - i\beta\phi_k} d\xi, \quad \tilde{\mathcal{S}}_k = \oint e^{i\beta\phi_k - b\Phi_{k+1}} d\xi, \quad k = 1, \ldots, n, \tag{6}$$

которые отвечают экспоненциальным членам в действии (1). Следует подчеркнуть что интегралы $\mathbf{I}_s^{(0)}$ определены в теории свободного безмассового бозонного поля. Они являются пределами полных интегралов при $\Lambda \to 0$. Нахождение поправок по Λ является, вообще говоря, очень сложной задачей.

Другой тест на интегрируемость можно провести в рамках пертурбативного анализа по $b \to 0$ с фиксированным параметром Λ. Для этих целей удобно использовать дуальность Колемана–Мандельштама и заменить бозонные поля ϕ_k на дираковские фермионы ψ_k. Эта замена приводит к теории n взаимодействующих дираковских фермионов и n бозонных полей Φ_k, имеющей скрытую $\mathfrak{gl}(n)$ симметрию. Работая пертурбативно по параметру b, можно показать, что рассеяние фундаментальных частиц в этой теории имеет все свойства факторизованного рассеяния [7]. В частности, обнаруживается отсутствие множественного рождения – одно из замечательных свойств интегрируемых квантовых теорий поля. Точная $S-$матрица для этой теории была недавно получена в работе [7].

В режиме сильной связи $b \to \infty$ действие (1) не имеет смысла. Однако, можно использовать следующее наблюдение. Каждая пара фермионных скринингов (6) задает конформную алгебру $SU(2)_\kappa/U(1)$ косета с параметром $\kappa = -2 - b^2$. Хорошо известно, что та же алгебра может быть задана при помощи оператора

$$\mathcal{W} = \oint \left(b\partial\Phi_k - i\beta\partial\phi_k\right) e^{b^{-1}(\Phi_k - \Phi_{k+1})} d\xi, \tag{7}$$

известного как экранирующий заряд Вакимото. Этот факт можно интерпретировать таким образом, что теория

$$\tilde{\mathcal{A}}_n = \int \Bigg(\frac{1}{8\pi}\left(\partial_a\Phi\cdot\partial_a\Phi\right) + \frac{1}{8\pi}\left(\partial_a\phi\cdot\partial_a\phi\right) + \tilde{\Lambda}\sum_{k=1}^{n} |b\partial\Phi_k - i\beta\partial\phi_k|^2 e^{\frac{(\Phi_k - \Phi_{k+1})}{b}} \Bigg) d^2\xi, \tag{8}$$

имеет ту же самую интегрируемую структуру в пределе $\tilde{\Lambda} \to 0$, что и теория (1) в пределе $\Lambda \to 0$. На самом деле действие (8) имеет смысл только в области $b \to \infty$. Для того чтобы регуляризовать его ультрафиолетовое поведение, необходимо добавить контрчлены. Полное перенормированное действие будет иметь вид сигма-модели

$$\tilde{\mathcal{A}}_n = \frac{1}{8\pi}\int G_{\mu\nu}(\boldsymbol{X}|\tilde{\Lambda}, b^2)\partial_a X^\mu \partial_a X^\nu d^2\xi, \quad \boldsymbol{X} = (\Phi_1, \ldots, \Phi_n, \phi_1, \ldots, \phi_n). \tag{9}$$

Естественно, что явный вид метрики $G_{\mu\nu}(\boldsymbol{X}|\tilde{\Lambda}, b^2)$ может быть очень сложным. К тому же, он будет явным образом зависеть от выбранной схемы регуляризации. Единственное, что можно сделать, это найти его в квазиклассическом приближении $b \to \infty$. Определим перемасштабированные координаты

$$(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) = b^{-1}(\Phi_1, \ldots, \Phi_n, \phi_1, \ldots, \phi_n), \quad \tilde{\Lambda}b^2 = e^t, \tag{10}$$

и сделаем следующий анзац для метрики, который согласован с симметрией задачи (здесь $z_k = x_k - iy_k$)

$$ds^2 = \sum_{k=1}^{n} dz_k d\bar{z}_k + \mu(t)\left(\sum_{k=1}^{n} dz_k\right)^2 + 2\sum_{k=1}^{n} dz_k^2 \sum_{l=1}^{n} \lambda_l(t) e^{(\boldsymbol{\alpha}_k + \cdots + \boldsymbol{\alpha}_{k+l-1}, \boldsymbol{x})}, \tag{11}$$

где $\boldsymbol{\alpha}_k = \boldsymbol{\alpha}_{n+k}$ являются простыми корнями алгебры $\mathfrak{sl}(n)$: $(\boldsymbol{\alpha}_k, \boldsymbol{x}) = x_k - x_{k+1}$, $x_{k+n} = x_k$. Метрика (11) должна эволюционировать с ростом ренормгрупового времени $-\infty < t < t_0$ согласно уравнениям потока Риччи [8]

$$R_{\mu\nu} + \nabla_\mu V_\nu + \nabla_\nu V_\mu = -\dot{G}_{\mu\nu}, \qquad V_\mu = \nabla_\mu \Phi, \tag{12}$$

где векторное поле V_μ описывает эффект перенормировки полей. Предположим, для простоты, что это векторное поле является градиентом скалярной функции: $V_\mu = \nabla_\mu\Phi$. Тогда можно найти решение уравнений (12) с желаемой ультрафиолетовой асимптотикой

$$\mu(t) = -\frac{2}{n}\frac{e^{nt}}{e^{nt}-1}, \; \lambda_k(t) = \frac{e^{kt}}{e^{nt}-1}, \; \Phi = \sum_{k=1}^{n} x_k. \tag{13}$$

Удобно сделать преобразование буста

$$\sum_{k=1}^{n} z_k \to \nu\sum_{k=1}^{n} z_k, \quad \sum_{k=1}^{n} \bar{z}_k \to \nu^{-1}\sum_{k=1}^{n} \bar{z}_k, \tag{14}$$

которое эффективно приводит к отщеплению координаты “центра-масс” $\sum_k z_k$ при стремлении $\nu \to 0$. Это эквивалентно преобразованию исходных полей (2), которое фактически изменяет поведение полей в квазиклассическом пределе $b \to \infty$. Результирующая метрика принимает вид

$$ds^2 = |d\boldsymbol{z}|^2 + \frac{2}{e^{nt}-1}\sum_{k=1}^{n}(h_k, d\boldsymbol{z})^2 f_k(x),$$
$$f_k(x) = \sum_{l=1}^{n} e^{lt} e^{(\boldsymbol{\alpha}_k+\dots+\boldsymbol{\alpha}_{k+l-1},\boldsymbol{x})}. \tag{15}$$

Заметим, что для $n=2$ метрика (15) равна

$$ds^2 = dzd\bar{z} + \frac{1}{e^{2t}-1}\left(e^{t+x}+e^{t-x}+2e^{2t}\right)dz^2. \tag{16}$$

Ее можно преобразовать к метрике, которая T-дуальна "sausage" метрике [9]

$$ds^2 = \frac{\kappa d\zeta^2}{4(1-\zeta^2)(1-\kappa^2\zeta^2)} + \frac{4(1-\kappa^2\zeta^2)d\varphi^2}{\kappa(1-\zeta^2)},$$
$$\kappa = -\tanh t, \tag{17}$$

при помощи простой замены координат

$$\cosh x = \frac{1+\zeta^2}{1-\zeta^2} \quad y = \frac{\varphi}{4} - i\log\left(\frac{(1-\zeta)(1+\kappa\zeta)}{(1+\zeta)(1-\kappa\zeta)}\right). \tag{18}$$

Хорошо известно, что "*sausage*" модель совпадает с η-деформированной $\mathbb{CP}(1)$ сигма-моделью. Можно предположить что наша общая метрика (15) совпадает с η-деформированной метрикой $\mathbb{CP}(n-1) = SU(n)/SU(n-1)U(1)$ сигма-модели после применения преобразования T-дуальности по всем изометрическим направлениям.

Действие общей η-деформированной (здесь мы выбираем $\eta = i\kappa$) G/H сигма-модели имеет вид [10]

$$\mathcal{S} = \frac{\kappa}{2}\int \mathrm{Tr}\Big(\mathbf{g}\partial\mathbf{g}^{-1}\,\mathrm{P_c}\frac{1}{1-i\kappa\mathcal{R}_{\mathbf{g}}\circ\mathrm{P_c}}\,\mathbf{g}\bar{\partial}\mathbf{g}^{-1}\Big)d^2\xi, \tag{19}$$

где $\boldsymbol{g}\in G$, $\mathcal{R}_{\mathbf{g}} = \mathrm{Ad}\,\mathbf{g}\circ\mathcal{R}\circ\mathrm{Ad}\,\mathbf{g}^{-1}$ и $\mathrm{P_c}$ – проектор на фактор-пространство G/H. В нашем случае $G = SU(n)$ и $H = U(n-1) = U(1)\otimes SU(n-1)$. Оператор $\mathcal{R}$ действует на алгебре Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{c}\oplus_{\alpha>0}\mathfrak{g}_\alpha\oplus_{\alpha>0}\mathfrak{g}_{-\alpha}$ следующим образом

$$\mathcal{R}\Big|_{\mathfrak{c}} = 0, \qquad \mathcal{R}\Big|_{\mathfrak{g}_\alpha} = i, \qquad \mathcal{R}\Big|_{\mathfrak{g}_{-\alpha}} = -i, \tag{20}$$

и по определению $\mathcal{R}_{\mathbf{g}} = A^{-1}\mathcal{R}A$, $A_{ab} = \langle t_a\,\mathbf{g}\,t_b\,\mathbf{g}^{-1}\rangle$. Рассмотрим для примера случай $G = SU(3)$. Выберем следующий базис в алгебре Ли $\mathfrak{su}(3)$

$$t_1 = \begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \quad t_2 = \begin{pmatrix}0&-i&0\\i&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$
$$t_3 = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \quad t_4 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{pmatrix} \tag{21}$$

и

$$t_5 = \begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}, \quad t_6 = \begin{pmatrix}0&0&-i\\0&0&0\\i&0&0\end{pmatrix},$$
$$t_7 = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}, \quad t_8 = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-i\\0&i&0\end{pmatrix}. \tag{22}$$

Генераторы $\{t_1,t_2,t_3,t_4\}$ образуют подалгебру $\mathfrak{h} = \mathfrak{su}(2)\oplus\mathfrak{u}(1)$. Удобно параметризовать элемент фактор-пространства следующим образом

$$\mathbf{g}^{-1} = e^{\frac{i(\psi-\phi)}{4}t_3 - \frac{i(3\phi+\psi)}{4\sqrt{3}}t_4} e^{\frac{i\theta}{2}t_5} e^{i(\chi+\frac{\pi}{2})t_7}. \tag{23}$$

Для этого выбора координат ϕ и ψ, очевидно, отвечают изометрическим направлениям. Используя эту параметризацию, можно явно вычислить метрику и B-поле b проделать преобразование T-дуальности по отношению к изометрическим координатам ϕ и ψ. В результате вычисления оказывается, что B-поле тождественно исчезает, а метрика принимает вид

$$\begin{aligned}
ds^2 = \kappa\Big(&d\chi^2 + \frac{\sin^2\chi}{4}d\theta^2 - \\
&- 2i\sin\theta d\theta\left(d\psi\left(\sin^2\chi - \csc^2\theta\right) + d\phi\cot\theta\csc\theta\right) - \\
&- 4i\tan\chi d\chi\left(d\phi\cot^2\chi - d\psi\cos\theta\right) + \\
&+ \frac{4d\phi^2\left((1-\kappa^2)\csc^2\theta\csc^2\chi + \kappa^2\right)}{\kappa^2} + \\
&+ \frac{8d\psi d\phi(\kappa^2-1)\cot\theta\csc\theta\csc^2\chi}{\kappa^2} + \\
&+ \frac{d\psi^2\left(4\left(1-\kappa^2\right)\csc^2\theta\csc^2\chi + 2\kappa^2\sin^2\theta\cos2\chi\right)}{\kappa^2} + \\
&+ 3(\cos2\theta+3)d\psi^2 - \\
&- \frac{d\psi^2\left(2\sec^2\chi\left(\kappa^2\cos2\theta + \kappa^2 - 2\right)\right)}{\kappa^2}\Big).
\end{aligned} \tag{24}$$

Можно проверить, что эта метрика удовлетворяет уравнению потока Риччи (12) с $\Phi = -\log(\sin2\chi\sin\chi\sin\theta) - 8i\phi$ и $\kappa = -\tanh 6t$. Удивительно, но (24) в точности совпадает с метрикой (15) для $n=3$ и $q = e^{8t}$ при следующей довольно сложной замене координат

$$e^{-(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{x})} = q^{-1}\sin^2\frac{\theta}{2}\tan^2\chi\left(q^{\frac{3}{2}} + (1-q^{\frac{3}{2}})\cos^2\frac{\theta}{2}\sin^2\chi\right),$$

$$e^{(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{x})} = q^{-\frac{1}{2}}\cos^2\frac{\theta}{2}\tan^2\chi\left(1 - (1-q^{\frac{3}{2}})\sin^2\frac{\theta}{2}\sin^2\chi\right),$$

$$(\boldsymbol{\alpha}_1, y) = 8\varphi - \\ - 2i \log \left(\tan\frac{\theta}{2} \left(q^{\frac{3}{2}} + (1 - q^{\frac{3}{2}}) \cos^2\frac{\theta}{2} \sin^2\chi \right) \right),$$

$$(\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2, y) = 4\varphi - 12\psi - \\ - 2i \log \left(\sin\frac{\theta}{2} \tan\chi \left(1 - (1 - q^{\frac{3}{2}}) \sin^2\frac{\theta}{2} \sin^2\chi \right) \right).$$

Мы также проверили аналогичное утверждение для $\mathbb{CP}(3)$ сигма-модели, подтвердив таким образом нашу общую гипотезу. Явные формулы в этом случае слишком сложны, чтобы их приводить здесь явно.

Результаты полученные в этой работе, подтверждают гипотезу о том, что $\mathfrak{gl}(n|n)$ квантовая теория Тоды ведет себя в режиме сильной связи как модель T-дуальная η-деформированной $\mathbb{CP}(n-1)$ сигма-модели. На первый взгляд, это утверждение выглядит противоречивым. Хорошо известно, что $\mathbb{CP}(n-1)$ сигма-модель не является интегрируемой на квантовом уровне. С другой стороны, из явного вида действия (3) можно заметить, что в пределе $b \to \infty$ происходит отщепление поля $\sum_k \phi_k$. Таким образом в пределе $b = \infty$ теория, действительно, совпадает с деформированной $\mathbb{CP}(n-1)$ сигма-моделью плюс невзаимодейтсвующее свободное поле. При вычислении петлевых поправок взаимодействие между двумя частями должно появиться таким образом, чтобы восстановить квантовую интегрируемость. Точный механизм этого явления не известен и заслуживает того, чтобы быть исследованным.

Естественно, что наша гипотеза об эквивалентности двух теорий нуждается в дальнейших тестах. Дополнительные проверки были сделаны В. Фатеевым в [7]. Им же были независимо получены некоторые из результатов этой работы. Автор выражает ему благодарность за сообщение своих результатов и за научное руководство на протяжении многих лет.

Результаты, полученные в настоящей работе, допускают различные обобщения. Наиболее интересным, на наш взгляд, является вопрос об интегрируемых деформациях $N = (2,2)$ суперсимметричных сигма-моделей и их дуальном описании. При этом из-за существования расширенной суперсимметрии возникает другой подход, основанный на суперсимметричной локализации и возможности точного вычисления статсуммы (см., например, [11, 12]). Сравнение этих двух подходов является, на наш взгляд, достаточно интересным.

Работа выполнена при поддержке Лаборатории зеркальной симметрии НИУ ВШЭ, грант Правительства РФ Договор # 14.641.31.0001.

1. J. Polchinski, Stud. Hist. Philos. Mod. Phys. **59**, 6 (2017); arXiv:1412.5704.
2. V. A. Fateev and A. V. Litvinov, JHEP **11**, 204 (2018); arXiv:1804.0339.
3. A. V. Litvinov and L. A. Spodyneiko, JHEP **11**, 139 (2018); arXiv:1804.0708.
4. A. Litvinov and L. Spodyneiko, JHEP **11**, 138 (2016); arXiv:1609.0627.
5. M. Bershtein, B. Feigin, and G. Merzon, Sel. Math. New Ser. **24**, 21 (2018); arXiv:1512.0877.
6. T. Procházka and M. Rapčák, JHEP **05**, 159 (2019); arXiv:1808.0883.
7. V. Fateev, arXiv:1902.0281.
8. D. H. Friedan, Ann. Phys. **163**, 318 (1985).
9. V. A. Fateev, E. Onofri, and A. B. Zamolodchikov, Nucl. Phys. B **406**, 521 (1993).
10. F. Delduc, M. Magro, and B. Vicedo, JHEP **11**, 192 (2013); arXiv:1308.3581.
11. K. Aleshkin and A. Belavin, JETP Lett. **108**(10), 705 (2018); arXiv:1806.02772 [hep-th].
12. K. Aleshkin, A. Belavin, and A. Litvinov, Pis'ma v ZhETF **108**(10), 725 (2018) [JETP Lett. **108**(10), 710 (2018)].