

Некогерентный форм-фактор в дифракционном излучении и излучении Смита–Парселла

А. А. Тищенко¹⁾, Д. Ю. Сергеева

Национальный исследовательский ядерный университет “МИФИ”, 115409 Москва, Россия

Национальный исследовательский центр “Курчатовский институт”, 123182 Москва, Россия

Международная научно-образовательная лаборатория радиационной физики,
Национальный исследовательский университет “БелГУ”, 308034 Белгород, Россия

Поступила в редакцию 12 октября 2019 г.

После переработки 12 октября 2019 г.

Принята к публикации 12 октября 2019 г.

Показано, что в поляризационном излучении пучков заряженных частиц в общем случае существует некогерентный форм-фактор, обусловленный конечным поперечным размером пучка, так что широко распространенное понимание, что форм-фактор характеризует только когерентное излучение сгустков заряженных частиц, вообще говоря, неверно. Причина существования некогерентного форм-фактора – взаимодействие заряженных частиц с краем мишени в направлении, перпендикулярном их траектории. Некогерентный форм-фактор имеет место для дифракционного излучения, излучения Смита–Парселла, а также остальных видов поляризационного излучения в случае ограниченных в поперечном направлении мишеней: переходного излучения, параметрического рентгеновского излучения, излучения Вавилова–Черенкова. Показано, что некогерентный форм-фактор тем больше отличен от единицы, чем меньше отношение импакт-параметра к поперечному размеру сгустка. Кроме того, показано, что поперечная часть когерентного форм-фактора отлична от единицы в ту же меру, как и некогерентный форм-фактор.

DOI: 10.1134/S0370274X19220028

1. Введение. Явление излучения заряженными частицами электромагнитных волн лежит в основе многочисленных применений. Это генерация электромагнитного излучения различных диапазонов на компактных ускорителях, синхротронах, лазерах на свободных электронах, а также диагностика пучков электронов, протонов и других типов заряженных частиц на ускорителях и коллайдерах.

Обычно спектрально-угловая плотность энергии излучения от пучка представляется в виде [1, 2]:

$$\frac{d^2 W_N(\mathbf{n}, \omega)}{d\omega d\Omega} = \frac{d^2 W_1(\mathbf{n}, \omega)}{d\omega d\Omega} G(\mathbf{k}), \quad (1)$$

где

$$\frac{d^2 W_1(\mathbf{n}, \omega)}{d\omega d\Omega} = cr^2 |\mathbf{E}_1(\mathbf{r}, \omega)|^2 \quad (2)$$

– распределение энергии излучения от одной частицы в единицу частоты $d\omega$ и в единицу телесного угла $d\Omega$, $G(\mathbf{k})$ – форм-фактор, определяющий свойства пучка, ω – частота излучения, \mathbf{k} – волновой вектор, $\mathbf{n} = \mathbf{k}/k$ – единичный волновой вектор, c – скорость

света в вакууме, $\mathbf{r} = r\mathbf{n}$ – радиус-вектор точки наблюдения, $\mathbf{E}_1(\mathbf{r}, \omega)$ – Фурье-образ поля излучения от одной частицы. Во многих статьях и монографиях форм-фактор записывается в виде [1, 3, 4]

$$G(\mathbf{k}) = N + N(N - 1)G_{\text{coh}}(\mathbf{k}), \quad (3)$$

где N – число частиц в сгустке, а фактор когерентности, или, что то же самое, когерентный форм-фактор $G_{\text{coh}}(\mathbf{k})$ вычисляется как Фурье-образ функции плотности вероятности распределения частиц в пучке $f(\mathbf{r}')$ [5, 6]:

$$G_{\text{coh}}(\mathbf{k}) = \left| \int d^3 r' \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}') f(\mathbf{r}') \right|^2. \quad (4)$$

Так как форм-фактор в выражении (3) содержит размеры, профиль, внутреннюю структуру пучка, в старых работах его называют структурным фактором [1]. Здесь стоит отдельно отметить работу [6], авторы которой называют структурным фактором величину $\sqrt{G_{\text{coh}}(\mathbf{k})}$, а форм-фактором называют величину $G_{\text{coh}}(\mathbf{k})$.

Первое слагаемое в формуле (3) описывает некогерентное излучение, когда складываются интенсив-

¹⁾e-mail: tishchenko@mephi.ru

ности излучения от отдельных частиц; второе слагаемое происходит из-за интерференции при сложении полей, и описывает когерентное излучение. Поскольку на практике используются пучки с числом заряженных частиц N , доходящим в сгустках современных коллайдеров до 10^{11} , то множитель N^2 чрезвычайно велик, так что поведение фактора когерентности G_{coh} как функции углов и частот играет ключевую роль.

В качестве обоснования справедливости формул (3) и (4) обычно приводится следующее качественное рассмотрение. Каждая движущаяся заряженная частица описывается некоторой плотностью тока, так что все точки ее траектории можно считать источниками поля излучения. Пользуясь принципом суперпозиции, суммарное излучение можно рассчитать как сумму полей излучения от каждой из частиц пучка. Пусть плотность вероятности распределения частиц в пучке описывается функцией $f(\mathbf{r}')$, где \mathbf{r}' – радиус-вектор, определяющий положение частиц. Поле излучения от n -й частицы с радиус-вектором \mathbf{r}'_n отличается от поля $\mathbf{E}_1(\mathbf{r}, \omega)$ частицы, расположенной в начале координат, лишь набегом фазы, которую обозначим некоторой величиной $\psi_n = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}'_n$. Таким образом, суммарное поле излучения N частиц дается выражением

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = \mathbf{E}_1(\mathbf{r}, \omega) \sum_{n=1}^N \exp(-i\psi_n). \quad (5)$$

Так как спектрально-угловая плотность излученной энергии прямо пропорциональна квадрату модуля поля излучения, усредненному по положению частиц в пучке, то

$$\frac{d^2 W_N(\mathbf{n}, \omega)}{d\omega d\Omega} = \frac{d^2 W_1(\mathbf{n}, \omega)}{d\omega d\Omega} \left\langle \sum_{n=1}^N |\exp(-i\psi_n)|^2 + \sum_{n=1}^N \sum_{\substack{m=1, \\ m \neq n}}^{N-1} \exp(-i\psi_n) \exp(i\psi_m) \right\rangle, \quad (6)$$

где угловые скобки означают усреднение по положению всех частиц в сгустке. Отсюда

$$\frac{d^2 W_N(\mathbf{n}, \omega)}{d\omega d\Omega} = \frac{d^2 W_1(\mathbf{n}, \omega)}{d\omega d\Omega} \times \left[N + N(N-1) \left| \int d^3 r' \exp(-i\psi(\mathbf{r}')) f(\mathbf{r}') \right|^2 \right], \quad (7)$$

что совпадает с выражениями (1)–(4), где $\psi(\mathbf{r}') = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}'$.

Вывод формулы (7) и ее явный вид справедливы всегда, когда источником излучения являются непосредственно заряженные частицы, например, для синхротронного, ондуляторного, магнитотормозного, тормозного и других родственных им типов излучений.

Однако, кроме излучения заряженной частицы, обусловленного наличием у нее ускорения, существует и другой механизм излучения – поляризационный. В этом случае непосредственным источником излучения служит возбуждаемое полем частицы вещество. При этом саму частицу, следуя подходу И. М. Франка и В. Л. Гинзбурга [7], допустимо рассматривать как равномерно двигающуюся – в том, понятно, случае лишь, когда потерями энергии частицы можно пренебречь по сравнению с ее кинетической энергией. К поляризационному механизму относятся излучения Вавилова–Черенкова, переходное, параметрическое рентгеновское и, кроме того, два вида излучения, прямо связанные с наличием края вещества: дифракционное излучение (при пролете частиц вблизи края мишени) и излучение Смита–Парселла (при пролете частиц над поверхностью дифракционной решетки) [8].

Для этих видов излучения в подавляющем большинстве статей и монографий исследователи тоже пользуются формулой (7). И действительно, рассуждение перед формулой (5) в случае поляризационного излучения нетрудно обобщить следующим образом: вместо непосредственно излучающих заряженных частиц пучка рассмотрим поверхность, на которой есть поляризационные токи, индуцированные динамически изменяющимся полем быстрых заряженных частиц. В этом случае излучение с разных точек этой поверхности складывается так же, и формула (5) снова остается справедливой. Заметим, что данное рассмотрение в случае переходного излучения от пластинки с бесконечными поперечными к траектории частиц размерами и конечной толщины совпадает с результатами точной теории переходного излучения, получаемой непосредственно из решения уравнений Максвелла [1]. Это вполне естественно, поскольку при выводе выражения (5), а вместе с ним и (7), мы пользовались лишь принципом суперпозиции, а он остается верным для систем невзаимодействующих частиц в рамках линейной электродинамики.

В данной работе мы показываем, однако, что в случае поляризационного излучения пучков заряженных частиц существует целый класс явлений, обусловленный близостью края мишени, когда выражение (7), вообще говоря, неверно.

2. Форм-фактор в поляризованном излучении. Рассмотрим для примера качественно генерацию дифракционного излучения как процесс рассеяния кулоновского поля движущейся заряженной частицы. Описывая кулоновское поле как набор виртуальных квантов с импульсом \mathbf{q} , применим законы сохранения энергии и импульса, подобно тому, как сделано в [9]. Заметим, что нарушение уравнения массовой поверхности для виртуальных фотонов не мешает возможности выполнения законов сохранения импульса и энергии в процессе выхода виртуальных фотонов на “массовую поверхность” при посредстве рассеивателя (среды), в нашем случае в процессе преобразования кулоновского поля заряженных частиц в поле электромагнитной волны излучения с волновым вектором \mathbf{k} . В качестве примеров применения этой техники качественных оценок к проблемам излучения заряженных частиц, можно сослаться, например, на хорошо известные работы [3, 10, 11].

Итак, рассмотрим пролет частицы возле края мишени, в качестве которой может быть экран (плоскопараллельная пластина), цилиндрический стержень и т.п. Пусть частица движется вдоль оси x , в направлении которой мишень ограничена; ось z совпадает с нормалью к поверхности мишени; вдоль оси y свойства поверхности вещества однородны, т.е. проекция импульса на эту ось сохраняется. Учитывая закон сохранения импульса и энергии в рамках метода эквивалентных фотонов, соответственно, имеем:

$$\begin{aligned} q_y &= k_y, \\ q &= k. \end{aligned} \quad (8)$$

Также, запишем дисперсионное соотношение, следующего из явного вида собственного поля заряженных частиц (равенство нулю аргумента дельта-функции Фурье-образа кулоновского поля частицы, движущейся со скоростью \mathbf{v}):

$$\omega = \mathbf{q} \cdot \mathbf{v}. \quad (9)$$

С учетом $q = \sqrt{q_x^2 + q_y^2 + q_z^2}$, получаем

$$\mathbf{q} = \left(\frac{\omega}{c\beta}, k_y, -i \frac{\omega}{\gamma\beta c} \sqrt{1 + \gamma^2 \beta^2 n_y^2} \right), \quad (10)$$

где $\mathbf{n} = \mathbf{k}c/\omega$, $\beta = v/c$ – приведенная скорость заряженной частицы, возбуждающей излучение, и $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$ – Лоренц-фактор частиц. Отметим, что выражение (10) получено в предположении, что оси координат выбраны так, что ось Ox совпадает с положительным направлением скорости частицы

(так что $\omega = q_x v$), а также в предположении, что излучение регистрируется только в верхней полуплоскости (выбран отрицательный знак перед корнем в q_z). Выражение для полного поля излучения записывается в виде, аналогичном (5), как сумма полей излучения от множества точек излучающей поверхности мишени:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = \mathbf{E}_1(\mathbf{r}, \omega) \sum_{n=1}^N \exp(-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}'_n). \quad (11)$$

Следует подчеркнуть, что условие $q_y = k_y$, отвечающее однородности (большим размерам) мишени вдоль оси y – этот размер должен заметно превышать как соответствующий размер сгустка, так и величину характерного поперечного размера поля движущихся заряженных частиц $\gamma\beta\lambda/2\pi$ – существенно для применимости формулы (11), поскольку сохранение импульса на ось y позволяет снять аксиальную симметрию задачи, так что в плане возбуждения излучения каждая из частиц сгустка оказывается в одинаковых условиях, за исключением их расстояния до поверхности мишени. Для мишеней же с малыми размерами по оси y условие $q_y = k_y$ не соблюдается, поэтому формула (11) несправедлива, и в этом случае требуется отдельное рассмотрение.

Вычисление спектрально-угловой плотности излучения приводит к выражению, аналогичному (6):

$$\begin{aligned} \frac{d^2 W_N(\mathbf{n}, \omega)}{d\omega d\Omega} &= \frac{d^2 W_1(\mathbf{n}, \omega)}{d\omega d\Omega} \left\langle \sum_{n=1}^N |\exp(-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}'_n)|^2 + \right. \\ &+ \left. \sum_{n=1}^N \sum_{\substack{m=1, \\ m \neq n}}^{N-1} \exp(-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}'_n) \exp(i\mathbf{q}^* \cdot \mathbf{r}'_m) \right\rangle. \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь верхний индекс * означает комплексное сопряжение. Существенное отличие (12) от (6) заключается в комплексности фазы $\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}'_n$, что вместо широко используемого выражения (7) дает

$$\frac{d^2 W_N(\mathbf{n}, \omega)}{d\omega d\Omega} = \frac{d^2 W_1(\mathbf{n}, \omega)}{d\omega d\Omega} F, \quad (13)$$

где

$$F = N F_{\text{inc}} + N(N-1) F_{\text{coh}}, \quad (14)$$

а некогерентный и когерентный форм-факторы вычисляются как:

$$F_{\text{inc}} = \int d^3 r' |\exp(-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}')|^2 f(\mathbf{r}'), \quad (15)$$

$$F_{\text{coh}} = \left| \int d^3 r' \exp(-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}') f(\mathbf{r}') \right|^2. \quad (16)$$

В выражениях (15), (16) вектор \mathbf{q} определен через компоненты волнового вектора \mathbf{k} поля излучения и скорость заряженной частицы \mathbf{v} в соответствии с формулой (10), $f(\mathbf{r}')$ – плотность вероятности распределения частиц в пучке относительно центра сгустка.

Выражения (13)–(16) получены здесь из качественного описания явления на языке эквивалентных фотонов и использования фундаментальных законов сохранения. Кроме того, эти результаты совпадают с результатами непосредственного расчета на основе уравнений Максвелла в вакуумном ультрафиолетовом и рентгеновском диапазоне: при расчете излучения одной заряженной частицы (теория дифракционного излучения в [12] и теория излучения Смита–Парселла [9]), и расчете излучения сгустков частиц, как с равномерным распределением частиц [13–15], так и с гауссовым [16]. Также зависимость поля излучения типа (11) возникает для идеально проводящих мишеней, т.е. в длинноволновой части спектра, см. [17, 18]. Действительно, в рамках весьма общего подхода – метода шивки – зависимость свойств поля излучения от плотности токов входит через граничные условия. Поскольку при этом зависимость типа (11) непосредственно содержится в Фурье-образе плотности токов, то она же присутствует и в поле излучения.

Комплексность фазы в (11), в отличие от фазы в выражении (7), обусловлена принципиальным отличием поляризационного механизма генерации излучения от тормозного механизма, когда источником излучения является непосредственно изменение – по модулю или по направлению – скорости заряженной частицы. Физически это обусловлено характерной чертой: источником поляризационного излучения является вещество, возбуждаемое полем заряженных частиц, и характеристики излучения непосредственно зависят от конфигурации этого поляризуемого поля. Для того, однако, чтобы проявилась комплексность фазы в (11), необходимо, чтобы край мишени в поперечном к траектории пучка частиц направлении находился на конечном расстоянии.

Действительно, в случае, когда частицы пролетают вблизи края мишени, частицы пучка расположены на разном расстоянии до края, ввиду конечных поперечных размеров пучка. В силу экспоненциального убывания Фурье-компоненты кулоновского поля с характерным размером $\gamma\beta\lambda/2\pi$ (λ – длина волны излучения), заряженные частицы, расположенные на разном расстоянии от края мишени, вносят различный вклад в поляризацию вещества мишени. Математически это отвечает тому, что в вы-

ражении (11) фаза является комплексной величиной для любых процессов поляризационного излучения, на чьи характеристики оказывает влияние наличие края мишени; мнимая часть этой фазы как раз отвечает экспоненциальному закону убывания полей, поляризующих вещество.

Это справедливо не только для дифракционного излучения и излучения Смита–Парселла, но и для черенковского излучения, переходного, параметрического рентгеновского излучения, в условиях близости края мишени. Сегодня, в подавляющем большинстве работ, даже посвященных дифракционному излучению и излучению Смита–Парселла, расчет ведется по формуле (7) вместо формул (13)–(16). При этом, конечно, при условии пренебрежимо малого поперечного размера пучка и ошибки не совершается, так что даже неверный подход может давать адекватные результаты.

3. Оценка вклада некогерентного форм-фактора. Для демонстрации отличий в форм-факторах излучения при расчете по формулам (3) и (14) рассмотрим два примера: дифракционное излучение от а) цилиндрического сгустка с равномерным распределением электронов; б) гауссова сгустка электронов.

а) Пусть сгусток имеет форму цилиндра длиной l и радиусом r_0 , содержит N частиц, которые распределены равномерно. Здесь и ниже выберем систему координат таким образом, чтобы сгусток двигался вдоль оси x , а ось z совпадала с нормалью к поверхности мишени. Тогда единичный вектор наблюдения излучения удобно задать как:

$$\mathbf{n} = (\cos \theta, \sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi). \quad (17)$$

Интегрирование по объему такого сгустка в (4) даст [1]:

$$G_{\text{coh}} = 4 \left(\frac{\sin(\omega l/2\nu)}{\omega l/2\nu} \frac{J_1(r_0 \sqrt{k_y^2 + k_z^2})}{r_0 \sqrt{k_y^2 + k_z^2}} \right)^2, \quad (18)$$

где $J_1(r_0 \sqrt{k_y^2 + k_z^2})$ – функция Бесселя первого порядка, $\mathbf{k} = \mathbf{n}\omega/c$.

В то же время, интегрирование по объему сгустка в (15)–(16) дает корректные формулы:

$$F_{\text{inc}} = 2 \frac{I_1(2\rho r_0)}{2\rho r_0}, \quad (19)$$

$$F_{\text{coh}} = 4 \left(\frac{\sin(\omega l/2\nu)}{\omega l/2\nu} \frac{I_1(r_0 \omega/c\beta\gamma)}{r_0 \omega/c\beta\gamma} \right)^2, \quad (20)$$

где $\rho = \frac{\omega}{\gamma\beta c} \sqrt{1 + \gamma^2 \beta^2 n_y^2}$, $I_1(x)$ – модифицированная функция Бесселя первого порядка. Отметим, что выражение (20) в отличие от (18) не содержит зависимости от углов излучения, которые входят в (18) через компоненты k_y, k_z волнового вектора \mathbf{k} .

Полученные выражения верны для частиц любой энергии, с тем лишь ограничением, что потери на излучение должны быть много меньше энергии частицы.

Для частиц с большой энергией, т.е. с $\gamma \gg 1$ и $\beta \approx 1$ ($v \approx c$), дифракционное излучение сосредоточено вблизи плоскости, в которой лежат траектория частицы и вектор нормали к поверхности мишени, т.е. плоскости $n_y = 0$. Характерный угол дифракционного излучения $\theta \approx \gamma^{-1}$, а компоненты единичного вектора наблюдения $n_x \approx 1$, $n_z \approx \gamma^{-1}$. Тогда сравнивая когерентные форм-факторы (18) и (20), получаем, что они отличаются лишь типом функции Бесселя. Две эти функции Бесселя ведут себя одинаково только при малом аргументе, что можно видеть из рис. 1а: при $r_0\omega/c\beta\gamma > 1/2$ или, иначе, при

$$r_0 > \frac{1}{2} \frac{\gamma\beta\lambda}{2\pi} \quad (21)$$

когерентные форм-факторы (18) и (20) заметно отличаются.

В свою очередь, отличие некогерентного форм-фактора (19) от единицы очевидно при условии, см. рис. 1б:

$$r_0 > \frac{1}{2} \frac{\gamma\beta\lambda}{4\pi}. \quad (22)$$

Необходимо отметить, что рост функций на рис. 1 в соответствии с формулами (19) и (20), вообще говоря, ограничен убывающей экспонентой, всегда входящей в спектрально-угловое распределение излучения от одной частицы в присутствии края мишени:

$$\frac{d^2 W_1(\mathbf{n}, \omega)}{d\omega d\Omega} \propto \exp[-2\rho h], \quad (23)$$

где h – импакт-параметр, т.е. кратчайшее расстояние между центром сгустка и поверхностью мишени. При этом мы имеем геометрическое ограничение: ясно, что поперечный размер сгустка не должен превышать расстояние между его центром и поверхностью мишени, т.е.

$$h \geq r_0. \quad (24)$$

Заметим, что в случае сверхвысоких ультрарелятивистских энергий частиц на практике условие (24) берется с более жестким неравенством “ \gg ”, поскольку из соображений радиационной безопасности пучки обычно отводят на расстояния, заметно превышающие поперечный размер пучка, чтобы избежать

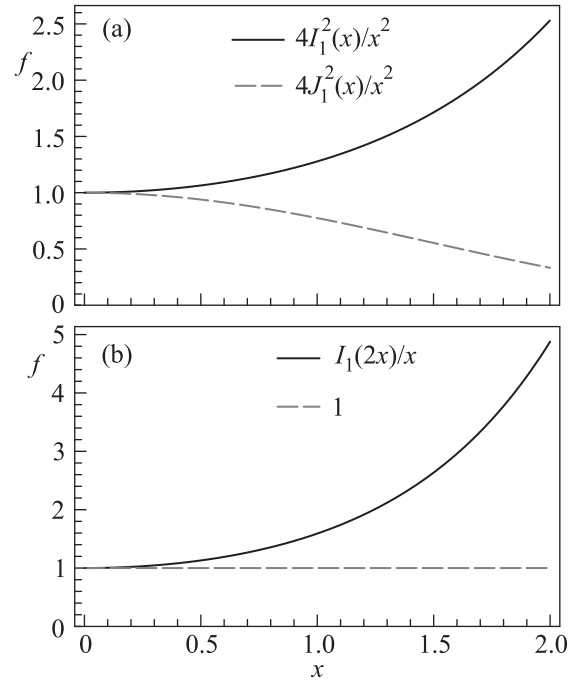


Рис. 1. (Цветной онлайн) (а) – Функции $f(x)$, равные $4I_1^2(x)/x^2$ и $4J_1^2(x)/x^2$, определяющие, соответственно, корректное и некорректное поведение поперечной части когерентного форм-фактора. (б) – Функция $I_1(2x)/x$, определяющая некогерентный форм-фактор

наведения радиоактивности в мишенях гало пучков. Однако, в случае умеренных энергий, в том числе и релятивистских, точно так же на практике пучки пускают максимально близко к мишени (дифракционной решетке в случае генерации излучения Смита–Парселла) – настолько близко, что даже отмечают значительный нагрев мишени [19, 20].

С ростом ρh , см. выражение (23), интенсивность излучения падает экспоненциально. Величина

$$\rho_{\max} h = 2\pi h / \gamma\beta\lambda, \quad (25)$$

однако на практике в релятивистском случае можно увеличивать величину h в b раз ($b > 1$), до тех пор пока экспоненциальное подавление еще не слишком велико и чувствительности детектора хватает для регистрации излучения. В таком случае, существует интервал значений параметров

$$\gamma\lambda \frac{b}{2\pi} > h > \gamma\lambda \frac{1}{8\pi}, \quad (26)$$

когда излучение еще довольно интенсивно и вполне регистрируемо экспериментально, а влиянием некогерентного форм-фактора и корректным учетом (поперечной части) когерентного форм-фактора пренебрегать нельзя.

На рисунке 2а представлена зависимость спектрально-углового распределения дифракционного излучения цилиндрического ступка от длины волны. Черная сплошная кривая соответствует формуле (13), красная пунктирная кривая – формуле (1). Спектрально-угловое распределение излучения одного электрона бралось из работы [14] для рентгеновского диапазона частот. Длина электронного ступка выбрана таким образом, что излучение является некогерентным. На рисунке 2б показано различие в спектрально-угловой плотности, рассчитанной по формулам (1) и (13), когда излучение когерентно.

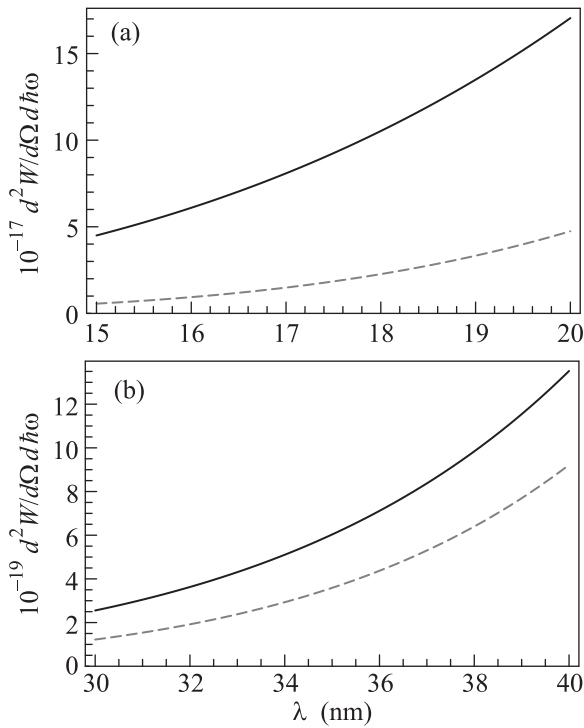


Рис. 2. (Цветной онлайн) Зависимость спектрально-углового распределения дифракционного излучения цилиндрического ступка от длины волны. (а) – Некогерентное излучение от ступка радиусом $r_0 = 40$ мкм, длиной $l = 0.16$ мм. (б) – Когерентное излучение от ступка радиусом $r_0 = 50$ мкм, длиной $l = 50$ мкм. Черные сплошные кривые соответствуют формуле (13), красные пунктирные кривые соответствуют формуле (1). Для всех кривых $N = 10^8$, $\gamma = 10^4$, $\varphi = 0$, $\theta = \gamma^{-1}$, $\hbar\omega_p = 26.1$ эВ (бериллий), импакт-параметр $h = 50$ мкм, функция диэлектрической проницаемости вещества мишени $\varepsilon(\omega) = 1 - \omega_p^2/\omega^2$, ширина пластинки $a = 165$ мкм

Излучение Смита–Парселла при нормальном пролете частицы над решеткой сосредоточено в плоскости, в которой лежат траектория частицы

и вектор нормали к поверхности мишени, т.е. в плоскости $n_y = 0$. Характерные углы излучения Смита–Парселла определяются дисперсионным соотношением [21]:

$$\lambda = \frac{d}{s}(\beta^{-1} - n_x), \quad s = 1, 2, \dots, \quad (27)$$

где d – период решетки, s – целое положительное число. Тогда, после подстановки $n_x = \beta^{-1} - s\lambda/d$ и $n_z = \sqrt{1 - (\beta^{-1} - s\lambda/d)^2}$ в (18), видно, что и в случае излучения Смита–Парселла, как и в разобранный выше случае дифракционного излучения, отличие поперечных частей когерентных форм-факторов – неправильного (18) и правильного (20) – определяется разными математическими функциями при любом размере ступка. Аналогичный вывод можно сделать и об отличии некогерентного форм-фактора от единицы.

б) Рассмотрим другой пример. Пусть частицы в ступке распределены по Гауссу во всех трех направлениях. Интегрирование в формуле (4) для такого ступка дает:

$$G_{\text{coh}} = \exp \left[-\frac{k_x^2 \sigma_x^2}{2} - \frac{k_y^2 \sigma_y^2}{2} - \frac{k_z^2 \sigma_z^2}{2} \right], \quad (28)$$

где $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ – характерные размеры ступка в соответствующих направлениях.

Существенно, что в интегралах (15), (16) интегрирование ведется по всему пространству, и ограничение, если возникает, определяется областью отличия от нуля функции плотности вероятности распределения частиц $f(\mathbf{r}')$. Математически, функция $f(\mathbf{r}')$ для гауссова пучка определена во всем пространстве, поэтому, строго говоря, выражения (15) и (16) описывают форм-фактор гауссовского пучка, часть частиц которого летит над поверхностью мишени, а часть под ней. При этом излучение может быть более интенсивным, если центр ступка летит очень близко к поверхности. Описание такого излучения может быть проведено более строго, как это было сделано в работе [16]. Однако для качественного рассмотрения эффекта достаточно ограничить функцию распределения:

$$f(\mathbf{r}') = \frac{2}{\sigma_x \sigma_y \sigma_z \pi \sqrt{\pi}} \frac{1}{1 + \Phi(h/\sigma_z)} \times \exp \left[-\frac{x'^2}{\sigma_x^2} - \frac{y'^2}{\sigma_y^2} - \frac{z'^2}{\sigma_z^2} \right], \quad z' > -h. \quad (29)$$

Функция распределения в (29) нормирована на единицу, так, что вероятность пересечения частицами ступка мишени равна нулю, а интегрирование в (15)

и (16) по dz' проводится в пределах от границы мишени $-h$ до бесконечности. После несложного интегрирования получаем:

$$F_{\text{inc}} = \frac{1 - \Phi(\sigma_z \rho - h/\sigma_z)}{1 + \Phi(h/\sigma_z)} e^{\sigma_z^2 \rho^2}, \quad (30)$$

$$F_{\text{coh}} = \frac{(1 - \Phi(\frac{\sigma_z \rho}{2} - h/\sigma_z))^2}{(1 + \Phi(h/\sigma_z))^2} e^{-\frac{\omega^2 \sigma_x^2}{2c^2 \beta^2}} e^{-\frac{k_y^2 \sigma_y^2}{2}} e^{\frac{\sigma_z^2 \rho^2}{2}}, \quad (31)$$

где Φ – функция ошибок:

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt. \quad (32)$$

Так как величина ρ пропорциональна ω , то может показаться, что при неограниченном возрастании частоты выражения (30) и (31) стремятся к бесконечности. Этого, однако, не происходит. Действительно, используя известную асимптотическую формулу

$$\Phi(x \rightarrow +\infty) \approx 1 - \frac{e^{-x^2}}{x\sqrt{\pi}}, \quad (33)$$

можно привести выражение (30) к виду:

$$F_{\text{inc}} \stackrel{\omega \rightarrow +\infty}{\approx} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{2\rho h} e^{-h^2/\sigma_z^2}}{(1 + \Phi(h/\sigma_z))(\sigma_z \rho - h/\sigma_z)} \times e^{-\frac{\omega^2 \sigma_x^2}{2c^2 \beta^2}} e^{-\frac{k_y^2 \sigma_y^2}{2}}. \quad (34)$$

При получении (34) необходимо помнить, что из геометрии задачи следует ограничение $h/\sigma_z > 1$, а при $\omega \rightarrow +\infty$ величина $h/\sigma_z = \text{const}$. Растущая экспонента $e^{2\rho h}$ нивелируется множителем $e^{-2\rho h}$, который всегда присутствует в спектрально-угловой плотности излучения от одной частицы с импакт-параметром h . Аналогичные рассуждения можно провести и для выражения (31).

В работе [22] выражение, подобное (15), для гауссовского сгустка приведено, однако, без обоснований, при этом функция распределения выбиралась нормированной на единицу во всем пространстве, а интегрирование проводилось по полупространству.

На рисунке 3 изображены зависимости, аналогичные кривым на рис. 2 для дифракционного излучения от гауссова сгустка. Видно, что существует область длин волн, где корректный расчет приводит к значительному изменению спектрально-угловой плотности излучения.

Отметим, что для случаев модулированного пучка [23, 24] или измерения поляризованного излучения [25] приведенные выше рассуждения также справедливы.

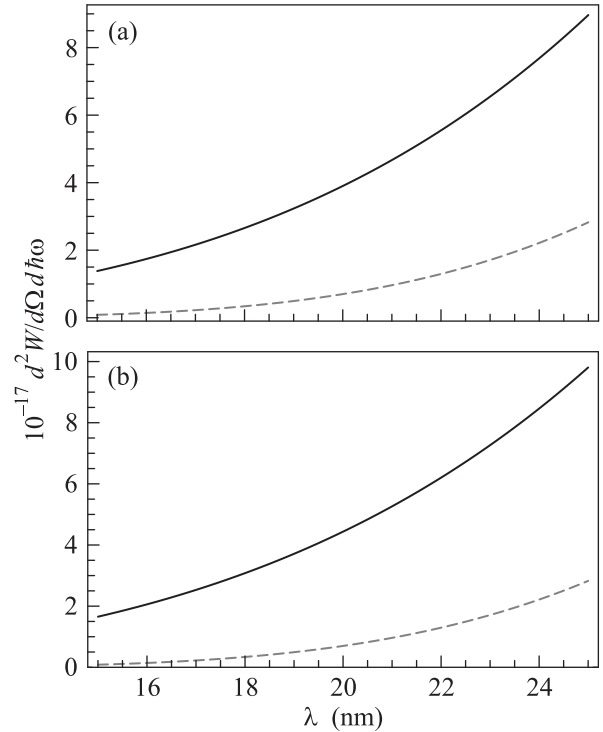


Рис. 3. (Цветной онлайн) Зависимость спектрально-углового распределения дифракционного излучения гауссова сгустка от длины волны. (а) – некогерентное излучение от сгустка с характерными поперечными размерами $\sigma_y = \sigma_z = 40$ мкм, длиной $\sigma_x = 0.16$ мкм. (б) – когерентное излучение от сгустка с характерными поперечными размерами $\sigma_y = \sigma_z = 50$ мкм, длиной $\sigma_x = 50$ мкм. Черные сплошные кривые соответствуют формуле (13), красные пунктирные кривые соответствуют формуле (1). Ширина пластинки $a = 65$ мкм, остальные параметры такие же, как на рис. 2

Закключение. Итак, некогерентный форм-фактор, наряду с поперечной частью когерентного форм-фактора, возникает при пролете пучков с конечными поперечными размерами вблизи края мишени. Эти эффекты физически обусловлены тем, что собственное поле движущихся заряженных частиц ограничено в поперечном направлении величиной $\gamma\beta\lambda/2\pi$, поэтому частицы сгустка, расположенные на различном расстоянии от края мишени, вносят различный вклад в поляризацию вещества мишени. Эффект получен вне рамок достаточно сложных расчетов, применяемых в теории дифракционного излучения или излучения Смита–Парселла [3, 8, 17, 18, 22, 26, 27]. Это естественно, поскольку данный эффект определяется не сложными методами решения краевых задач электродинамики, а простым и ясным физическим обстоятельством: собственное поле движущихся заряженных частиц в

переменных (\mathbf{r}, ω) в поперечном направлении ограничено. Аналогично, и сам эффект, позже названный в честь экспериментально открывших его С. Смита и Е. Парселла [21], был предсказан И. М. Франком из простых и качественных соображений [28].

Отметим, что в случае, когда анализируется излучение сгустка на длине волны λ , большей чем размер сгустка σ_x ,

$$\sigma_x < \lambda \quad (35)$$

(короткий сгусток), оба форм-фактора – некогерентный и когерентный – зависят от одних и тех же величин, и может случиться так, что там, где некогерентный фактор заметно отличен от единицы, некогерентное излучение всегда будет ничтожно мало по сравнению с когерентным. По этой причине анализ некогерентного форм-фактора в случае коротких сгустков имеет смысл лишь в сравнении с когерентным.

В случае же длинных сгустков

$$\sigma_x > \lambda \quad (36)$$

когерентный форм-фактор подавлен (а вместе с ним и когерентное излучение), так что анализ некогерентного форм-фактора может и должен проводиться отдельно.

Также, в заключение мы хотим обратить внимание читателя на один принципиальный момент. В этой статье расчет был проведен для ограниченного класса мишеней. Для случая произвольной мишени, например, для точечной, как мы указываем в обсуждении после формулы (11), само описание когерентных эффектов на языке форм-фактора может быть неприменимо. Корректным методом расчета в наиболее общем случае является расчет полей излучения, с последующим взятием квадрата модуля и усреднением по всем частицам сгустка. Выделится ли в результате форм-фактор, или нет – ответ на этот вопрос зависит от параметров конкретной мишени.

Наличие некогерентного форм-фактора открывает принципиальную возможность осуществлять невозмущающую диагностику поперечных размеров сгустков по некогерентному излучению, что до сих пор считалось невозможным в принципе, поскольку некогерентный форм-фактор считался всегда и по умолчанию равным единице. Кроме того, даже и в диагностике сгустков заряженных частиц по когерентному излучению, будь то дифракционное, Смита–Парселла, черенковское или переходное излучение – учет поперечной части форм-фактора может сыграть свою роль, и не только в измерении поперечных размеров пучка, но и продольных, поскольку

ку в экспериментально измеряемые величины оба множителя – продольная и поперечная части форм-фактора – вносят вклад.

Авторы пользуются приятной возможностью поблагодарить А. П. Потылицына и К. Артру (X. Artru) за стимулирующие дискуссии.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований в рамках научного проекта # 18-32-00662.

1. Г. М. Гарибян, Ян Ши, *Рентгеновское переходное излучение*, АН Армянской ССР, Ереван (1983).
2. Y. Shibata, K. Ishi, S. Ono, Y. Inoue, and S. Sasaki, *Nucl. Instrum. Methods B* **145**, 49 (1998).
3. P. Rullhusen, X. Artru, and P. Dhez, *Novel Radiation Sources Using Relativistic Electrons*, World Scientific, Singapore (1998).
4. V. G. Baryshevsky, I. D. Feranchuk, and A. P. Ulyanenko, *Parametric X-Ray Radiation in Crystals: Theory, Experiment and Applications, Springer Tracts in Modern Physics*, Springer, Berlin (2006), v. 213.
5. E. B. Blum, U. Happek, and A. J. Sievers, *Nucl. Instrum. Methods A* **307**, 568 (1991).
6. Y. Shibata, T. Takahashi, T. Kanai, K. Ishi, M. Ikezawa, J. Ohkuma, S. Okuda, and T. Okada, *Phys. Rev. E* **50**, 1479 (1994).
7. В. Л. Гинзбург, И. М. Франк, *ЖЭТФ* **16**, 15 (1946).
8. A. P. Potylitsyn, M. I. Ryazanov, M. N. Strikhanov, and A. A. Tishchenko, *Diffraction Radiation from Relativistic Particles, Springer Tracts in Modern Physics*, Springer-Verlag, Berlin (2011), v. 239.
9. D. Yu. Sergeeva, A. A. Tishchenko, and M. N. Strikhanov, *Phys. Rev. ST Accel. Beams* **18**, 052801 (2015).
10. Е. Л. Фейнберг, *УФН* **132**, 255 (1980).
11. М. И. Рязанов, *ЖЭТФ* **39**, 569 (1984).
12. A. A. Tishchenko, A. P. Potylitsyn, and M. N. Strikhanov, *Phys. Rev. E* **70**, 066501 (2004).
13. D. Yu. Sergeeva, A. A. Tishchenko, and M. N. Strikhanov, *Nucl. Instrum. and Methods B* **309**, 189 (2013).
14. D. Yu. Sergeeva, M. N. Strikhanov, and A. A. Tishchenko, *Proc. of IPAC 2013, MOPME062*, Shanghai, China (2013), p. 616.
15. D. Yu. Sergeeva, A. A. Tishchenko, and M. N. Strikhanov, *Nucl. Instrum. Methods Phys. Res. B* **355**, 175 (2015).
16. A. A. Tishchenko, D. Yu. Sergeeva, and M. N. Strikhanov, *Vacuum* **129**, 157 (2016).
17. В. П. Шестопалов, *Дифракционная электроника*, Вища школа, Харьков (1976).
18. V. P. Shestopalov, *The Smith-Purcell effect*, Nova Science Publishers, Commack, N.Y. (1998).

19. J. Urata, M. Goldstein, M.F. Kimmitt, A. Naumov, C. Platt, and J.E. Walsh, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 516 (1998).
20. H.L. Andrews, C.A. Brau, J.D. Jarvis, C.F. Guertin, A. O'Donnell, B. Durant, T. H. Lowel, and M. R. Mross, *Phys. Rev. ST Accel. Beams* **12**, 080703 (2009).
21. S. J. Smith and E.M. Purcell, *Phys. Rev.* **92**, 1069 (1953).
22. G. Doucas, M.F. Kimmitt, A. Doria, G.P. Gallerano, E. Giovenale, G. Messina, H.L. Andrews, and J.H. Brownell, *Phys. Rev. ST Accel. Beams* **5**, 072802 (2002).
23. G. A. Naumenko, A. P. Potylitsyn, D. Yu. Sergeeva, A. A. Tishchenko, M. N. Strikhanov, and V. V. Bleko, *JETP Lett.* **105**, 553 (2017).
24. Г. А. Науменко, А. П. Потылицын, П. В. Каратаев, М. А. Шипуля, В. В. Блеко, *Письма в ЖЭТФ* **106**, 115 (2017).
25. Д. А. Шкитов, А. П. Потылицын, Г. А. Науменко, М. В. Шевелев, А. Арышев, Н. Терунума, Дж. Уракава, *Письма в ЖЭТФ* **109**, 809 (2019).
26. Б. М. Болотовский, Г. В. Воскресенский, *УФН* **82**, 209 (1966).
27. Б. М. Болотовский, Г. В. Воскресенский, *УФН* **94**, 378 (1968).
28. И. М. Франк, *Известия АН СССР, сер. Физ.* **6**, 3 (1942).