Письма в ЖЭТФ, том 110, вып. 7, с. 449 – 455

Взаимное усиление брюнелевских гармоник

В. А. Костин[+*], *Н. В. Введенский*[+*1)]

[+]*Институт прикладной физики РАН, 603950 Нижний Новгород, Россия*

[*]*Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского, 603950 Н. Новгород, Россия*

Поступила в редакцию 29 апреля 2019 г.
После переработки 19 августа 2019 г.
Принята к публикации 29 августа 2019 г.

Предложен и исследован механизм значительного увеличения выхода брюнелевских гармоник – низших нечетных гармоник, генерируемых в плазме в процессе туннельной ионизации атомов и молекул интенсивным лазерным импульсом. Этот механизм основан на взаимном усилении гармоник при параметрическом взаимодействии с полем на основной частоте вследствие вырожденного ионизационного многоволнового смешения, что, как показывают результаты аналитических и численных расчетов, приводит к возможности увеличения на несколько порядков интенсивностей генерируемых гармоник.

DOI: 10.1134/S0370274X19190044

Сильное нелинейное взаимодействие атомов и молекул с интенсивными лазерными полями вызывает генерацию гармоник, спектр которых содержит низкоэнергетическую часть (приблизительно до потенциала ионизации мишени) и высокоэнергетическую часть, содержащую плато (протяженность которого определяется пондеромоторной энергией свободного электрона в лазерном поле) и область резкого затухания интенсивности гармоник [1, 2]. Физический механизм генерации высоких гармоник может быть качественно объяснен на основе трехстадийной модели, включающей ионизацию, ускорение высвободившегося электрона полем и рекомбинацию электрона с испусканием фотона [3]. Хотя этот механизм может также приводить и к генерации низших гармоник (с энергией фотона меньше потенциала ионизации) [4, 5], генерация таких гармоник может быть не связана с рекомбинацией электрона с родительским ионом (как и с другими особенностями внутриатомной динамики) [6–8]. Такая ситуация соответствует условиям достаточно сильных полей, когда, во-первых, реализуется режим туннельной ионизации (приводящей к сравнительно высоким значениям степени ионизации плазмы) и, во-вторых, можно пренебречь влиянием рекомбинации и особенностей структуры атомных уровней на генерацию гармоник и учитывать только динамику свободных электронов в ионизирующем поле. В этом случае генерируемые гармоники могут быть идентифицированы как нечетные гармоники в плотности тока свободных электронов в нестационарной плазме, плотность которой вследствие резкой зависимости скорости туннельной ионизации от напряженности поля растет скачками на каждом полупериоде. Выход таких гармоник, также называемых брюнелевскими (по имени автора работы [6]), сильно падает как с увеличением номера гармоники, так и с уменьшением интенсивности ионизирующего поля, практически исчезая при переходе от туннельного к многофотонному режиму ионизации [8]. Для таких сравнительно низкоинтенсивных полей оказывается существенным другой механизм генерации низших гармоник, обусловленный нелинейным откликом электронов, находящихся в связанных состояниях нейтральных атомов и ионов [8, 9].

Генерация низших, в частности, брюнелевских, гармоник является одним из наиболее перспективных способов получения интенсивных ультракоротких импульсов когерентного излучения в длинноволновой части вакуумного ультрафиолетового спектрального диапазона (с длинами волн $\sim 100\ldots200$ нм). Поскольку этим длинам волн соответствуют частоты переходов электронов в возбужденные состояния в атомах и молекулах, такие источники чрезвычайно востребованы для решения широкого круга фундаментальных и прикладных задач, связанных с диагностикой и спектроскопией различных материалов и сред [10, 11]. Так как эффективность генерации гармоник, как правило, достаточно мала (и, кроме того, обычно падает с увеличением номера гармоники), важной и актуальной проблемой для создания соответствующих источников излучения является поиск путей усиления выхода гармоник [12–15].

1) e-mail: vved@appl.sci-nnov.ru

В настоящей работе предлагается и исследуется новый физический механизм значительного увеличения выхода брюнелевских гармоник, который основан на эффекте их взаимного усиления в процессе параметрического взаимодействия с полем накачки на основной частоте вследствие ионизационного многоволнового смешения. Как было показано в предыдущих работах, большое число смешивающихся волн обеспечивается резкой зависимостью вероятности ионизации от напряженности поля, что приводит к возможности эффективной генерации излучения на комбинационных частотах в различных спектральных диапазонах [16–18]. Рассматриваемая в данной работе ситуация представляет собой уникальный, не исследовавшийся ранее, пример вырожденного ионизационного смешения, когда частота генерируемой гармоники может быть множеством различных способов представлена как комбинационная частота поля накачки и других брюнелевских гармоник. Этим способам, или фотонным каналам волнового смешения, соответствуют свои вклады в скорость роста поля брюнелевских гармоник, различным образом зависящие от амплитуд и фаз других гармоник.

В первой части данной работы рассмотрим двухцветный ионизирующий импульс, состоящий из поля на основной частоте ω_1 и поля его нечетной гармоники с номером $2p+1$, и найдем плотность тока, возбуждаемого этим импульсом в плазме на частоте другой нечетной гармоники с номером $2q+1$, $p \neq q$, где $p, q = 1, 2, \ldots$. При этом в качестве гармоники $2p+1$ может выступать как поле брюнелевской гармоники, сгенерированной в плазме в результате реализации ионизационного механизма, так и поле (в том числе и достаточно интенсивное) низшей нечетной гармоники, полученной другими методами [19]. Запишем зависимость напряженности электрического поля $\mathbf{E}$ от времени t в виде

$$\mathbf{E}(t) = \mathrm{Re}\left[A_1(t)e^{-i\omega_1 t} + A_{2p+1}(t)e^{-i(2p+1)\omega_1 t}\right]\mathbf{x}_0,$$

где $A_l(t) = \mathcal{E}_l(t)e^{-i\varphi_l(t)}$ – медленная комплексная амплитуда одноцветной компоненты поля на частоте $l\omega_1$ с действительной амплитудой $\mathcal{E}_l(t) > 0$ и абсолютной фазой $\varphi_l(t)$, $\mathbf{x}_0$ – единичный вектор. Рассматриваются только низшие гармоники с частотами, меньшими атомной. Кроме этого, предполагается, что максимальное значение пондеромоторного потенциала $q_e^2\mathcal{E}_1^2/4m_e\omega_1^2$ велико по сравнению с потенциалом ионизации нейтральных частиц газа, здесь q_e и m_e – заряд и масса электрона, соответственно. Указанные условия позволяют считать ионизацию туннельной, а вероятность ионизации в единицу времени $w(|\mathbf{E}(t)|)$ – функцией мгновенного значения модуля напряженности поля. При этом плотность тока свободных электронов $\mathbf{j}(t)$ и плотность плазмы $N(t)$ находятся из уравнений [6, 8, 9, 16–18]

$$\frac{\partial N}{\partial t} = (N_m - N)\, w(|\mathbf{E}(t)|), \quad \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} = \frac{q_e^2}{m_e} N\mathbf{E} \qquad (1)$$

с нулевыми начальными условиями при $t \to -\infty$, где N_m – плотность нейтральных частиц до начала ионизации.

Если длительность ионизации τ_i (характерное время создания плазмы [16–18]) велико по сравнению с π/ω_1, то вероятность ионизации является приближенно периодической функцией t с периодом π/ω_1, и, вводя $W(t) = w(|\mathbf{E}(t)|)$, удобно записать

$$W(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} W_{2k}(t)e^{-2ik\omega_1 t}, \qquad (2)$$

где $W_{2k}(t) = W_{-2k}^*(t)$ – плавные комплекснозначные функции. Здесь $W_0 \equiv \bar{W}$ – усредненная по π/ω_1 вероятность ионизации, которая определяет усредненную плотность плазмы $\bar{N}(t) = N_m\left[1 - e^{-\int_{-\infty}^{t}\bar{W}(t')\,dt'}\right]$ в соответствии с уравнением $\partial\bar{N}/\partial t = (N_m - \bar{N})\bar{W}$. Подставляя разложение (2) в первое из уравнений (1), заменяя в правой части уравнения N на $\bar{N}$, интегрируя получившееся выражение и вынося медленные (в масштабах периода второй гармоники π/ω_1) огибающие W_{2k} за знак интеграла, получаем

$$N(t) = \bar{N}(t) + \mathrm{Re}\sum_{k=1}^{\infty} N_{2k}(t)e^{-2ik\omega_1 t}, \qquad (3)$$

где медленные комплексные амплитуды четных гармоник в плотности плазмы $N_{2k}(t)$, $k \geqslant 1$, даются выражениями

$$N_{2k} \approx \frac{i\left(N_m - \bar{N}\right)W_{2k}}{k\omega_1} = \frac{i}{k\omega_1}\frac{\partial\bar{N}}{\partial t}\frac{W_{2k}}{\bar{W}}.$$

Подставляя разложение (3) во второе из уравнений (1), получаем, что

$$\frac{\partial\mathbf{j}}{\partial t} = \mathrm{Re}\sum_{q=0}^{\infty}\mathbf{F}_{2q+1}(t)e^{-i(2q+1)\omega_1 t},$$

где $\mathbf{F}_{2q+1} = F_{2q+1}\mathbf{x}_0$ – искомые медленные комплексные амплитуды нечетных гармоник в $\partial\mathbf{j}/\partial t$. Для $q \neq 0, p$ имеем

$$F_{2q+1} \approx \frac{iq_e^2}{2m_e\omega_1\bar{W}}\frac{\partial\bar{N}}{\partial t}\left(\frac{W_{2q}A_1}{q} + \frac{W_{2q+2}A_1^*}{q+1} + \right.$$
$$\left. + \frac{W_{2q-2p}A_{2p+1}}{q-p} + \frac{W_{2q+2p+2}A_{2p+1}^*}{q+p+1}\right). \qquad (4)$$

Чтобы найти $W_{2k}(t)$, воспользуемся следующим приемом. Обозначим фазы одноцветных компонент поля как $\zeta = \omega_1 t + \varphi_1$ и $\eta = (2p+1)\omega_1 t + \varphi_{2p+1}$. Тогда при любом t вероятность ионизации можно рассматривать как значение периодической функции от ζ и η, $W(t) = w\left(|\mathcal{E}_1(t)\cos\zeta + \mathcal{E}_{2p+1}(t)\cos\eta|\right)$. Раскладывая ее в двойной ряд Фурье, получим

$$W(t) = \sum_{\alpha,\beta=-\infty}^{\infty} W_{\alpha,\beta}(t) e^{-i\alpha\zeta - i\beta\eta}, \tag{5}$$

где коэффициенты Фурье $W_{\alpha,\beta}$ даются интегралом

$$\begin{aligned} &W_{\alpha,\beta}(t) = \\ &= \frac{1}{2\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} w\left(|\mathcal{E}_1(t)\cos\zeta + \mathcal{E}_{2p+1}(t)\cos\eta|\right) \times \\ &\times e^{i\alpha\zeta + i\beta\eta}\, d\zeta\, d\eta \end{aligned} \tag{6}$$

для четных $\alpha+\beta$ и $W_{\alpha,\beta} \equiv 0$ для нечетных. Сравнивая разложения (2) и (5), получаем

$$W_{2k}(t) = e^{-2ik\varphi_1} \sum_{\beta=-\infty}^{\infty} W_{2k-(2p+1)\beta,\beta}(t) e^{-i\beta\psi_{2p+1}}, \tag{7}$$

где $\psi_{2p+1} = \varphi_{2p+1} - (2p+1)\varphi_1$ – фазовый сдвиг между гармоникой $2p+1$ и полем на основной частоте.

Поскольку $w(E)$ – быстрорастущая функция E, то основной вклад в интеграл (6) дают области, где аргумент w близок к своему максимальному значению: $|\mathcal{E}_1(t)\cos\zeta + \mathcal{E}_{2p+1}(t)\cos\eta| \approx \mathcal{E}_1(t) + \mathcal{E}_{2p+1}(t)$. Таким образом, в этом интеграле можно использовать приближение $w(E) \approx w(\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_{2p+1}) e^{-n} e^{nE/(\mathcal{E}_1+\mathcal{E}_{2p+1})}$, в котором приближающая функция сохраняет значение и первую производную при $E = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_{2p+1}$ и быстро спадает с уменьшением E, где $n = (\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_{2p+1}) w'(\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_{2p+1})/w(\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_{2p+1}) \gg 1$ определяет порядок ионизационного волнового смешения [16–18]. В результате получим

$$\begin{aligned} W_{\alpha,\beta}(t) &\approx \frac{e^{-n} w\left(\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_{2p+1}\right)}{2\pi^2} \times \\ &\times \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{\left|\frac{n\mathcal{E}_1\cos\zeta}{\mathcal{E}_1+\mathcal{E}_{2p+1}} + \frac{n\mathcal{E}_{2p+1}\cos\eta}{\mathcal{E}_1+\mathcal{E}_{2p+1}}\right|} e^{i\alpha\zeta + i\beta\eta}\, d\zeta\, d\eta. \end{aligned}$$

Пусть $\mathcal{E}_1 \geqslant \mathcal{E}_{2p+1}$, тогда область, где величина под модулем отрицательна, дает малый вклад в интеграл (так как значение модуля в экспоненте оказывается малым по сравнению с максимальным значением, равным 1) и знак модуля можно опустить. При этом интервал интегрирования по ζ можно расширить до $(-\pi, \pi)$, так как подынтегральное выражение оказывается пренебрежимо мало в добавленной области интегрирования. Тем самым сведем $W_{\alpha,\beta}$ к произведению двух табличных интегралов для модифицированных функций Бесселя $I_k(z)$ и получим

$$\begin{aligned} W_{\alpha,\beta}(t) &\approx 2w(\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_{2p+1}) \times \\ &\times e^{-n} I_\alpha\left(\frac{n\mathcal{E}_1}{\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_{2p+1}}\right) I_\beta\left(\frac{n\mathcal{E}_{2p+1}}{\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_{2p+1}}\right). \end{aligned} \tag{8}$$

Действуя аналогичным образом, можно показать, что выражение (8) справедливо и при $\mathcal{E}_1 < \mathcal{E}_{2p+1}$. Подставим теперь (8) в (7), а (7) в (4) и получим

$$\begin{aligned} F_{2q+1} &\approx \frac{i(2q+1)e^{-i(2q+1)\varphi_1} j_{\mathrm{osc}} w(\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_{2p+1})}{q(q+1)n} \times \\ &\times e^{-n - \int_{-\infty}^{t} \bar{W}(t')\, dt'} \sum_{\beta=-\infty}^{\infty} f_{2q+1,\beta} e^{-i\beta\psi_{2p+1}}, \end{aligned} \tag{9}$$

где $\delta = n\mathcal{E}_{2p+1}/(\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_{2p+1})$, $j_{\mathrm{osc}} = N_m q_e^2(\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_{2p+1})/m_e\omega_1$ и

$$\begin{aligned} \bar{W} &= 2w(\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_{2p+1})\, e^{-n} \times \\ &\times \sum_{\beta=-\infty}^{\infty} I_{(2p+1)\beta}(n-\delta) I_\beta(\delta) e^{-i\beta\psi_{2p+1}}, \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned} f_{2q+1,\beta} &= (n-\delta) I'_{2q+1-(2p+1)\beta}(n-\delta) I_\beta(\delta) + \\ &+ \frac{\delta q(q+1)}{(q-p)(q+p+1)} I_{2q+1-(2p+1)\beta}(n-\delta) I'_\beta(\delta) + \\ &+ \left(1 + \frac{\beta p(p+1)(2p+1)}{(q-p)(q+p+1)(2q+1)}\right) \times \\ &\times I_{2q+1-(2p+1)\beta}(n-\delta) I_\beta(\delta). \end{aligned} \tag{11}$$

В получившемся выражении (9) происходит суммирование по различным фотонным каналам многоволнового ионизационного смешения, т.е. по различным способам представления частоты $(2q+1)\omega_1$ как комбинации частот ω_1 и $(2p+1)\omega_1$, а величины $f_{2q+1,\beta}$ можно рассматривать как парциальные амплитуды (или "силы") различных каналов. Величина $|\beta|$ при этом играет роль минимального числа задействованных квантов гармоники $2p+1$. Множественность таких представлений отражает вырожденный характер волнового смешения в рассматриваемом случае (когда основное поле смешивается со своей нечетной гармоникой), что отличает его от работ [16–18], где рассматриваются невырожденные случаи и смешение обеспечивается лишь одним фотонным каналом. Именно это вырождение обуславливает описанные далее более сложные зависимости амплитуды генерируемой брюнелевской гармоники от параметров ионизирующего импульса (в частности, от фазового сдвига ψ_{2p+1}) и лежит в основе эффекта взаимного усиления гармоник. Обратим внимание на то, что выражение (10) для усредненной вероятности ионизации усложняется по сравнению с невырожденным случаем и также представляет собой суммирование по различным "фотонным каналам ионизации", т.е. по различным способам представления нулевой частоты как комбинации ω_1 и $(2p+1)\omega_1$. Важно отметить, что в сумме (10) необходимо учитывать слагаемые с $\beta \neq 0$ уже при достаточно слабых добавочных гармониках. Это, в частности, проявляется в том, что наличие слабых добавочных гармоник может привести к значительному изменению (зависящему от ψ_{2p+1}) усредненной вероятности ионизации. Этот эффект также присущ именно вырожденному случаю и отсутствует в невырожденном, например, при добавлении к полю на основной частоте его четных гармоник.

Как известно, при фиксированном аргументе модифицированные функции Бесселя быстро спадают с ростом порядка; для больших аргументов характерный масштаб спадания определяется корнем из аргумента. Поэтому для не слишком больших $n \sim \sim 10\ldots100$ лишь несколько слагаемых в суммах (9) и (10) оказываются существенными, а формула (11) предоставляет инструмент для оценки того, какие фотонные каналы ионизационного смешения нужно учитывать. При $n\mathcal{E}_{2p+1} \ll 2\mathcal{E}_1$ для соседних нечетных гармоник, когда $q = p \pm 1$, важны лишь каналы с $\beta = 0$ и $\beta = 1$. Канал с $\beta = 0$ – единственный канал, который присутствует и в одноцветном случае, при $\mathcal{E}_{2p+1} = 0$. Для его реализации необходимо $2q+1$ квантов основного поля и ноль квантов гармоники $2p+1$. Для канала с $\beta = 1$ – всего два кванта основного поля и один квант более слабого поля гармоники $2p+1$. При достаточно больших $2q+1$ канал с $\beta = 0$ может оказаться менее существенным даже для очень слабой гармоники $2p+1$, в чем можно убедиться, сопоставив значения соответствующих коэффициентов:

$$f_{2q+1,0} \approx nI'_{2q+1}(n) + I_{2q+1}(n), \tag{12}$$

$$f_{2q+1,1} \approx \left(nI'_2(n) \pm 2\frac{q^2+q+1}{2q+1}I_2(n)\right)\frac{\delta}{2}. \tag{13}$$

Конкуренция между двумя каналами обуславливает зависимость выхода гармоники $2q+1$ от ψ_{2p+1} и амплитуды $\mathcal{E}_{2p+1}$, $|F_{2q+1}|^2 \propto \propto \left|f_{2q+1,0} + f_{2q+1,1}e^{-i\psi_{2p+1}}\right|^2$. При $\mathcal{E}_{2p+1} = E_c$, где

$$E_c \approx \frac{2\mathcal{E}_1}{n}\frac{nI'_{2q+1}(n) + I_{2q+1}(n)}{nI'_2(n) \pm 2\frac{q^2+q+1}{2q+1}I_2(n)}, \tag{14}$$

вклады от обоих каналов сравниваются по модулю. При $\psi_{2p+1} = 0$ происходит удвоение амплитуды гармоники $2q+1$ по сравнению с одноцветным случаем, а при $\psi_{2p+1} = \pi$ каналы полностью компенсируют друг друга и генерация гармоники $2q+1$ оказывается подавленной (полагается, что $nE_c/2\mathcal{E}_1 \ll 1$). Чем больше q, тем меньше E_c и при тем более слабых гармониках $2p+1$ канал с $\beta = 1$ начинает доминировать и определять процесс генерации гармоники $2q+1$. Как ясно из представленного вывода, полученные аналитические формулы могут быть использованы и в одноцветном случае. В частности, формула (12) удобна для анализа формы спектра гармоник, например, из нее непосредственно следует, что масштаб спадания амплитуд гармоник с увеличением номера определяется $\sqrt{n}$.

Полученные аналитические результаты подтверждаются численным решением уравнений (1), из которого находился нормированный выход гармоник

$$Y_{2q+1} = \frac{1}{(q_e N_m v_a)^2\omega_a}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\partial \mathbf{j}_{2q+1}}{\partial t}\right)^2 dt, \tag{15}$$

где $v_a \approx 2.19\times10^8$ см/с и $\omega_a \approx 4.13\times10^{16}$ с$^{-1}$ – атомные единицы скорости и частоты, а $\mathbf{j}_{2q+1}$ получается из $\mathbf{j}$ с помощью идеального полосового фильтра с полосой пропускания от $2q\omega_1$ до $2(q+1)\omega_1$. Использовалась эмпирическая формула для вероятности туннельной ионизации атома водорода [20]

$$w(E) = 4\omega_a\frac{E_a}{E}e^{-\frac{2}{3}\frac{E_a}{E} - 12\frac{E}{E_a}}, \tag{16}$$

где $E_a \approx 5.14\times10^9$ В/см – атомная единица поля. Выбирались гауссовы огибающие компонент поля, $\mathcal{E}_l = \sqrt{8\pi S_l/c}\,e^{-t^2/2\tau^2}$, где S_l – максимальные интенсивности компонент, c – скорость света в вакууме и $\tau = \tau_p/\sqrt{(4\ln 2)}$, где τ_p – полная длительность по уровню $1/2$ от максимальной интенсивности.

На рисунке 1 показаны зависимости максимального и минимального по ψ_{2p+1} выхода гармоники Y_{2q+1} от S_{2p+1}. Как видно, лучше усиливаются гармоники с $q > p$ (рис. 1a–c), при этом усиление может происходить на несколько порядков. Из рисунков 1a, b можно видеть, например, что к увеличению более, чем на порядок выхода 5-й и 7-й гармоник может привести добавление 3-й гармоники с интенсивностью порядка 1 % от накачки, а из рис. 1c, – что при добавлении 5-й гармоники усиление 7-й на порядок происходит уже при интенсивностях на $4\ldots5$ порядков меньших интенсивности основного поля. Из рисунка 1c также видно, что уже при относительно слабых добавочных гармониках минимальный по ψ_{2p+1} выход Y_{2q+1} превышает уровень, соответствующий отсутствию добавочной гармоники, и усиление имеет место при любых ψ_{2p+1}. Это означает, что

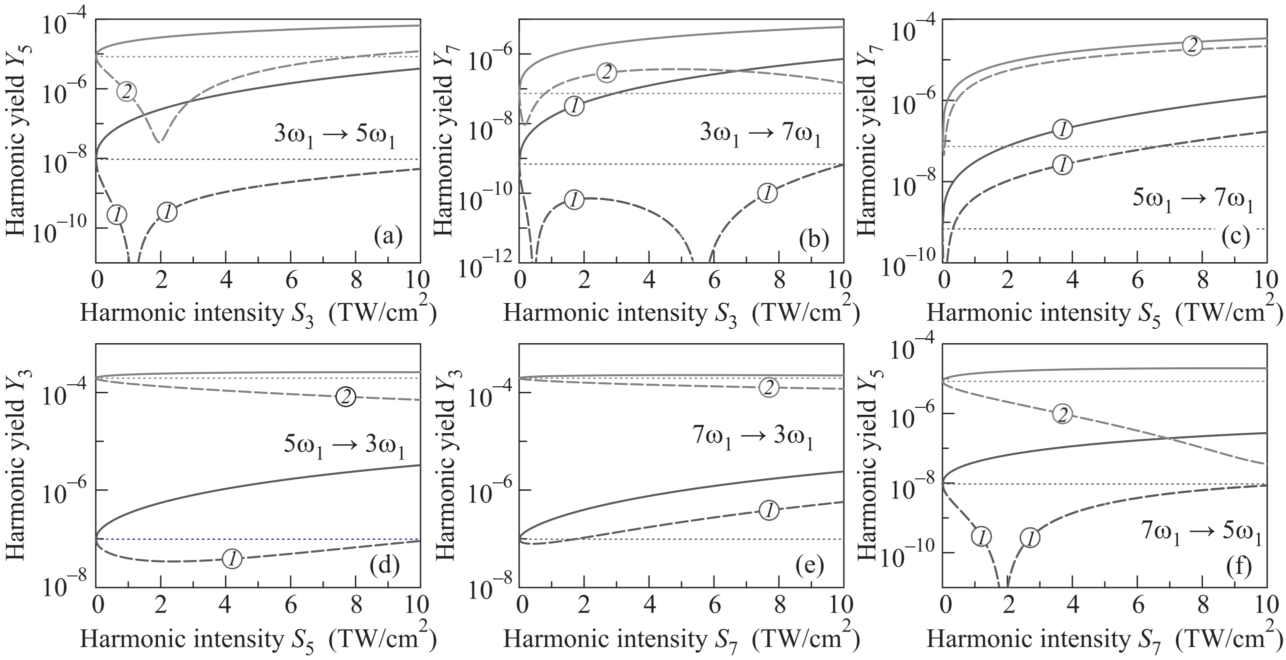

Рис. 1. (Цветной онлайн) Найденные из численного решения уравнений (1), (16) зависимости максимального (сплошные кривые) и минимального (штриховые кривые) по фазовому сдвигу нормированного выхода Y_{2q+1}, даваемого формулой (15), гармоники с номером $2q+1$ от интенсивности S_{2p+1} гармоники с номером $2p+1$. Точечные горизонтальные прямые отмечают значения Y_{2q+1} при $S_{2p+1} = 0$. Параметры ионизирующего импульса: длительность – $\tau_p = 50$ фс, интенсивность основного поля – $S_1 = 10^{14}$ Вт/см^2 (кривые *1*) и 3×10^{14} Вт/см^2 (кривые *2*), его абсолютная фаза – $\varphi_1 = 0$, (a) $p = 1$, $q = 2$, (b) $p = 1$, $q = 3$, (c) $p = 2$, $q = 3$, (d) $p = 2$, $q = 1$, (e) $p = 3$, $q = 1$, (f) $p = 3$, $q = 2$

в этом случае становятся не столь существенными требования на обеспечение определенного фазового сдвига и его стабильности, в частности, на фазовый синхронизм между полем на основной частоте и добавочной гармоникой при их совместном распространении на длинные дистанции.

На рисунке 2 изображены зависимости от S_1 максимальных по ψ_{2p+1} коэффициентов усиления $H_{2q+1} = Y_{2q+1}(S_{2p+1} = \varepsilon S_1)/Y_{2q+1}(S_{2p+1} = 0)$ гармоники $2q+1$ при добавлении гармоники $2p+1$ с максимальной интенсивностью на уровне $\varepsilon = 10^{-2}$ и 10^{-3} от S_1. Показаны результаты, полученные как с помощью прямого численного интегрирования уравнений (1) и (16), так и на основе полуаналитических оценок $Y_{2q+1} \approx (2\omega_a)^{-1}(q_e N_m v_a)^{-2} \int_{-\infty}^{\infty} |F_{2q+1}|^2\, dt$, где F_{2q+1} определяется формулами (9)–(11). При этом в сумме (9) по фотонным каналам β оставлялись лишь два (для соседних гармоник $|q-p| = 1$) или три (для $|q-p| = 2$) канала, а в сумме (10) – лишь каналы с $|\beta| \leqslant 1$. Как видно, даже в условиях, когда $\delta \gtrsim 1$ и формулы (12) и (13), строго говоря, неприменимы, усиление соседних гармоник (рис. 2a, c, d, f) хорошо интерпретируется влиянием всего двух фотонных каналов. При этом поведение кривых качественно описывается формулами (12) и (13) при $H_{2q+1} \approx \approx (1+f_{2q+1,1}/f_{2q+1,0})^2$. В частности, с помощью этих формул можно сопоставить между собой уровни платообразных участков кривых при больших интенсивностях. Эти плато соответствуют условиям, когда существенны эффекты истощения нейтральных частиц и финальная степень ионизации близка к единице (при интенсивностях выше 4×10^{14} Вт/см^2), при этом значение n почти не зависит от интенсивности и оказывается примерно равным 5. Следует также отметить, что приведенные на рис. 2 графики демонстрируют, что наличие добавочной гармоники $2p+1$ может сильно увеличить выход гармоники $2q+1$ в условиях, когда существенно истощение нейтральных частиц и простое увеличение интенсивности основного поля практически не меняет выхода гармоник и лишь приводит к уменьшению эффективности обратно пропорционально интенсивности S_1 (см. вставку на рис. 2e, где показаны выходы брюнелевских гармоник в зависимости от интенсивности основного поля при отсутствии добавочных гармоник).

Во второй части работы рассмотрим вопрос о том, генерируются ли гармоники в таких фазах, чтобы взаимно усиливать друг друга. Для ответа на этот вопрос рассмотрим взаимодействие между полем на основной частоте и соседними нечетными гармони-

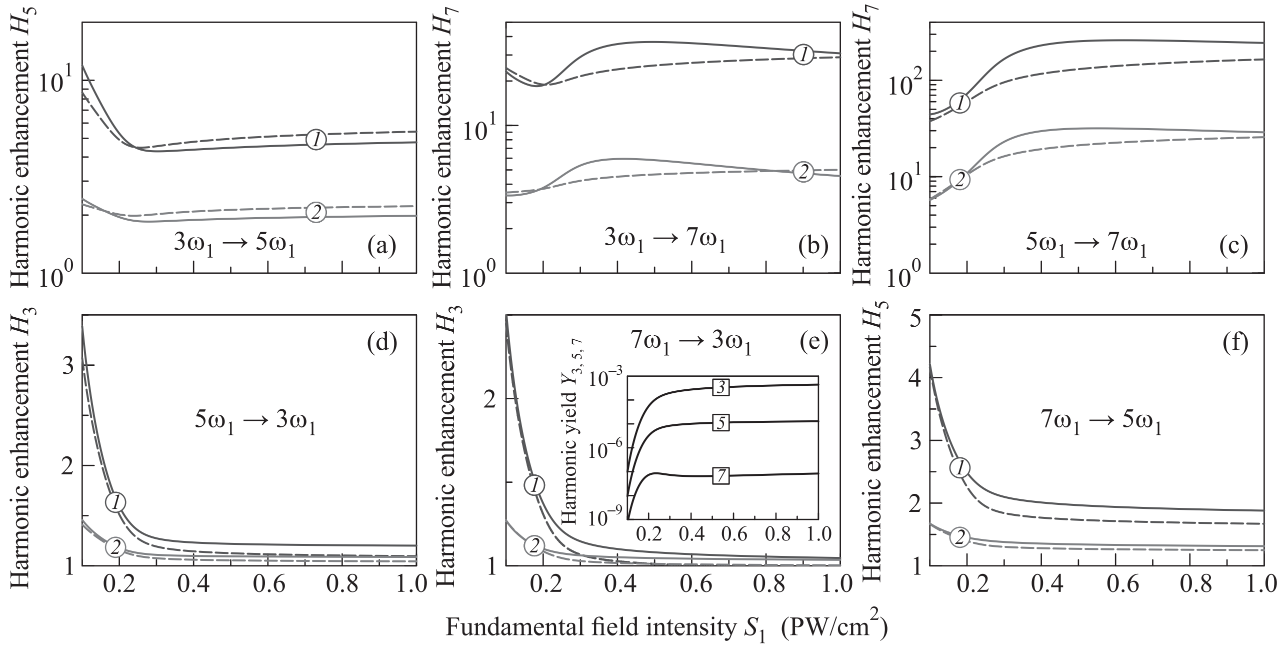

Рис. 2. (Цветной онлайн) Зависимости максимального по фазовому сдвигу коэффициента усиления $H_{2q+1} = Y_{2q+1}(S_{2p+1} = \varepsilon S_1)/Y_{2q+1}(S_{2p+1} = 0)$ выхода гармоники $2q+1$ при добавлении гармоники $2p+1$ с максимальной интенсивностью на уровне $\varepsilon = 0.01$ (кривые *1*) и 0.001 (кривые *2*) от максимальной интенсивности S_1 поля на основной частоте. Сплошные кривые соответствуют нормированным выходам Y_{2q+1}, найденным с помощью формулы (15) из численного решения уравнений (1), (16); штриховые – оценкам нормированных выходов $Y_{2q+1} = (2\omega_a)^{-1}(q_e N_m v_a)^{-2}\int_{-\infty}^{\infty}|F_{2q+1}|^2\,dt$, полученным с помощью аналитических формул (9)–(11), при этом в ряде (9) оставлялись только два слагаемых с $\beta = 0, 1$ для панелей (a), (c), (d), (f) и три слагаемых с $\beta = 0, 1, 2$ для панелей (b) и (e), а в ряде (10) – только слагаемые с $\beta = -1, 0, 1$. На вставке панели (e) изображены зависимости выхода гармоник Y_{2q+1} от S_1 при отсутствии добавочной гармоники для $q = 1, 2, 3$; отметки в квадратах на кривых показывают номер гармоники $2q+1$. Параметры ионизирующего импульса: длительность – $\tau_p = 50$ фс, его абсолютная фаза – $\varphi_1 = 0$, (a) $p = 1$, $q = 2$, (b) $p = 1$, $q = 3$, (c) $p = 2$, $q = 3$, (d) $p = 2$, $q = 1$, (e) $p = 3$, $q = 1$, (f) $p = 3$, $q = 2$

ками $2s \pm 1$, где $s = 2, 3\ldots$. Для описания эффектов распространения гармоник в пространстве в пренебрежении дисперсией запишем полное (трехцветное) поле в виде

$$\mathbf{E}(z,t) = \mathbf{x}_0 \operatorname{Re}\left[A_1(\xi,z)e^{-i\omega_1\xi} + \right.$$
$$\left. + A_{2s-1}(\xi,z)e^{-i(2s-1)\omega_1\xi} + A_{2s+1}(\xi,z)e^{-i(2s+1)\omega_1\xi}\right],$$

где $\xi = t - z/c$, z – координата вдоль направления распространения волн. Будем считать, что амплитуда сильного поля на основной частоте меняется слабо при распространении и $\partial A_1/\partial z = 0$. Для полей гармоник можно записать укороченные уравнения [21]

$$\frac{\partial A_{2s\pm1}}{\partial z} = -\frac{2\pi i}{(2s\pm1)\omega_1 c}F_{2s\pm1}.$$

Для нахождения $F_{2s\pm1}$ используется уравнение (9) с $q = s$, $p = s-1$ для верхнего знака и $q = s-1$, $p = s$ для нижнего при $\delta \ll 1$. В сумме остаются два слагаемых с $\beta = 0$ и 1, которые даются формулами (12) и (13). В результате получим линейную систему

$$\frac{\partial A_{2s\pm1}}{\partial z} = R_\pm e^{-i(2s\pm1)\varphi_1} + Q_\pm e^{\mp 2i\varphi_1}A_{2s\mp1}, \qquad (17)$$

где $R_\pm$ и $Q_\pm$ – положительные константы. Когда $\partial\bar{N}/\partial t$ максимально, можно записать $(4\pi q_e^2/m_e)\partial\bar{N}/\partial t \approx \omega_p^2/\tau_i$ и

$$R_\pm \approx \frac{\omega_p^2}{4\omega_1^2 c\tau_i s(s\pm1)}\frac{I'_{2s\pm1}(n) + I_{2s\pm1}(n)/n}{I_0(n)}|A_1|,$$
$$Q_\pm \approx \frac{\omega_p^2}{8\omega_1^2 c\tau_i s(s\pm1)}\left(n + 2\frac{\pm s^2 + s \pm 1}{2s\pm1}\right),$$

где $\omega_p = [4\pi N(\xi\to+\infty)q_e^2/m_e]^{1/2}$ – плазменная частота после прохождения ионизирующего импульса, τ_i – длительность ионизации. Решая уравнения (17) с начальными условиями $A_{2s\pm1}(z=0) = 0$, находим, что гармоники генерируются в фазах, обеспечивающих их взаимное параметрическое усиление:

$$e^{i(2s\pm1)\varphi_1}A_{2s\pm1} = E_{c\pm}(\cosh\gamma z - 1) + E_{o\pm}\sinh\gamma z,$$

где

$$\gamma = \sqrt{Q_+ Q_-} =$$
$$= \frac{\omega_p^2}{8s\omega_1^2 c\tau_i}\sqrt{\frac{4s^2(n+1)^2 - \left[n+2\left(s^2+1\right)\right]^2}{(4s^2-1)(s^2-1)}} \qquad (18)$$

– пространственный инкремент роста амплитуд гармоник, $E_{c\pm} = R_\mp/Q_\mp$ – характерные поля (14), при которых сравниваются вклады от двух каналов многоволнового смешения, $E_{o\pm} = R_\pm/\gamma$ – характерное поле гармоники $2s \pm 1$, которое генерировалось бы в плазме длины $L = 1/\gamma$ без взаимного усиления гармоник. Для длины волны основного поля 800 нм, длительности ионизации $\tau_i \approx 5$ фс, $n \approx 5$ и плотности плазмы, отвечающей полной ионизации газа атмосферного давления, получаем характерные длины усиления $L \approx 0.5$ мм для 3-й и 5-й гармоник ($s = 2$) и $L \approx 1.5$ мм – для 5-й и 7-й ($s = 3$).

В заключение, как показали результаты аналитических и численных исследований, взаимное усиление низших нечетных (брюнелевских) гармоник в процессе их параметрического взаимодействия с производящим туннельную ионизацию полем накачки может на несколько порядков увеличить их интенсивность и обеспечить также сильную перекачку энергии вверх по спектру, компенсируя спадание амплитуд гармоник с ростом их номеров. При этом вследствие резкой зависимости скорости ионизации от напряженности поля и, соответственно, большого числа смешивающихся волн, данный эффект согласно формуле (18) в случае подавления вызванной дисперсией фазовой рассинхронизации (например, с использованием методов, применяемых при генерации высоких гармоник [2, 21]), может быть достигнут на весьма умеренных (~ 1 мм) трассах взаимодействия.

Работа в части выполнения численных расчетов поддержана Российским научным фондом (грант # 18-72-00103). Аналитические исследования поддержаны Российским фондом фундаментальных исследований (гранты # 18-02-01150 и 19-52-12053) и фондом "Базис" (грант # 19-1-2-52-1).

1. A. L'Huillier, K. J. Schafer, and K. C. Kulander, J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. **24**, 3315 (1991).
2. В. В. Стрелков, В. Т. Платоненко, А. Ф. Стержантов, М. Ю. Рябикин, УФН **186**, 449 (2016).
3. P. B. Corkum, Phys. Rev. Lett. **71**, 1994 (1993).
4. J. A. Hostetter, J. L. Tate, K. J. Schafer, and M. B. Gaarde, Phys. Rev. A **82**, 023401 (2010).
5. W.-H. Xiong, J.-W. Geng, J.-Y. Tang, L.-Y. Peng, and Q. Gong, Phys. Rev. Lett. **112**, 233001 (2014).
6. F. Brunel, J. Opt. Soc. Am. B **7**, 521 (1990).
7. Н. Е. Андреев, М. Е. Вейсман, М. В. Чеготов, ЖЭТФ **124**, 612 (2003).
8. E. E. Serebryannikov and A. M. Zheltikov, Phys. Rev. Lett. **113**, 043901 (2014).
9. U. Sapaev, A. Husakou, and J. Herrmann, Opt. Express **21**, 25582 (2013).
10. M. Chini, X. Wang, Y. Cheng, Y. Wu, D. Zhao, D. A. Telnov, S.-I Chu, and Z. Chang, Sci. Rep. **3**, 1105 (2013).
11. H. Tao, T. K. Allison, T. W. Wright, A. M. Stooke, C. Khurmi, J. van Tilborg, Y. Liu, R. W. Falcone, A. Belkacem, and T. J. Martinez, J. Chem. Phys. **134**, 244306 (2011).
12. K. Schiessl, E. Persson, A. Scrinzi, and J. Burgdörfer, Phys. Rev. A **74**, 053412 (2006).
13. S. V. Popruzhenko, D. F. Zaretsky, and W. Becker, Phys. Rev. A **81**, 063417 (2010).
14. G. Lambert, A. Andreev, J. Gautier, L. Giannessi, V. Malka, A. Petralia, S. Sebban, S. Stremoukhov, F. Tissandier, B. Vodungbo, and P. Zeitoun, Sci. Rep. **5**, 7786 (2015).
15. Q.-L. Guo, P.-C. Li, X.-X. Zhou, and S.-I Chu, Opt. Commun. **410**, 262 (2018).
16. V. A. Kostin, I. D. Laryushin, A. A. Silaev, and N. V. Vvedenskii, Phys. Rev. Lett. **117**, 035003 (2016).
17. А. А. Силаев, В. А. Костин, И. Д. Ларюшин, Н. В. Введенский, Письма в ЖЭТФ **107**, 160 (2018).
18. V. A. Kostin and N. V. Vvedenskii, Phys. Rev. Lett. **120**, 065002 (2018).
19. D. Rompotis, T. Gebert, M. Wieland, F. Karimi, and M. Drescher, Opt. Lett. **40**, 1675 (2015).
20. X. M. Tong and C. D. Lin, J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. **38**, 2593 (2005).
21. V. V. Strelkov, Phys. Rev. A **93**, 053812 (2016).