

Алгоритм построения точных решений плоской нестационарной задачи о движении жидкости со свободной границей

Е. Н. Журавлева^{+*}, Н. М. Зубарев^{×◦1)}, О. В. Зубарева[×], Е. А. Карabut^{+*}

⁺ Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева Сибирского отделения РАН, 630090 Новосибирск, Россия

^{*} Новосибирский государственный университет, 630090 Новосибирск, Россия

[×] Институт электрофизики Уральского отделения РАН, 620016 Екатеринбург, Россия

[◦] Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, 119991 Москва, Россия

Поступила в редакцию 14 августа 2019 г.

После переработки 22 августа 2019 г.

Принята к публикации 23 августа 2019 г.

Исследуются плоские потенциальные нестационарные течения идеальной несжимаемой жидкости со свободной поверхностью в отсутствие внешних сил и капиллярности. Предложен алгоритм построения точных решений для таких течений, основанный на анализе условий совместности уравнений движения и вспомогательного комплексного уравнения переноса. Его использование позволило радикально расширить список известных точных нетривиальных решений рассматриваемой классической задачи, еще несколько лет назад сводившийся к нескольким решениям Дирихле: течения, для которых граница жидкости представляет собой параболу, эллипс или гиперболу. В рамках алгоритма удается как воспроизвести недавно найденный класс решений, задаваемый уравнением Хопфа на комплексную скорость, так и найти принципиально новый широкий класс решений, для которого течения описываются уравнением Хопфа на обратную комплексной скорости величину.

DOI: 10.1134/S0370274X19190032

1. Введение. Рассматривается классическая задача о потенциальном нестационарном течении идеальной несжимаемой жидкости со свободной границей. Течение считается плоским; внешние силы и капиллярность не учитываются. До недавнего времени был известен единственный класс точных решений этой задачи – нестационарные течения с линейным полем скоростей (компоненты скорости u и v являются линейными функциями координат x и y), открытый Дирихле более чем полтора века назад [1].

В ряде исследований динамики границы жидкости, проводимых в рамках малоуглового приближения (считалось, что граница лишь незначительно отклоняется от плоской), задача описания ее эволюции сводилась к уравнению Хопфа на комплексную скорость ($U \equiv u - iv$) жидкости, которая является аналитической функцией пространственной переменной $z = x + iy$. Так, уравнение Хопфа

$$U_t + UU_z = O(\alpha^3)$$

(здесь α – малый параметр – характерный угол наклона границы) возникает при анализе динамики

свободной границы идеальной несжимаемой жидкости в пренебрежении поверхностными силами и силой тяжести [2, 3]. Комплексное уравнение Хопфа в форме

$$U_t + iU_z + UU_z = O(\alpha^3)$$

получалось при построении слабонелинейной теории развития неустойчивости Тонкса–Френкеля (неустойчивости границы проводящей жидкости во внешнем электрическом поле) [4, 5]. Наконец, в работе [6] было выведено уравнение

$$U_t + iU_z + e^{i\gamma}UU_z = O(\alpha^3),$$

описывающее эволюцию поверхности раздела двух несмешивающихся жидкостей при развитии неустойчивости Кельвина–Гельмгольца (здесь γ – вещественный параметр, зависящий от отношения плотностей жидкостей). Во всех указанных случаях уравнение Хопфа в различных модификациях описывало течение жидкости приближенно: учитывались лишь квадратично нелинейные слагаемые в рамках теории возмущений по малому параметру α .

Появление уравнения Хопфа на комплексную скорость жидкости в целом ряде задач побудило авторов недавних работ [7–9] целенаправленно исследовать

¹⁾e-mail: nick@iep.uran.ru

довать возможность его использования для построения точных решений (т.е. вне рамок малоуглового приближения) уравнений движения жидкости со свободной границей. В итоге было продемонстрировано, что решения комплексного уравнения Хопфа

$$U_t + UU_z = 0 \quad (1)$$

описывают плоские нестационарные течения идеальной жидкости, особенностью которых является нулевое значение ускорения жидкости на свободной границе: $du/dt = 0$ и $dv/dt = 0$. При этом ускорение отлично от нуля внутри жидкости.

В настоящей работе предложен алгоритм построения точных решений плоской нестационарной задачи о движении жидкости со свободной границей, основанный на предположении о том, что течение жидкости удовлетворяет комплексному уравнению переноса общего вида

$$U_t + C(U, t)U_z = 0, \quad (2)$$

где $C(U, t)$ – некоторая функция (в частном случае $C(U, t) = U$ это уравнение сводится к (1)). Использование алгоритма позволило нам открыть новый класс точных решений рассматриваемой задачи, задаваемый нелинейным уравнением переноса

$$U_t + U_z/U = 0.$$

Предложенный в работе подход может иметь важное значение для общей проблемы интегрируемости уравнений движения жидкости со свободной границей [10–12].

2. Постановка задачи. Выпишем уравнения для плоского потенциального течения идеальной несжимаемой жидкости, плотность которой равна единице. Предполагаем, что жидкость занимает изменяющуюся область Ω_t , граница которой $\partial\Omega_t$ является свободной. В области Ω_t должны выполняться уравнения Эйлера:

$$u_t + uu_x + vu_y = -p_x, \quad (3)$$

$$v_t + uv_x + vv_y = -p_y, \quad (4)$$

где $u(x, y, t)$ и $v(x, y, t)$ – x - и y -компоненты вектора скорости, $p(x, y, t)$ – давление. Для безвихревого течения несжимаемой жидкости компоненты скорости связаны соотношениями

$$u_x = -v_y, \quad u_y = v_x, \quad (5)$$

которые являются соотношениями Коши–Римана для комплексной скорости $U(z, t) = u(x, y, t) -$

$iv(x, y, t)$. В отсутствие внешних сил и капиллярности, не теряя общности, можно положить давление на свободной границе $\partial\Omega_t$ равным нулю (динамическое граничное условие):

$$p|_{\partial\Omega_t} = 0. \quad (6)$$

Кинематическое граничное условие (условие того, что граница движется со скоростью, совпадающей с нормальной компонентой скорости находящихся на ней жидких частиц) сводится, с учетом (6), к требованию равенства нулю на $\partial\Omega_t$ полной производной давления:

$$\left. \frac{dp}{dt} \right|_{\partial\Omega_t} = p_t + up_x + vp_y|_{\partial\Omega_t} = 0. \quad (7)$$

Ключевая идея настоящей работы заключается в том, чтобы взять комплексную скорость U не произвольно, а потребовать, чтобы она удовлетворяла комплексному уравнению переноса (2). В разделах 3 и 4 мы сформулируем алгоритм выбора входящей в (2) функции $C(U, t)$, позволяющий обеспечить совместность интегрируемого уравнения (2) с уравнениями движения (3)–(7) и, тем самым, строить их точные решения.

3. Условия совместности. Рассмотрим сначала условия совместности переопределенной системы уравнений (2)–(5). Будем использовать для давления следующее представление:

$$p(x, y, t) = P(u(x, y, t), v(x, y, t), t). \quad (8)$$

Разбивая функцию $C(U)$ на вещественную и мнимую части

$$C(U, t) = a(u, v, t) + ib(u, v, t), \quad (9)$$

получим соотношения Коши–Римана, которым должны удовлетворять вещественные функции a и b :

$$a_u = -b_v, \quad a_v = b_u. \quad (10)$$

Уравнение переноса (2) при разделении вещественной и мнимой частей дает:

$$u_t = -au_x - bv_x, \quad v_t = bu_x - av_x. \quad (11)$$

Исключая производные по времени из уравнений Эйлера (3) и (4) при помощи (11), используя представление (8) для давления, а также избавляясь от производных по y при помощи соотношений Коши–Римана (5), находим

$$\begin{aligned} -au_x - bv_x + uu_x + vv_x &= -P_u u_x - P_v v_x, \\ bu_x - av_x + uv_x - vu_x &= -P_u v_x + P_v u_x. \end{aligned}$$

Если теперь сгруппировать члены при производных u_x и v_x , получим:

$$\begin{aligned} u_x(-a + u + P_u) + v_x(-b + v + P_v) &= 0, \\ u_x(b - v - P_v) + v_x(-a + u + P_u) &= 0. \end{aligned}$$

Несложно заметить, что эти уравнения превращаются в тождества, если справедливо:

$$a = P_u + u, \quad b = P_v + v. \quad (12)$$

Подставляя эти выражения в условия Коши–Римана для функций a и b (10), находим, что давление P должно удовлетворять уравнению Пуассона в терминах переменных u и v , т.е. в плоскости годографа:

$$P_{uu} + P_{vv} = -2. \quad (13)$$

Его конкретное решение позволяет при помощи (12) найти функции a и b и затем, используя (9), определить:

$$C = P_u + iP_v + u + iv. \quad (14)$$

Решая линейное уравнение (13), находим для давления P и для искомой функции C :

$$P(u, v, t) = -\frac{u^2 + v^2}{2} + \text{Re } A(U, t), \quad (15)$$

$$C(U, t) = A_U(U, t), \quad (16)$$

где A – некоторая аналитическая функция комплексной скорости в области Ω_t .

Уравнения (13) и (14), а также их решения (15) и (16) обеспечивают совместность уравнения переноса (2) с уравнениями движения (3)–(5). Понятно, что требуется также проверить совместность описываемых (2) течений с динамическим (6) и кинематическим (7) граничными условиями. Этот вопрос будет рассмотрен в следующем разделе для двух простейших – одномерных – решений уравнения Пуассона (13).

4. Точные решения. Рассмотрим в первую очередь случай, когда давление зависит лишь от одной компоненты скорости, $P = P(v)$ (случай I). Уравнение Пуассона (13) принимает тогда вид $P_{vv} = -2$, откуда получаем для P (см. также [13]):

$$P(v) = -v^2. \quad (17)$$

Другой одномерный случай соответствует ситуации, когда распределение давления в плоскости u и v является осесимметричным: $P = P(q)$, где $q = \sqrt{u^2 + v^2}$ – абсолютное значение скорости жидкости (случай II). Тогда уравнение Пуассона принимает вид $P_{qq} + P_q/q = -2$, откуда находим для P :

$$P(q) = \ln q - q^2/2 + 1/2. \quad (18)$$

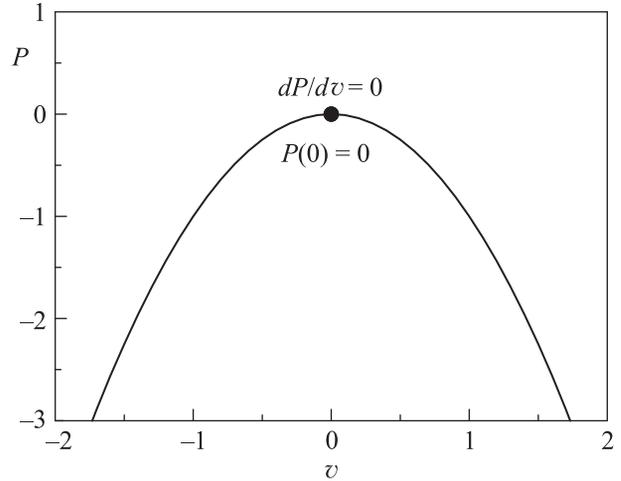


Рис. 1. Описываемая формулой (17) зависимость давления P от y -компоненты скорости v (случай I). В этой зависимости имеется экстремум (максимум) в точке $v = 0$; ему соответствует $P = 0$

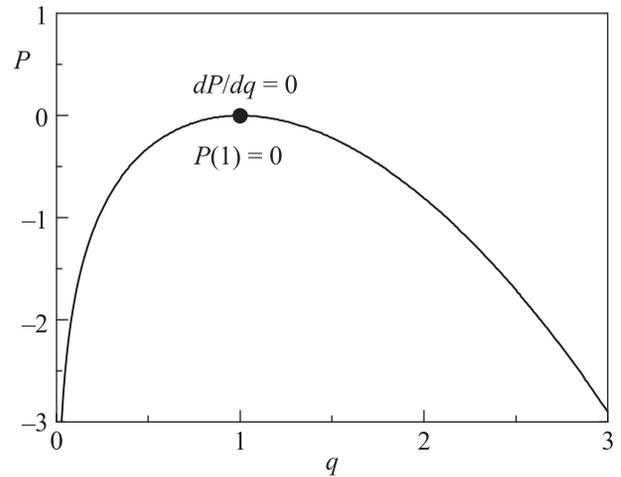


Рис. 2. Описываемая формулой (18) зависимость давления P от абсолютного значения скорости жидкости $q = |U|$ (случай II). В этой зависимости имеется экстремум (максимум) в точке $q = 1$; ему соответствует $P = 0$

Зависимости давления от скорости (17) и (18) показаны на рис. 1 и 2, соответственно. Видно, что в обоих случаях зависимость имеет единственный экстремум (максимум), относящийся к нулевому значению давления:

$$\begin{aligned} P|_{v=0} = 0, \quad \left. \frac{dP}{dv} \right|_{v=0} &= 0 \quad (\text{случай I}), \\ P|_{q=1} = 0, \quad \left. \frac{dP}{dq} \right|_{q=1} &= 0 \quad (\text{случай II}). \end{aligned}$$

Для случая I он соответствует условию $v = 0$, а для случая II – условию $q = 1$. В этих точках автоматически выполняются как динамические, так и кинематические граничные условия. Действительно, полная производная давления дает в них нули:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{dP}{dv} \frac{dv}{dt} = -2v \frac{dv}{dt} = 0 \quad (\text{случай I}),$$

$$\frac{dp}{dt} = \frac{dP}{dq} \frac{dq}{dt} = \left(\frac{1}{q^2} - 1 \right) \left(u \frac{du}{dt} + v \frac{dv}{dt} \right) = 0 \quad (\text{случай II}).$$

Таким образом, мы доказали, что оба одномерных решения (17) и (18) уравнения Пуассона (13) обеспечивают выполнение всех требуемых условий на движущейся свободной границе.

Для случая I формула (14) дает $C = U$ и, соответственно, течение определяется уравнением Хопфа (1). Граница жидкости задается условием $v = 0$, т.е. для описываемых (1) течений одна из компонент скорости на границе жидкости равна нулю. Таким образом, мы воспроизвели результат работ [7, 8].

Отметим, что если взять $P = P(v, t)$, то решение (13) дает вместо (17) $P = -v^2 + c(t)v + d(t)$, и тогда входящая в уравнение переноса (2) функция C будет зависеть от времени: $C(U, t) = U + ic(t)$. Однако это не приводит к построению нового класса решений. Получаемые решения отличаются от решений, соответствующих случаю I, переходом в движущуюся с ускорением систему координат.

Рассмотрение случая II приводит к новому классу точных решений задачи. Для давления (18) формула (14) дает $C = 1/U$ и, соответственно, течение задается нелинейным уравнением

$$U_t + U_z/U = 0. \quad (19)$$

Граница жидкости определяется условием $q \equiv |U| = 1$, т.е. для описываемых (19) течений абсолютное значение скорости на свободной поверхности не меняется при ее движении – оно равно единице для всех жидких частиц на границе. Отметим, что (19) превращается в уравнение Хопфа при введении новой функции – обратной комплексной скорости U^{-1} .

5. Динамика свободной границы. Для случая I распределение поля скоростей дается решением уравнения Хопфа (1) [7, 8, 13]:

$$z = F(U) + tU, \quad (20)$$

куда входит произвольная комплексная функция F . Эволюция границы, которая параметризуется условием $U = u$, где $-\infty < v < \infty$ (т.е. жидкость занимает полуплоскость в плоскости годографа U), задается тогда параметрическими выражениями

$$x = \operatorname{Re} F(u) + tu, \quad y = \operatorname{Im} F(u). \quad (21)$$

Соответствующие течения могут быть интерпретированы как возмущения исходного течения с линейным полем скоростей $U = z/t$, для которого занимаемая жидкостью область представляет собой полуплоскость в исходных переменных x и y (случай $F = 0$). Решения (21) при различном выборе F могут описывать формирование на границе точек заострения, пузырей и капель (см. примеры течений в [13]). Отметим, что в докладе “Are equations of deep water with a free surface integrable?” [14] (Russian-French Workshop “Mathematical Hydrodynamics”, Новосибирск, 2016, в соавт. с А. И. Дьяченко) ак. В. Е. Захаров указывал на то, что уравнения на возмущения автомодельного течения $U = z/t$, рассматриваемые в конформных переменных, допускают широкий класс точных решений. По всей видимости, эти решения имеют связь с решением (20) уравнения Хопфа и дают аналогичные примеры течений.

Для случая II, когда нестационарное течение описывается уравнением (19), распределение поля скоростей дается выражением

$$z = F(U) + t/U, \quad (22)$$

куда также входит произвольная комплексная функция F . Свободная граница соответствует единичной окружности $|U| = 1$ в плоскости U (область Ω_t в плоскости U соответствует либо кругу единичного радиуса, либо внешности такого круга), так что ее можно параметризовать выражением $U = e^{i\theta}$, где θ – вещественный параметр. Тогда искомая эволюция границы $\partial\Omega_t$ задается параметрическими выражениями

$$x = \operatorname{Re} F(e^{i\theta}) + t \cos \theta, \quad (23)$$

$$y = \operatorname{Im} F(e^{i\theta}) - t \sin \theta. \quad (24)$$

Описываемые (22)–(24) течения можно интерпретировать как двумерные возмущения исходного одномерного осесимметричного течения $U = t/z$ (для невозмущенного течения $F = 0$; оно соответствует сжатию, либо расширению с постоянной скоростью круглой полости в жидкости). Различный выбор произвольной функции F позволяет строить самые разные двумерные течения, подробный анализ которых выходит за рамки настоящей работы.

Приведем здесь в качестве примера только два решения. Первое – соответствует $F(U) = \sqrt{U}$. Это означает, что начальное поле скоростей является квадратичным: $U|_{t=0} = z^2$. Тогда, согласно (23) и (24), в начальный момент $t = 0$ свободная граница представляет собой окружность $|z| = 1$. Исходно круглая полость в жидкости со временем деформируется – см. рис. 3. Решение разрушается в момент

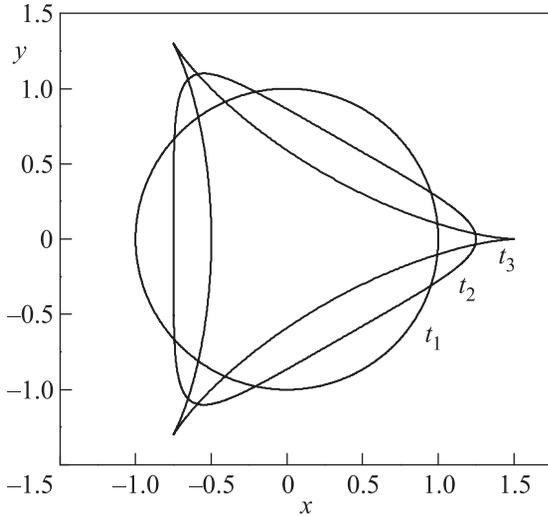


Рис. 3. Описываемая формулами (23) и (24) эволюция полости в жидкости для $F(U) = \sqrt{U}$. Свободная граница показана в последовательные моменты времени $t_1 = 0, t_2 = 0.25, t_3 = 0.5$

$t = 1/2$, когда на границе одновременно образуются три точки заострения. Их появление связано с выходом особенностей комплексной скорости извне жидкости на ее границу (см. также [13]). Отметим, что, по-видимому, на важность изучения сингулярностей вне жидкости для нестационарного случая было впервые указано в работе [15]. Когда особая точка приближается к свободной границе, это вызывает ее значительную деформацию. Подобная ситуация реализуется, в частности, для околопредельных волн Стокса [16].

Второе решение продемонстрировано на рис. 4. Оно соответствует следующему выражению для входящей в (22)–(24) функции F :

$$F(U) = - \sum_{k=1}^3 \frac{1}{U - 1.5 \exp(2ik\pi/3)}, \quad (25)$$

содержащему три симметрично расположенных относительно начала координат полюса. При больших $|t|$ форма границы близка к окружности с радиусом $\sim |t|$. Как видно, при сжатии полости возмущения ее границы становятся более выраженными, и в момент $t_c \approx -1.53$ решение разрушается – происходит столкновение свободных границ, в результате чего полость распадается на несколько отдельных полостей.

Таким образом, рис. 3 и 4 демонстрируют образование различных типов особенностей – острий и пузырей.

6. Заключение. Предложен алгоритм построения точных решений задачи о двумерном течении жидкости со свободной границей, стартующий с ре-

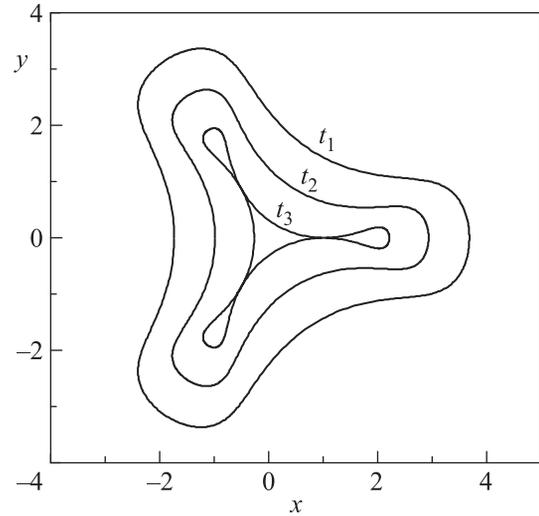


Рис. 4. Описываемая формулами (23) и (24) эволюция полости в жидкости для задаваемой выражением (25) функции F . Свободная граница показана в последовательные моменты времени $t_1 = -3, t_2 = -2.25, t_3 = -1.53$

шения линейного уравнения Пуассона на давление в плоскости годографа $P_{uu} + P_{vv} = -2$ и завершающийся анализом зависимостей вида

$$z = F(U) + \int C(U, t) dt,$$

вытекающих из уравнения переноса (2). Этот алгоритм позволил воспроизвести найденные в [7, 8, 13] решения, а также построить новый широкий класс решений, описывающий произвольные возмущения невозмущенного течения $U = t/z$. Если решения Дирихле соответствуют течениям с линейным полем скорости $U \sim z$, а решения из работ [7, 8, 13] имеют аналогичную линейную асимптотику, то построенный в настоящей работе новый класс решений имеет иную – затухающую на бесконечности – асимптотику $U \sim z^{-1}$, характерную для процессов сжатия или расширения полостей в несжимаемой жидкости для плоских течений. Важно, что решение (22) содержит произвольную комплексную функцию F , что позволяет исследовать начальные условия самого разного вида. Возникающие из требования аналитичности комплексной скорости в области Ω_t условия на функцию F носят самый общий характер и легко выполняются при соответствующем выборе положения ее особенностей.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 19-01-00096 и 19-08-00098), Президиума РАН (программа 2) и УрО РАН (проект 18-2-2-15).

-
1. G. L. Dircchlet, *J. Reine Angew. Math.* **58**, 181 (1861).
 2. E. A. Kuznetsov, M. D. Spector, and V. E. Zakharov, *Phys. Lett. A* **182**, 387 (1993).
 3. E. A. Kuznetsov, M. D. Spector, and V. E. Zakharov, *Phys. Rev. E* **49**, 1283 (1994).
 4. N. M. Zubarev, *Phys. Lett. A* **243**, 128 (1998).
 5. Н. М. Зубарев, *ЖЭТФ* **114**, 2043 (1998).
 6. N. M. Zubarev and E. A. Kuznetsov, *JETP* **119**, 169 (2014).
 7. Е. А. Карабут, Е. Н. Журавлева, *ДАН* **458**, 656 (2014).
 8. E. A. Karabut and E. N. Zhuravleva, *J. Fluid Mech.* **754**, 308 (2014).
 9. Е. А. Карабут, Е. Н. Журавлева, *ДАН* **469**, 295 (2016).
 10. A. I. Dyachenko and V. E. Zakharov, *Phys. Lett. A* **190**, 144 (1994).
 11. A. I. Dyachenko, P. M. Lushnikov, and V. E. Zakharov, *J. Fluid Mech.* **869**, 526 (2019).
 12. A. I. Dyachenko, S. A. Dyachenko, P. M. Lushnikov, and V. E. Zakharov, *J. Fluid Mech.* **874**, 891 (2019).
 13. Н. М. Зубарев, Е. А. Карабут, *Письма в ЖЭТФ* **107**, 434 (2018).
 14. V. E. Zakharov, *Russian-French Workshop "Mathematical Hydrodynamics"*, Abstracts, IIN SB RAS & NSU, Novosibirsk, Russia 55 (2016).
 15. S. Tanveer, *Proc. R. Soc. Lond. A.* **435**, 137 (1991).
 16. P. M. Lushnikov, *J. Fluid Mech.* **800**, 557 (2016).