

Сложная динамика каскада кинк-антикинкковых взаимодействий в линейном дефекте электроконвективной структуры нематика

В. А. Делев⁺¹⁾, В. Н. Назаров^{+*}, О. А. Скалдин⁺, Э. С. Батыршин[×], Е. Г. Екомасов^{°∇×}

⁺ Институт физики молекул и кристаллов – обособленное структурное подразделение Федерального государственного бюджетного научного учреждения Уфимского федерального исследовательского центра РАН, 450075 Уфа, Россия

* Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования “Башкирский государственный медицинский университет”, 450008 Уфа, Россия

× Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования “Башкирский государственный университет”, 450076 Уфа, Россия

° Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования “Тюменский государственный университет”, 625003 Тюмень, Россия

∇ Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования “Южно-Уральский государственный университет (национальный исследовательский университет)”, 454080 Челябинск, Россия

Поступила в редакцию 8 июля 2019 г.

После переработки 7 октября 2019 г.

Принята к публикации 8 октября 2019 г.

Изучена сложная динамика ансамбля дислокаций в линейном дефекте, возникающем в одномерной электроконвективной структуре закрученного на $\pi/2$ нематического жидкого кристалла. Исследуемый тип дефектов характеризуется достаточно протяженным полем деформации или степенью “диссоциации”. Гидродинамические потоки в доменах закрученного нематика наряду с тангенциальной компонентой скорости имеют и аксиальную составляющую, направление которой противоположно в соседних доменах. Под воздействием приложенного напряжения линейный дефект с топологическим зарядом $S = -1$ начинает осциллировать и распадается на нечетное число дислокаций, так что суммарный топологический заряд сохраняется. Дальнейшая динамика дислокаций в ядре дефекта устанавливается таким образом, чтобы обеспечивалась непрерывность потока анизотропной жидкости в доменах. Пространственно-временная динамика каскада взаимодействующих дислокаций качественно хорошо описывается мультикинкковым решением уравнения синус-Гордона. Показана принципиальная возможность создания новых модельных объектов с заданным числом взаимодействующих дислокаций.

DOI: 10.1134/S0370274X19210070

Переход от упорядоченного состояния к пространственно-временному хаосу в неравновесных системах часто сопровождается появлением дефектов [1, 2]. Несмотря на существенные различия в физических свойствах систем (конвекция Бенара–Марангони, течение Куэтта–Тэйлора, электроконвекция в жидких кристаллах и др.), динамика топологических дефектов, которые являются аналогом краевых дислокаций в кристаллах, имеет много общего. В частности, показано, что при превышении надкритичности количество дефектов увеличивается, дефекты могут образовывать связанные состояния, доменные стенки и т.д. [3]. Поэтому изучение динамических характеристик дефектов, их роли в возникновении турбулентности в неравновесных системах является одной из важных задач физики конденсированного состояния.

Для того, чтобы понять сложную динамику ансамбля взаимодействующих дислокаций, необходимо сначала исследовать свойства и поведение отдельных дефектов. Однако экспериментально получить отдельные дефекты и исследовать их свойства в изотропных жидкостях представляется достаточно сложной задачей. Подходящей модельной системой может служить электроконвекция в нематическом жидком кристалле (НЖК), так как наличие в нем осевой анизотропии, характеризуемой единичным вектором – директором \mathbf{n} , позволяет достичь этого [4–6].

Дефекты в жидких кристаллах при определенных условиях могут возникать как на микроскопическом (молекулярном), так и на макроскопическом (период структуры) масштабе. Их топологические (статические) свойства очень похожи и подробно изучены [7–11], тогда как динамические характеристики остаются мало исследованными. Имеющиеся работы

¹⁾e-mail: delew@anrb.ru

в основном посвящены дефектам электроконвективных структур в НЖК с планарной ориентацией поля директора \mathbf{n} [12–17]. Результаты этих работ свидетельствуют о важной роли дефектов при усложнении пространственно-временной динамики электроконвективных структур и в процессах их турбулизации с увеличением приложенного напряжения. Установлено, что наиболее общими механизмами при формировании двумерных решеток являются процессы рождения и аннигиляции дислокаций. Поведение дислокаций в приближении слабой надкритичности хорошо описывается уравнением Гинзбурга–Ландау [15–17].

Как показано в [17], при определенной скорости увеличения приложенного напряжения дислокации могут образовывать в пространстве новое локализованное квазистационарное состояние с более низкой симметрией. Как правило, такое состояние зарождается вблизи ядра дислокации и распространяется вдоль линии, нормальной к доменам Вильямса. Возникающий *линейный дефект* с диссоциированным (“размытым”) ядром имеет такой же топологический заряд, как и исходная дислокация. Кроме того, локализованное состояние может возникать спонтанно в результате развития модуляционной неустойчивости как простой сдвиг доменов вдоль линий (нормальных доменам Вильямса) на половину пространственного периода π без образования дислокаций. Поэтому такое искажение доменной структуры не является дефектом в топологическом смысле и получило название *линии скачка фазы* [17].

В электроконвективных структурах НЖК с планарной ориентацией директора \mathbf{n} указанные типы линейных образований теряют устойчивость при быстром изменении приложенного напряжения [17]. При этом линейные дефекты распадаются на нечетное число (не менее трех) дислокаций, а линии скачка фазы – на четное число (не менее двух) дислокаций с противоположными топологическими зарядами $S = \pm 1$. В обоих случаях суммарный топологический заряд сохраняется.

Подобные линейные локализованные деформации наблюдаются и в электроконвективных структурах закрученных НЖК [18–21]. Однако из-за особенностей гидродинамики течений, которые будут рассмотрены ниже, они являются достаточно устойчивыми образованиями. При медленном увеличении приложенного напряжения их длина L увеличивается и может достигать размеров ЖК-образца. В этом случае суперпозиция доменов Вильямса и нормальных к ним линейных образований приводит к формированию квазистационарной двумерной структу-

ры [18, 20]. При быстром включении напряжения в квазистационарных линейных образованиях вначале возникают доменные *zig-zag* осцилляции и уже затем появляются дислокации, которые разделяют между собой *zig* и *zag* области.

В зависимости от длины и типа локализованных образований в них наблюдается различная динамика дислокаций. В частности, в линии скачка фазы длиной $L = 8\lambda$, где λ – поперечный размер домена, наблюдается периодическое рождение и аннигиляция двух дислокаций с топологическими зарядами $S = \pm 1$ [22]. В другом случае, когда длина линии составляет $L = 14\lambda$, после возникновения в ней осцилляций, генерация дипольной пары дислокаций наблюдается на одном краю линии, а их аннигиляция на другом. Такая осцилляционная динамика дислокаций качественно хорошо описывается решением уравнения синус-Гордона (УСГ) в виде локализованного бризера [23].

Однако ситуация существенным образом меняется, если экспериментально реализовать линейный дефект с достаточно протяженным полем деформации. С одной стороны, здесь можно говорить о квазисвободном характере движения дислокаций и, соответственно, в модельных представлениях – топологических солитонов. С другой стороны, возникает вопрос о характере и типе их взаимодействия. Так, в [24] показано, что столкновение дислокаций в протяженном дефекте можно рассматривать как связанное состояние кинка и антикинка УСГ.

В настоящей работе анализируется более сложное движение и взаимодействие дислокаций, когда дипольные пары дислокаций периодически рождаются на обоих краях протяженного дефекта электроконвективной структуры НЖК с исходной закрученной на $\pi/2$ ориентацией поля директора \mathbf{n} .

В качестве НЖК использовался 4-*n*-метоксибензилиден-*n*-бутила нилин (МББА), который помещался в ЖК-ячейку между двумя стеклянными подложками с проводящим покрытием из SnO_2 . Поверхность подложек с электродами покрывалась слоем ориентанта полиимида AL1254 (JSR Corp., Japan), который затем натирался в одном направлении для создания однородной планарной ориентации директора \mathbf{n} . Толщина ЖК-ячейки размером 16×12 мм задавалась майларовыми прокладками $d \simeq 20$ мкм. После ее заполнения нематиком и формирования однородной планарной ориентации верхняя подложка медленно поворачивалась относительно нижней по часовой стрелке на угол $\pi/2$, так что во всем слое НЖК возникала однородно закрученная ориентация директора \mathbf{n} . К ЖК-слою прикладывалось перемен-

ное напряжение U с частотой $f_U = 30$ Гц. Пороговое напряжение возникновения доменов Вильямса составляло $U_c = 5.6$ В. При этом их ось ориентирована перпендикулярно директору \mathbf{n} в середине слоя НЖК и составляет углы -45° и 45° , соответственно, с ориентацией директора на верхней и нижней подложках. Направления гидродинамических потоков в доменах определялись путем анализа движений пробных частиц диаметром $2 \div 3$ мкм, добавленных в НЖК. Доменные структуры и их дефекты наблюдались в поляризационный микроскоп Axiolab (Zeiss, Germany), а их изображения регистрировались видеокамерой VX44 (PCO Inc., Germany) с разрешением 720×576 пикселей и оцифровывались внешней платой Pinnacle 700-USB (USA).

Доменами одномерной электроконвективной структуры в НЖК являются цилиндрические вихревые образования – валы (или роллы), аналогичные тем, что образуются в изотропной термоконвекции. Дефект с топологическим зарядом $S = \pm 1$ (дислокация) соответствует скачку фазы на $\pm 2\pi$ в структуре доменов Вильямса, т.е. его сингулярность определяется лишним (или недостающим) пространственным периодом при обходе замкнутого контура вокруг его ядра [12].

Рассмотрим структуру линейного дефекта с диссоциированным ядром в доменной структуре закрученного НЖК с учетом особенностей гидродинамики течений (рис. 1). В отличие от планарно ориенти-

рованную составляющую v_a , направление которой противоположно в соседних доменах [25]. Поэтому поток анизотропной жидкости в доменах приобретает геликоидальный характер, а пространственный период структуры определяется как $T = 2\lambda$. Наблюдения за пробными частицами показали, что непрерывность потоков в дефекте обеспечивается как замыканием сонаправленных аксиальных компонент скорости v_a через ядро, так и их замыканием с противоположно направленными потоками в соседних доменах (рис. 1). При напряжениях $U \lesssim 7.4$ В потоки конвективного течения в доменах являются стационарными.

С увеличением приложенного напряжения обе компоненты скорости потока анизотропной жидкости в доменах v_t и v_a возрастают и при $U > 7.4$ В линейный дефект теряет устойчивость. Однако в отличие от планарно ориентированного НЖК [17] ядро дефекта не распадается на отдельные дислокации, а сначала начинает осциллировать. При этом наблюдается поочередное (периодическое по времени) переадресование доменов с сонаправленными потоками анизотропной жидкости то влево (*zig*), то вправо (*zag*) и движение жидкости в ядре дефекта приобретает пульсирующий характер. Затем происходит распад ядра дефекта на *zig* и *zag* области, осциллирующие в противофазе. Одновременно между границами *zig* и *zag* областей возникают дислокации с топологическими зарядами $S = \pm 1$ (рис. 2).

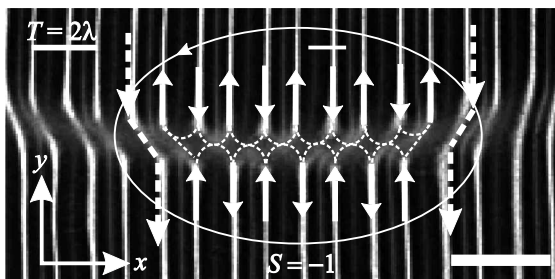


Рис. 1. Изображение линейного дефекта с диссоциированным ядром в доменной структуре закрученного НЖК при $U = 6.5$ В и $f = 30$ Гц. Стрелками показаны направления аксиальных компонент скорости конвективных потоков v_a в доменах вблизи ядра дефекта. Тонкими пунктирными линиями – перераспределение потоков в ядре дефекта. Светлые оптические линии соответствуют центрам доменов, вокруг которых наблюдалось геликоидальное движение частиц. Масштаб 100 мкм

рованного НЖК, конвективные потоки в доменной структуре закрученного НЖК наряду с тангенциальной компонентой скорости v_t имеют и аксиаль-

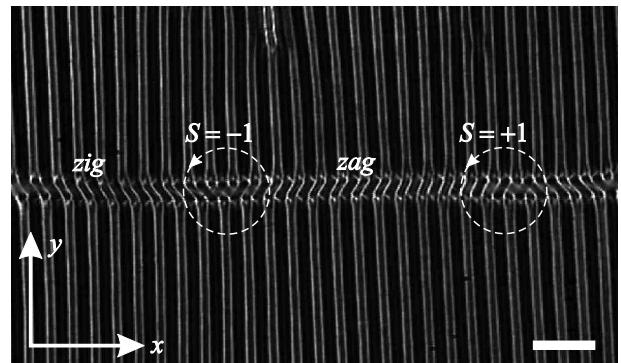


Рис. 2. Изображение доменной структуры с протяженным осциллирующим дефектом в закрученном НЖК при $U = 7.6$ В и $f = 30$ Гц. Масштаб 100 мкм

Дальнейшая динамика дислокаций устанавливается таким образом, чтобы в ядре нестационарного дефекта обеспечивалась непрерывность геликоидального потока анизотропной жидкости. Поскольку длина дефекта L , а, следовательно, и число дислокаций зависят от приложенного напряжения, то существует принципиальная возможность экспери-

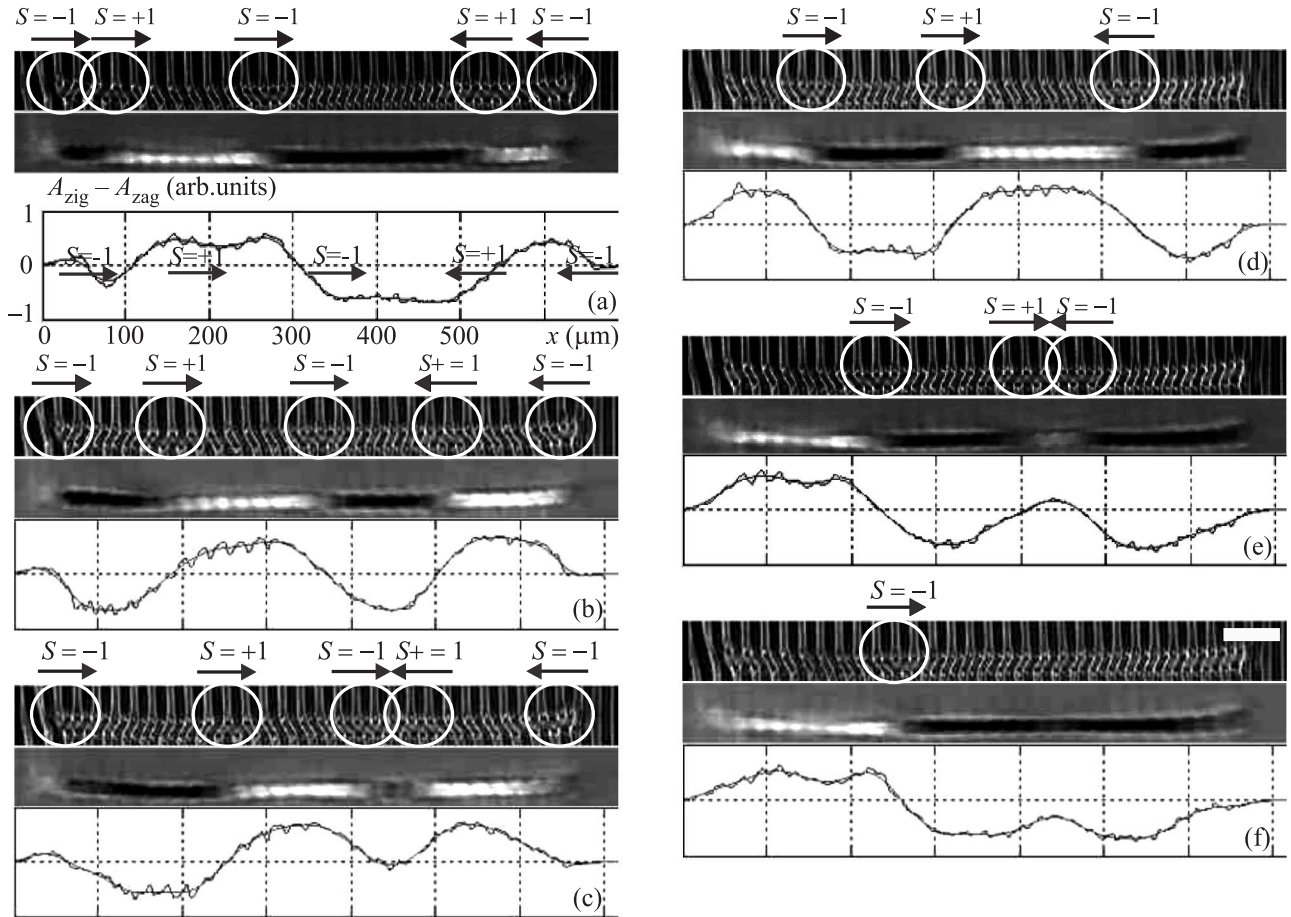


Рис. 3. Динамика каскада взаимодействующих дислокаций с $S = \pm 1$ в линейном дефекте при $U = 7.6$ В в течение одного осцилляционного периода $T = 1.2$ с. (a)–(f) – Исходное изображение линейного дефекта, демодулированное полутоновое изображение разности амплитуд наклонных доменов; график разности амплитуд $A_{zig}(x, t) - A_{zag}(x, t)$. $\Delta t = 0.24$ с, масштаб 100 мкм

ментальной реализации протяженного дефекта с заданным числом взаимодействующих дислокаций. Таким образом, протяженный осциллирующий дефект можно рассматривать в качестве одномерного модельного объекта для изучения движения и взаимодействия дислокаций.

Изображения электроконвективных структур в НЖК представляют собой пространственно периодические модуляции интенсивности прошедшего через ячейку с НЖК света. Эти модуляции соответствуют локальным изменениям оптической анизотропии $\langle \Delta n(t) \rangle$ под действием внешнего электрического поля. В пороге электроконвекции в слое НЖК возбуждаются гидродинамические вихревые движения в виде валов (или роллов). Вихревое движение ориентирует НЖК особенно сильно в области максимального градиента скорости, т.е. в центре вихрей. В результате цилиндрические вихри играют роль линз, фокусирующих свет в светлые линии – домены [26].

В итоге формируется изображение в виде темных и светлых полос (рис. 2).

Таким образом, распределение интенсивности $I(x, y)$ в исходном изображении структуры имеет явно выраженную пространственную периодичность в плоскости ЖК-образца $x-y$. Вертикальные полосы соответствуют стационарным доменам, а протяженный дефект представляется горизонтальной полосой, образованной наклонными доменами *zig* и *zag* типа. Поскольку волновые векторы вертикальных и наклонных доменов явно различаются, то, используя двумерное преобразование Фурье, можно достаточно легко разделить их вклад в результирующее полутоновое изображение структуры. На этом принципе основана техника амплитудной демодуляции [27], которая позволяет из исходного изображения периодической структуры $I(x, y)$ получить пространственное распределение амплитуды этой периодичности. Амплитуда будет характе-

ризовать размах интенсивности между темной и светлой полосами в изображении. Равенство нулю амплитуды указывает на отсутствие периодической структуры. В данном случае нас интересуют амплитуды наклонных *zig* и *zag* доменов $A_{zig}(x, y)$ и $A_{zag}(x, y)$ в ядре дефекта (рис. 2). После последовательной демодуляции каждого изображения видеоряда $I(x, y, t)$ (рис. 3а – верхняя часть рисунка) были получены пространственно-временные зависимости разности амплитуд $A_{zig}(x, y, t)$ и $A_{zag}(x, y, t)$ в виде полутоновых изображений (рис. 3а – средняя часть рисунка). При этом *zig*-моду (наклон доменов влево) соответствует светлая область, а *zag*-моду (наклон доменов вправо) – темная. Границы перехода светлой области в темную (или темной в светлую) в демодулированном изображении указывают на локализацию дислокаций с $S = -1$ (или $S = +1$). Затем проводилось усреднение разности амплитуд по y в области ядра дефекта. Полученные графики $A_{zig}(x, t) - A_{zag}(x, t)$ (рис. 3а – нижняя часть рисунка) были использованы для изучения динамики дислокаций. В данном случае на локализацию дислокаций указывают точки пересечения кривой с нулевой горизонтальной осью.

Проведем детальный анализ динамики каскада взаимодействующих дислокаций в линейном дефекте длиной порядка 30 пространственных периодов доменной решетки (рис. 3).

Пусть в начальный момент времени $t = 0$ линейный дефект с топологическим зарядом $S = -1$ находится в стационарном состоянии. При увеличении напряжения в ядре дефекта образуются наклонные *zig* и *zag* домены с дислокацией между ними, которая движется вправо. Состояние дефекта в этот момент аналогично изображению на рис. 3f. Одновременно на обоих краях дефекта рождаются две дипольные пары дислокаций: с $S = \mp 1$ (слева) и с $S = \pm 1$ (справа) (рис. 3а). Таким образом, в ядре дефекта находятся пять дислокаций. При этом две дислокации – вторая слева с $S = +1$ и центральная с $S = -1$ движутся вправо, а вторая с правого края с $S = +1$ – влево (рис. 3b). Крайние дислокации остаются неподвижными. На рисунке 3с ближайшие встречные дислокации: центральная с $S = -1$ и вторая справа $S = +1$ начинают взаимодействовать. Крайние дислокации с $S = -1$ по-прежнему остаются на краях дефекта. Далее, одновременно с аннигиляцией взаимодействующих дислокаций в точке с координатой $x \simeq 440$ мкм крайние дислокации с топологическими зарядами $S = -1$ начинают движение (рис. 3d). Затем происходит новое взаимодействие двух дислокаций: второй слева с $S = +1$ и

оставшейся справа с $S = -1$ (рис. 3e). После их аннигиляции в той же точке $x \simeq 440$ мкм остается одна дислокация с зарядом $S = -1$ (рис. 3f) и процесс повторяется снова.

Попробуем теперь качественно описать наблюдаемый динамический процесс в рамках модели синус-Гордона [28]. Поскольку размер элементарной ячейки электроконвективной структуры в закрученном на $\pi/2$ НЖК определяется как $T = 2\lambda$, что связано с антипараллельностью аксиальных компонент скорости потока в соседних доменах, то в качестве узла доменной решетки будем рассматривать центр “двойного домена” вдоль направления x . Тогда, как показано в [21, 22], уравнение движения после перехода к континуальному приближению имеет вид:

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi^2} + \beta \sin \eta = 0, \quad (1)$$

где $\eta = \pi u/\lambda$ – нормированная функция смещения двойного домена от его равновесного положения вдоль направления x ; $\xi = x/(2\lambda\sqrt{k})$ – нормированная координата, $k = (\lambda/\pi)^2(k'/V_0')$, k' – константа взаимодействия соседних доменов, V_0' – энергия, приходящаяся на единицу длины двояного домена; $\tau = (\pi/\lambda)\sqrt{V_0'/m'}t$ – нормированное время, $m' = m/l$ – удельная масса двойного домена, l – длина двойного домена; параметр β – функция пространства, которая имеет форму “потенциальной ямы”, для простоты положим $\beta = 1$.

Для описания полученных экспериментальных результатов будем использовать кинковые (антикинкковые) решения уравнения (1) в виде [29]:

$$\eta = 4 \operatorname{arctg} \left(\exp \left(\pm \frac{\xi - \xi_0 - v\tau}{\sqrt{1 - v^2}} \right) \right), \quad (2)$$

где ξ_0 – координата центра кинка (антикинка) относительно их точки взаимодействия, v – его скорость.

Далее, предположив, что в эксперименте столкновение дислокаций можно рассматривать как кинк-антикинк взаимодействие (см., например, [24]), применим (1) и (2) к изучаемой задаче. В качестве решения уравнения (1) будем использовать решение в виде цепочки из кинков и антикинков с противоположными топологическими зарядами $S = \pm 1$. Число кинков возьмем нечетным: слева три (два антикинка и один кинк) и справа два (кинк и антикинк). Пусть в начальный момент времени кинки и антикинки находятся друг от друга на некотором расстоянии, подобранном в соответствии с экспериментальными данными (рис. 3). За центр рассматриваемой системы возьмем место столкновения кинков и антикинков (нуль системы координат), представляющее

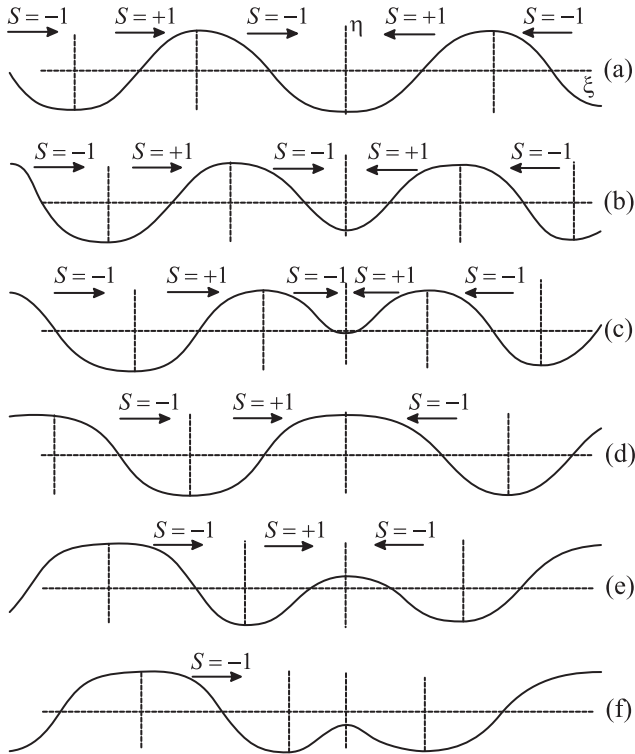


Рис. 4. Численные иллюстрации динамики каскада кинк-антикинк взаимодействий в различные моменты времени

собой потенциальную яму. В динамике такое взаимодействие кинка и антикинка можно рассматривать как локализованный на яме бризер УСГ [30]. Такие группы, состоящие из кинков и антикинков с противоположными топологическими зарядами, движутся навстречу друг другу с разными безразмерными скоростями. В результате численного эксперимента было установлено, что качественно хорошо согласуются теория и эксперимент, если ширина кинков справа будет на $\sim 30\%$ больше ширины кинков слева.

На рисунке 4 построены зависимости вида решения уравнения (2) для каскада кинк-антикинковых взаимодействий в различные моменты времени. В численных расчетах использовались экспериментально полученные значения безразмерных скоростей движения дислокаций $v_1 = 0.36$ и $v_2 = 0.3$, представляющих собой отношения абсолютных скоростей движения дислокаций $V_1 \simeq 180$ мкм/с и $V_2 \simeq 150$ мкм/с при данном напряжении $U = 7.6$ В к средней максимальной скорости их движения $\langle V_{\max} \rangle \simeq 500$ мкм/с при $U = 10$ В, при котором доменная структура еще стационарна.

Сравнение теоретических зависимостей (рис. 4) с экспериментальными кривыми (рис. 3) показыва-

ет хорошую качественную корреляцию полученных результатов.

Таким образом, в данной работе исследована пространственно-временная динамика ансамбля взаимодействующих дислокаций в линейном дефекте электроконвективной структуры закрученного на $\pi/2$ НЖК. Движение и взаимодействие дислокаций в ядре дефекта устанавливаются таким образом, чтобы обеспечивалась непрерывность потока анизотропной жидкости в доменах. Показано, что динамика дислокаций в линейном дефекте качественно хорошо описывается мультикинковым решением УСГ. Исследуемые протяженные дефекты можно рассматривать в качестве одномерных модельных объектов для изучения сложной динамики дислокаций.

В экспериментальных исследованиях использовалось оборудование Центра коллективного пользования “Спектр” ИФМК УФИЦ РАН и Регионального центра коллективного пользования “Агидель”.

Работа выполнена в рамках госзадания # АААА-А19-119022290052-9.

1. P. Coulet, L. Gil, and J. Lega, *Phys. Rev. Lett.* **62**, 2957 (1989).
2. М. И. Рабинович, М. М. Суцник, *УФН* **160**, 3 (1990).
3. M. C. Cross and P. C. Hohenberg, *Rev. Mod. Phys.* **65**, 851 (1993).
4. С. А. Пикин, *Структурные превращения в жидких кристаллах*, Наука, М. (1981).
5. P. G. de Gennes and J. Prost, *The Physics of Liquid Crystals*, Clarendon, Oxford (1994).
6. A. Buka and L. Kramer (editors), *Pattern Formation in Liquid Crystals*, Springer-Verlag, N.Y. (1996).
7. M. Kleman, *Points, Lines and Walls in Liquid Crystals, Magnetic Systems and Various Ordered Media*, John Wiley & Sons, Chichester (1983).
8. М. В. Курик, О. Д. Лаврентович, *УФН* **154**, 381 (1988).
9. L. Lam and J. Prost (editors), *Solitons in Liquid Crystals*, Springer Science & Business Media, N.Y. (1992).
10. O. D. Lavrentovich, P. Pasini, C. Zannoni, and S. Zumer (editors), *Defects in Liquid Crystals: Computer Simulations, Theory and Experiments*, Kluwer Academic Publishers, The Netherlands (2001).
11. П. В. Долганов, В. М. Жилин, В. К. Долганов, Е. И. Кац, *Письма в ЖЭТФ* **89**, 181 (2009).
12. A. Joets and R. Ribotta, *J. Phys. (Paris)* **47**, 595 (1986).
13. S. Kai, N. Chizumi, and M. Kohno, *J. Phys. Soc. Jpn.* **58**, 3541 (1989).
14. S. Nasuno, S. Takeuchi, and Y. Sawada, *Phys. Rev. A* **40**, 3457 (1989).

15. S. Rasenat, V. Steinberg, and I. Rehberg, *Phys. Rev. A* **42**, 5998 (1990).
16. E. Bodenschatz, W. Pesch, and L. Kramer, *J. Stat. Phys.* **64**, 1007 (1991).
17. A. Joets and R. Ribotta, *J. Stat. Phys.* **64**, 981 (1991).
18. V. A. Delev, P. Toth, and A. P. Krekhov, *Mol. Cryst. Liq. Cryst.* **351**, 179 (2000).
19. О. А. Скалдин, Г. Р. Якупова, В. А. Делев, Ю. А. Лебедев, А. А. Назаров, *ФТТ* **47**, 362 (2005).
20. S. Tatsumi, M. Sano, and A. G. Rossberg, *Phys. Rev. E* **73**, 011704 (2006).
21. А. Н. Чувывров, О. А. Скалдин, В. А. Делев, Ю. А. Лебедев, Э. С. Батыршин, *ЖЭТФ* **130**, 1072 (2006).
22. О. А. Скалдин, В. А. Делев, Е. С. Шиховцева, Э. С. Батыршин, Ю. А. Лебедев, *Письма в ЖЭТФ* **93**, 431 (2011).
23. О. А. Скалдин, В. А. Делев, Е. С. Шиховцева, Ю. А. Лебедев, Э. С. Батыршин, *Письма в ЖЭТФ* **100**, 181 (2014).
24. В. А. Делев, О. А. Скалдин, Э. С. Батыршин, В. Н. Назаров, Е. Г. Екомасов, *Письма в ЖЭТФ* **109**, 84 (2019).
25. A. Hertrich, A. P. Krekhov, and O. A. Scaldin, *J. Phys. II (France)* **4**, 239 (1994).
26. Л. М. Блинов, *Электро- и магнитооптика жидких кристаллов*, Наука, М. (1978).
27. M. Dennin, D. S. Cannell, and G. Ahlers, *Phys. Rev. E* **57**, 638 (1998).
28. O. M. Braun and Yu. S. Kivshar, *The Frenkel-Kontorova Model: Concepts, Methods, and Applications*, Springer, Berlin (2004).
29. A.-M. Wazwaz, *Partial Differential Equations and Solitary Waves. Theory*, Springer, Dordrecht, Heidelberg, London, N.Y. (2009).
30. J. Cuevas-Maraver, P. G. Kevrekidis, and F. Williams (editors), *The Sine-Gordon Model and Its Applications. From Pendula and Josephson Junctions to Gravity and High-energy Physics*, Springer, Heidelberg, N.Y., Dordrecht, London (2014).