Письма в ЖЭТФ, том 111, вып. 1, с. 3 – 9

Вклады высших порядков в амплитуды КХД в реджевской кинематике (Миниобзор)

В. С. Фадин[1)]

Институт ядерной физики им. Г. И. Будкера Сибирского отделения РАН, 630090 Новосибирск, Россия

Новосибирский государственный университет, 630090 Новосибирск, Россия

Поступила в редакцию 13 ноября 2019 г.
После переработки 13 ноября 2019 г.
Принята к публикации 14 ноября 2019 г.

Знаменитое уравнение Балицкого–Фадина–Кураева–Липатова (БФКЛ) было получено с использованием гипотезы о том, что амплитуды неабелевых калибровочных теорий с присоединенным представлением калибровочной группы в кросс-каналах даются вкладом реджезованного калибровочного бозона. Гипотеза верна в главном логарифмическом приближении, в котором уравнение было первоначально выведено, и в следующем за ним. Но в следующем за следующим приближении это не так, поскольку в этом приближении начинают вносить свой вклад реджевские разрезы. Обсуждаются вычисления их вклада в амплитуды упругого рассеяния в квантовой хромодинамике и их роль в выводе уравнения БФКЛ.

DOI: 10.31857/S0370274X20010014

1. Введение. Одно из фундаментальных уравнений квантовой хромодинамики (КХД), уравнение Балицкого–Фадина–Кураева–Липатова (БФКЛ) [1–4], основано на замечательном свойстве КХД – реджезации глюона. КХД оказалась уникальной теорией поля, в которой реджезуются все элементарные частицы – и кварк, и глюон [5–9].

Реджезация элементарных частиц очень важна для теоретического описания высокоэнергетических процессов. Реджезация глюона особенно важна, поскольку она определяет поведение при высоких энергиях неубывающих с энергией сечений в возмущенческой КХД.

В главном логарифмическом приближении (ГЛП), когда в каждом порядке теории возмущений сохраняются только члены с высшими степенями логарифма энергии в системе центра инерции (с.ц.и.) $\sqrt{s}$, и в следующем за главным (СГЛП), где удерживаются члены с меньшими на единицу, чем главные, степенями $\ln s$, реджезация глюона означает, что амплитуды с присоединенным представлением цветовой группы в кросс- каналах и отрицательной сигнатурой (симметрией относительно замены $s \leftrightarrow u \simeq -s$) определяются вкладами глюонного полюса Редже и имеют простую факторизованную форму (полюсную реджевскую форму). Это относится не только к упругим амплитудам, но и к амплитудам в мульти-реджевской кинематике (МРК), в которой все частицы имеют фиксированные (не растущие с s) поперечные импульсы и объединяются в струи с ограниченной инвариантной массой каждой струи и большими (растущими с s) инвариантными массами любой пары струй. Реджезация глюона позволяет выразить бесконечное число таких амплитуд через несколько реджевских вершин и траекторию реджзованного глюона. Поскольку они дают доминирующий вклад в скачки амплитуд с фиксированной передачей импульса в соотношениях унитарности, это обеспечивает простой вывод уравнения БФКЛ не только в ГЛП, но также и в СГЛП.

Полюсная реджевская форма доказана во всех порядках теории возмущений как в ГЛП [10], так и в СГЛП (см. [11, 12] и ссылки в них).

Однако эта форма нарушается в ССГЛП. Впервые нарушение полюсной формы было обнаружено в [13] при рассмотрении высоко-энергетического предела двухпетлевых амплитудах gg, gq и qq рассеяния. Позднее инфракрасно сингулярные члены, нарушающие полюсную форму, были найдены в трех петлях с использованием метода инфракрасной факторизации [14–16].

Нарушение полюсной реджевской формы следовало ожидать, потому что хорошо известно, что по-

[1)]e-mail: fadin@inp.nsk.su

люса Редже в плоскости комплексных угловых моментов порождают реджевские разрезы. Более того, в амплитудах с положительной сигнатурой реджевские разрезы появляются уже в ГЛП. В частности, БФКЛ померон является двух-режеонным разрезом. Но в амплитудах с отрицательной сигнатурой реджевские разрезы должны быть, по крайней мере, трех-реджеонными и могут появляться только в ССГЛП. Поэтому было естественно ожидать, что наблюдаемое нарушение связано с вкладом разрезов.

Первое объяснение наблюдаемого нарушения было дано в [17], где было показано, что члены, нарушающие полюсную реджевскую форму, могут идти от вкладов трех-режеонного разреза. Но почти в то же самое время было дано другое объяснение [18], где вклад разреза отличается от [17] (см. также [19, 20]), и помимо разреза используется смешивание разреза и полюса.

Здесь мы представляем результаты расчета членов, нарушающих полюсную форму, и их объяснение в обоих подходах.

2. Полюсная реджевская форма амплитуд КХД и ее нарушение. Для процессов упругого рассеяния $A+B \to A'+B'$ в реджевской кинематике ($s \simeq -u \to \infty$, t фиксировано (не растет с s)) реджезация означает, что амплитуды рассеяния с квантовыми числами глюонов в t-канале и отрицательной сигнатурой записываются в виде

$$\mathcal{A}_{AB}^{A'B'} = \mathcal{A}_{AB}^{R}(s,t) = \\ = \Gamma_{A'A}^{c}\left[\left(\frac{-s}{-t}\right)^{j(t)} - \left(\frac{s}{-t}\right)^{j(t)}\right]\Gamma_{B'B}^{c}, \qquad (1)$$

где $\Gamma_{P'P}^{c}$ – вершины частица-частица-реджеон (ЧЧР), или вершины рассеяния, "c" – цветовые индексы реджеона; $j(t) = 1+\omega(t)$ – траектория реджеона.

Важным свойством полюсов Редже является факторизация их вкладов

$$\mathcal{A}_{gg}^{g'g'}\,\mathcal{A}_{qq}^{q'q'} = \left(\mathcal{A}_{gq}^{g'q'}\right)^2, \qquad (2)$$

являющейся следствием того, что три амплитуды выражаются через две вершины ЧЧР.

Впервые нарушение полюсной реджевской формы было обнаружено в [13] при сравнении двухпетлевых амплитуд рассеяния gg, gq и qq в пределе высоких энергий. Низшие члены ССГЛП – это нелогарифмические двухпетлевые члены. В [13] было обнаружено, что ограничения, накладываемые на них условием факторизации (2), не выполняются.

Рассмотрение нарушения полюсной реджевской формы в трех петлях было выполнено только для инфракрасно сингулярных членов с использованием методов инфракрасной факторизации в работах [14–16]. В этих работах было подтверждено нарушение двухпетлевыми нелогарифмическими членами и были найдены инфракрасно сингулярные одно-логарифмические члены, нарушающие полюсную форму, в трех петлях.

Для сравнения реджевской и инфракрасной факторизаций была введена функция нефакторизующегося остатка, и амплитуды рассеяния с присоединенным представлением цветовой группы в t-канале и отрицательной сигнатурой были записаны в виде

$$\mathcal{A}_{AB}^{A'B'} = \mathcal{A}_{AB}^{R}(s,t) + \Gamma_{A'A}^{(0)c}\,\frac{s}{t}\,\Gamma_{B'B}^{(0)c}\,\mathcal{R}_{AB}, \qquad (3)$$

где $\mathcal{A}_{AB}^{R}(s,t)$ определена в (1), верхний индекс (0) обозначает низший порядок, а $\mathcal{R}_{AB}$ представляет нефакторизующийся остаток. С трехпетлевой точностью этот остаток можно представить в ССГЛП как

$$\mathcal{R}_{AB} = \left(\frac{\alpha_s}{\pi}\right)^2\left[R_{AB}^{(0)} + \left(\frac{\alpha_s}{\pi}\right)R_{AB}^{(1)}\ln s\right]. \qquad (4)$$

Для двухпетлевого вклада с использованием [13] имеем:

$$R_{qq}^{(0)} = \frac{\pi^2}{4\epsilon^2}\left(1-\frac{3}{N_c^2}\right)\left(1-\epsilon^2\zeta(2)\right), \qquad (5)$$

$$R_{gg}^{(0)} = -\frac{3\pi^2}{2\epsilon^2}\left(1-\epsilon^2\zeta(2)\right), \qquad (6)$$

$$R_{qg}^{(0)} = -\frac{\pi^2}{4\epsilon^2}\left(1-\epsilon^2\zeta(2)\right), \qquad (7)$$

где $\epsilon = (D-4)/2$, D – размерность пространства-времени. В $R_{AB}^{(0)}$ опущены только члены, исчезающие при $\epsilon \to 0$. Значения $R_{AB}^{(1)}$ были получены с использованием инфракрасной факторизации, так что члены нулевого порядка по ϵ также опущены:

$$R_{qq}^{(1)} = -\left(\frac{\alpha_S}{\pi}\right)^3\frac{\pi^2}{\epsilon^3}\,\frac{2N_c^2-5}{12N_c}\left(1-\frac{3}{2}\epsilon^2\zeta(2)\right) + \mathcal{O}(\epsilon^0), \qquad (8)$$

$$R_{gg}^{(1)} = \left(\frac{\alpha_S}{\pi}\right)^3\frac{\pi^2}{\epsilon^3}\,\frac{2}{3}\,N_c\left(1-\frac{3}{2}\epsilon^2\zeta(2)\right) + \mathcal{O}(\epsilon^0), \qquad (9)$$

$$R_{qg}^{(1)} = \left(\frac{\alpha_S}{\pi}\right)^3\frac{\pi^2}{\epsilon^3}\,\frac{N_c}{24}\left(1-\frac{3}{2}\epsilon^2\zeta(2)\right) + \mathcal{O}(\epsilon^0). \qquad (10)$$

Надо сказать, что трехпетлевые результаты (8)–(10) были получены с использованием так называемой дипольной формы [21–25] матрицы инфракрасных аномальных размерностей. Оказывается, эта форма верна только до двух петель. Недавно была вычислена квадрупольная поправка, появляющаяся в трех

петлях [24]. Однако в ССГЛП эта поправка оказывается существенна только для амплитуд с положительной сигнатурой [18], так что она не меняет результаты (8)–(10).

3. Вклады реджевских разрезов. Ненулевая функция остатка $\mathcal{R}_{AB}$ была объяснена с помощью трех-реджеонных разрезов в двух работах [17, 18]. Это можно было бы считать хорошей новостью, если бы объяснения были одинаковыми. К сожалению, это не так. Различия в объяснениях начинаются с используемых подходов. Подход, используемый в [17] (см. также [19, 20]), можно назвать диаграммным, поскольку он исходит из диаграмм Фейнмана. Напротив, подход, использованный в [18], не имеет отношения к диаграммам Фейнмана и основан на представлении амплитуд рассеяния при высоких энергиях вильсоновскими линиями. Оба подхода объясняют нарушение полюсной формы в трех петлях, но по-разному.

3.1. Диаграммный подход.

3.1.1. Появление разреза. Из-за сохранения сигнатуры разрез с отрицательной сигнатурой должен быть трех-реджеонным. Поскольку наш реджеон является реджезованным глюоном, трех-реджеонный разрез начинается со вклада амплитуд, отвечающих диаграммам Фейнмана с тремя глюонами в t-канале, отличающимися перестановками σ глюонных вершин (σ принимает значения a, b, c, d, e, f). Амплитуды $\mathcal{A}_{AB}^{A'B'}$ можно записать в виде суммы по перестановкам σ произведений цветовых множителей и не зависящих от цвета матричных элементов:

$$\mathcal{A}_{AB}^{A'B'} = (\chi^*_{A'})_{\alpha'}(\chi^*_{B'})_{\beta'} \times \\ \times \sum_{\sigma} \left(C_{AB}^{(0)\sigma}\right)^{\alpha'\beta'}_{\alpha\beta} (\chi_A)^{\alpha}(\chi_B)^{\beta}\, M_{AB}^{(0)\sigma}(s,t), \qquad (11)$$

где χ обозначает цветовую часть волновых функций, α и β (α' и β') – цветовые индексы начальных (конечных) частиц A и B соответственно.

Здесь одинаковые буквы используются для цветовых индексов кварка и глюона; однако следует помнить, что для глюонов нет разницы между верхним и нижним индексами (принимающими значения от 1 до N_c^2-1), тогда как для кварков нижний и верхний индексы (принимающие значения от 1 до N_c) относятся к взаимно сопряженным представлениям.

Цветовые множители

$$\left(C_{AB}^{(0)\sigma}\right)^{\alpha'\beta'}_{\alpha\beta} = (\mathcal{T}_A^{c_1}\mathcal{T}_A^{c_2}\mathcal{T}_A^{c_3})^{\alpha'}_{\ \alpha} \left(\mathcal{T}_B^{c_1^\sigma}\mathcal{T}_B^{c_2^\sigma}\mathcal{T}_B^{c_3^\sigma}\right)^{\beta'}_{\ \beta}, \quad (12)$$

где $\mathcal{T}^a$ являются генераторами цветовой группы в соответствующих представлениях, $[\mathcal{T}^a, \mathcal{T}^b] = if_{abc}\mathcal{T}^c$ для всех представлений, $(\mathcal{T}^a)^b_{\ c} = -if_{abc}$ для глюонов, $(\mathcal{T}^a)^{\alpha'}_{\ \alpha} = (t^a)^{\alpha'}_{\ \alpha}$ для кварков; $\mathrm{Tr}(\mathcal{T}_P^a\mathcal{T}_P^b) = T_P\delta_{ab}$, $T_q = 1/2$, $T_g = N_c$. Цветовые множители можно разложить по неприводимым представлениям $\mathbf{R}$ цветовой группы в t-канале:

$$\left(C_{AB}^{(0)\sigma}\right)^{\alpha'\beta'}_{\alpha\beta} = \sum_{\mathbf{R}} [\mathcal{P}_{AB}^{\mathbf{R}}]^{\alpha'\beta'}_{\alpha\beta}\mathcal{G}(\mathbf{R})_{AB}^{(0)\sigma}, \qquad (13)$$

где

$$[\mathcal{P}_{AB}^{\mathbf{R}}]^{\alpha'\beta'}_{\alpha\beta} = \sum_n [\mathcal{P}_A^{\mathbf{R},n}]^{\alpha'}_{\ \alpha}[\mathcal{P}_B^{\mathbf{R},n\,*}]^{\beta}_{\ \beta'}, \qquad (14)$$

$\hat{\mathcal{P}}^{\mathbf{R},n}$ является волновой функцией состояния n в представлении $\mathbf{R}$ в пространстве цветовых индексов с нормировкой

$$[\mathcal{P}_P^{\mathbf{R},n}]^{\alpha}_{\ \beta}[\mathcal{P}_P^{\mathbf{R}',n'\,*}]^{\alpha}_{\ \beta} = T_P\delta_{\mathbf{R},\mathbf{R}'}\delta_{n,n'}, \qquad (15)$$

так что

$$\mathcal{G}(\mathbf{R})_{AB}^{(0)\sigma} = \frac{1}{N_{\mathbf{R}}\, T_A\, T_B}\,(\mathcal{T}_A^{c_1}\mathcal{T}_A^{c_2}\mathcal{T}_A^{c_3})^{\alpha'}_{\ \alpha} \times \\ \times \left(\mathcal{T}_B^{c_1^\sigma}\mathcal{T}_B^{c_2^\sigma}\mathcal{T}_B^{c_3^\sigma}\right)^{\beta'}_{\ \beta}[\mathcal{P}_{AB}^{\mathbf{R}\,*}]^{\alpha'\beta'}_{\alpha\beta}, \qquad (16)$$

$N_{\mathbf{R}}$ – размерность представления $\mathbf{R}$.

В отличие от реджеона, который вносит вклад только в амплитуды с присоединенным представлением цветовой группы (цветовой октет в КХД) в t-канале, разрез может вносить вклад в амплитуды с различными представлениями.

Возможными представлениями для кварк-кваркового и кварк-глюонного рассеяния являются только синглет ($\mathbf{1}$) и октет ($\mathbf{8}$), тогда как для глюон-глюонного рассеяния существуют синглет ($\mathbf{1}$), симметричный $\mathbf{8_s}$ и антисимметричный $\mathbf{8_a}$ октеты, $\mathbf{10}$, $\mathbf{10}^*$ и $\mathbf{27}$. Учет бозе-статистики глюонов и симметрии представлений $\mathbf{1}$, $\mathbf{8_s}$ и $\mathbf{27}$ дает, что возможными представлениями в амплитудах с отрицательной сигнатурой являются $\mathbf{8_a}$, $\mathbf{10}$ и $\mathbf{10}^*$ для глюон-глюонного рассеяния, $\mathbf{1}$ и $\mathbf{8}$ для кварк-кваркового рассеяния и только $\mathbf{8}$ для кварк-глюонного рассеяния. Имеет смысл сказать, что при $N_c > 3$ ситуация существенно не меняется, поскольку появляется только дополнительное симметричное представление для двухглюонной системы.

Важным является само существование в амплитудах с отрицательной сигнатурой представлений цветовой группы, отличных от присоединенного, что означает существование особенностей, отличных от полюса Редже, в плоскости комплексных моментов импульса.

Операторы проектирования для октетного представления (далее опускаем индекс a в $\mathbf{8_a}$):

$$[\mathcal{P}_{gg}^{\mathbf{8}}]^{ab}_{\ a'b'} = -f_{aa'c}f_{bb'c} \qquad (17)$$

для глюон-глюонного рассеяния,

$$[\mathcal{P}^{\mathbf{8}}_{gq}]^{a'\beta'}_{a\beta} = -if^{c}_{aa'}(t^c)^{\beta'}_{\beta} \tag{18}$$

для глюон-кваркового рассеяния, и

$$[\mathcal{P}^{\mathbf{8}}_{qq}]^{\alpha'\beta'}_{\alpha\beta} = (t^c)^{\alpha'}_{\alpha}(t^c)^{\beta'}_{\beta} \tag{19}$$

для кварк-кваркового рассеяния.

Каналы $\mathbf{10}$ и $\mathbf{10}^*$ существуют только для глюон-глюонного рассеяния. Операторы проектирования

$$[\mathcal{P}^{\mathbf{10}}_{gg}]^{ab}_{a'b''} = \frac{N_c}{4}\Bigg(\delta_{ab}\delta_{a'b'} - \delta_{ab'}\delta_{a'b} - \\ - 2\frac{f_{aa'c}f_{bb'c}}{N_C} + if_{ba'c}d_{b'ac} + id_{ba'c}f_{b'ac}\Bigg), \tag{20}$$

$$[\mathcal{P}^{\mathbf{10}^*}_{gg}]^{ab}_{a'b''} = \Big([\mathcal{P}^{\mathbf{10}}_{gg}]^{ab}_{a'b''}\Big)^*. \tag{21}$$

И, наконец, канал $\mathbf{1}$ в отрицательной сигнатуре существует только для кварк-кваркового рассеяния; оператор проектирования

$$[\mathcal{P}^{\mathbf{1}}_{qq}]^{\alpha'\beta'}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2N_c}\delta^{\alpha'}_{\alpha}\delta^{\beta'}_{\beta}. \tag{22}$$

Для представлений $\mathbf{R}$, отличных от присоединенного, цветовые коэффициенты $\mathcal{G}(\mathbf{R})^{(0)\sigma}_{AB}$ не зависят от σ; они равны

$$\mathcal{G}(\mathbf{10}+\mathbf{10}^*)^{(0)\sigma}_{gg} = -\frac{3}{4}N_c,\ \mathcal{G}(\mathbf{1})^{(0)\sigma}_{qq} = \frac{(N_c^2-4)(N_c^2-1)}{8N_c^2}, \tag{23}$$

для любых σ. Поэтому зависящие от импульсов множители для таких представлений суммируются в эйкональную амплитуду

$$\sum_{\sigma} M^{(0)\sigma}_{AB}(s,t) = A^{eik} = g^6\frac{s}{t}\left(\frac{-4\pi^2}{3}\right)\mathbf{q}^2\,A_2(q_\perp), \tag{24}$$

где

$$A_2(q_\perp) = \int\frac{d^{2+2\epsilon}l_1 d^{2+2\epsilon}l_2}{(2\pi)^{2(3+2\epsilon)}\mathbf{l}_1^2\mathbf{l}_2^2(\mathbf{q}-\mathbf{l}_1-\mathbf{l}_2)^2}. \tag{25}$$

Этот результат очень важен, потому что вклад разреза должен быть калибровочно-инвариантным, тогда как $M^{(0)\sigma}_{AB}$, взятые отдельно, зависят от калибровки.

В канале реджезованного глюона цветовые коэффициенты $\mathcal{G}(R)^{(0)\sigma}_{AB}$ зависят от σ. Однако эта зависимость имеет специфическую форму. Пусть $\sigma = a$ ($\sigma = f$) относится к диаграмме без u- (s-) канальных разрезов. Обратим внимание, что, поскольку $M^{(0)a}_{AB}$ и $M^{(0)f}_{AB}$ связаны заменой $s \leftrightarrow u$, только сумма $\mathcal{G}(\mathbf{8})^{(0)a}_{AB} + \mathcal{G}(\mathbf{8})^{(0)f}_{AB}$ входит в амплитуды с отрицательной сигнатурой. Оказывается, что

$$\frac{1}{2}\Big[\mathcal{G}(\mathbf{8})^{(0)a}_{AB} + \mathcal{G}(\mathbf{8})^{(0)f}_{AB}\Big] = \mathcal{G}(\mathbf{8})^{(0)}_{AB} + \frac{N_c^2}{8}, \tag{26}$$

тогда как для всех других диаграмм ($\sigma = b, c, d, e$) $\mathcal{G}(\mathbf{8})^{(0)\sigma}_{AB} = \mathcal{G}(\mathbf{8})^{(0)}_{AB}$. Реджевская полюсная факторизация требует равенства

$$\mathcal{G}(\mathbf{8})^{(0)}_{gg} + \mathcal{G}(\mathbf{8})^{(0)}_{qq} = 2\mathcal{G}(\mathbf{8})^{(0)}_{gq}. \tag{27}$$

Поскольку

$$\mathcal{G}(\mathbf{8})^{(0)}_{gg} = \frac{3}{2}\ ,\ \ \mathcal{G}(\mathbf{8})^{(0)}_{gq} = \frac{1}{4},\ \ \mathcal{G}(\mathbf{8})^{(0)}_{qq} = \frac{1}{4}\left(-1+\frac{3}{N_c^2}\right), \tag{28}$$

очевидно, что полюсная факторизация нарушена.

Но видно также, что члены, нарушающие полюсную факторизацию, имеют σ-независимые цветовые коэффициенты, так что зависящие от импульсов коэффициенты для них суммируются в эйкональные амплитуды.

Однако цветовые множители (28) могут быть не полностью отнесены к вкладам разреза. В самом деле, разделение вкладов полюса и разреза невозможно в двухпетлевом приближении из-за неоднозначности выделения части амплитуд, нарушающих факторизацию: всегда можно записать

$$\mathcal{G}(\mathbf{8})^{(0)}_{AB} = \mathcal{G}(\mathbf{8})^{(0)\mathrm{cut}}_{AB} + \mathcal{G}(\mathbf{8})^{(0)\mathrm{pole}}_{AB},$$

с $\mathcal{G}(\mathbf{8_a})^{(0)\mathrm{pole}}_{AB}$, удовлетворяющими условию факторизации, но в остальном произвольными.

3.1.2. Три петли. Разделение становится возможным в более высоких петлях, из-за различной энергетической зависимости вкладов полюса и разреза. Энергетическая зависимость вклада полюса определяется (помимо множителя s) фактором Редже $\exp(\omega(t)\ln s)$, где $1+\omega(t)$ – траектория глюона,

$$\omega(t) = -g^2N_c\mathbf{q}^2\int\frac{d^{2+2\epsilon}l}{2(2\pi)^{(3+2\epsilon)}\mathbf{l}^2(\mathbf{q}-\mathbf{l})^2}, \tag{29}$$

в то время как для разреза с тремя реджеонами это $\exp(\hat{\mathcal{K}}\ln s)$, где

$$\hat{\mathcal{K}} = \hat{\omega}_1 + \hat{\omega}_2 + \hat{\omega}_3 + \hat{\mathcal{K}}_r(1,2) + \hat{\mathcal{K}}_r(1,3) + \hat{\mathcal{K}}_r(2,3), \tag{30}$$

$\hat{\omega}_i$ обозначает траекторию i-го реджеона, а $\hat{\mathcal{K}}_r(m,n)$ – реальная часть ядра БФКЛ, описывающая взаимодействие между реджеонами m и n. Явная форма реальной части ядра, описывающая взаимодействие между двумя реджеонами с поперечными импульсами $\mathbf{q}_1$ и $\mathbf{q}_2$ и цветовыми индексами c_1 и c_2

$$[\mathcal{K}_r(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2;\mathbf{k})]^{c_1'c_2'}_{c_1c_2} = \\ = -T^a_{c_1c_1'}T^a_{c_2c_2'}\frac{g^2}{(2\pi)^{D-1}}\left[\frac{\mathbf{q}_1^2\mathbf{q}_2'^2+\mathbf{q}_2^2\mathbf{q}_1'^2}{\mathbf{k}^2}-\mathbf{q}^2\right], \quad (31)$$

где $\mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2=\mathbf{q}_1'+\mathbf{q}_2'=\mathbf{q}$, $\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_1'=\mathbf{q}_2'-\mathbf{q}_2=\mathbf{k}$.

Трехпетлевой цветовой коэффициент $\mathcal{G}(\mathbf{R})^{(1)\sigma}_{AB}$ просто пропорционален $\mathcal{G}(\mathbf{R})^{(0)\sigma}_{AB}$. Что касается вклада траектории, то это очевидно. Это также верно для вкладов реальной части, потому что оператор $\sum_{i>j=1}^3\hat{T}^c(i)\hat{T}^c(j)$ действует на состояние $\Psi(\mathbf{R})$, для которого, благодаря сохранению цвета,

$$\left(\sum_{i=1}^3\hat{T}^c(i)+\hat{\mathcal{T}}^c(\mathbf{R})\right)\Psi(\mathbf{R})=0, \quad (32)$$

где $\hat{\mathcal{T}}^c(\mathbf{R})$ – генератор цветовой группы в представлении $\mathbf{R}$. Это дает

$$\sum_{i>j=1}^2\hat{T}^c(i)\hat{T}^c(j)\Psi(\mathbf{R})=\frac{1}{2}\left(C_2(\mathbf{R})-3C_2(\mathbf{8})\right)\Psi(\mathbf{R}), \quad (33)$$

где $C_2(\mathbf{R})$ – значение оператора Казимира в представлении $\mathbf{R}$; $C_2(\mathbf{8})=N_c$. Следовательно, в ССГЛП трехпетлевая поправка равна

$$\mathcal{G}(\mathbf{R})^{(\mathrm{cut})}_{AB}\,g^8\frac{s}{t}\left(\frac{-4\pi^2}{3}\right)\mathbf{q}^2\left(\left(\frac{3}{2}N_c-C_2(\mathbf{8})\right)\times \\ \times A_3^b(q_\perp)-\frac{1}{2}\left(3N_c-C_2(\mathbf{8})\right)A_3^c(q_\perp)\right)\ln s, \quad (34)$$

где

$$A_3^b(q_\perp)=-\int\frac{d^{2+2\epsilon}l_1\,d^{2+2\epsilon}l_2d^{2+2\epsilon}l_3}{(2\pi)^{3(3+2\epsilon)}\mathbf{l}_1^2\mathbf{l}_2^2\mathbf{l}_3^2(\mathbf{q}-\mathbf{l}_1-\mathbf{l}_2-\mathbf{l}_3)^2}, \quad (35)$$

$$A_3^c(q_\perp)=\int\frac{d^{2+2\epsilon}l_1\,d^{2+2\epsilon}l_2d^{2+2\epsilon}l_3(\mathbf{q}-\mathbf{l}_1)^2}{(2\pi)^{3(3+2\epsilon)}\mathbf{l}_1^2\mathbf{l}_2^2\mathbf{l}_3^2(\mathbf{q}-\mathbf{l}_1-\mathbf{l}_2)^2(\mathbf{q}-\mathbf{l}_1-\mathbf{l}_3)^2}. \quad (36)$$

Расчет трехпетлевых поправок [20] показывает, что нарушение полюсной реджевской формы, обнаруженное в этом приближении с помощью инфракрасной факторизации, можно объяснить вкладом полюса и разреза. Ограничения, накладываемые инфракрасной факторизацией на амплитуды партонного рассеяния с присоединенным представлением цветовой группы в t-канале и отрицательной сигнатурой, могут выполняться в ССГЛП в двух и трех петлях, если, кроме вклада полюса Редже, есть вклад реджевского разреза

$$\mathcal{G}(\mathbf{8})^{(\mathrm{cut})}_{AB}\,g^6\frac{s}{t}\left(\frac{-4\pi^2}{3}\right)\mathbf{q}^2\times \\ \times\left(A_2(q_\perp)+g^2N_c\ln s\left(\frac{1}{2}A_3^b(q_\perp)-A_3^c(q_\perp)\right)\right), \quad (37)$$

$$\mathcal{G}(\mathbf{8})^{(\mathrm{cut})}_{gg}=-\frac{3}{2},\quad \mathcal{G}(\mathbf{8})^{(\mathrm{cut})}_{gq}=-\frac{3}{2}, \\ \mathcal{G}(\mathbf{8})^{(\mathrm{cut})}_{qq}=\frac{3(1-N_c^2)}{4N_c^2}. \quad (38)$$

3.2. Подход вильсоновских линий. Объяснение нарушения полюсной реджевской формы, приведенное в [18], отличается от описанного выше. Связь трехреджеонных разрезов с диаграммами Фейнмана в этой статье не была прослежена. Цветовые коэффициенты $\mathcal{G}(\mathbf{R})^{(0)C}_{AB}$ для вкладов разреза в ней берутся как

$$\mathcal{G}(\mathbf{R})^{(0)C}_{AB}=\frac{1}{6!N_{\mathbf{R}}\,T_A\,T_B}\left(\mathcal{T}_A^{c_1}\mathcal{T}_A^{c_2}\mathcal{T}_A^{c_3}\right)^{\alpha'}_{\ \alpha}\times \\ \times\left(\sum_\sigma\mathcal{T}_B^{c_1^\sigma}\mathcal{T}_B^{c_2^\sigma}\mathcal{T}_B^{c_3^\sigma}\right)^{\beta'}_{\ \beta}[\mathcal{P}^{\mathbf{R}\,*}_{AB}]^{\alpha\beta}_{\ \alpha'\beta'}. \quad (39)$$

Что касается зависящей от импульсов части, она принимается равной A^{eik} (24). Для представлений $\mathbf{R}$, отличных от присоединенного, это согласуется с диаграммным подходом, поскольку цветовые коэффициенты $\mathcal{G}(\mathbf{R})^{(0)\sigma}_{AB}$ не зависят от σ для таких представлений (см. (23)). Поэтому в обоих подходах вклады разрезов одинаковы для этих представлений.

Но это не так для присоединенного представления, где цветовые коэффициенты $\mathcal{G}(\mathbf{8})^{(0)C}_{AB}$ работы [18] равны

$$\mathcal{G}(\mathbf{8})^{(0)C}_{AB}=\mathcal{G}(\mathbf{8})^{(0)}_{AB}+\frac{N_c^2}{24}, \quad (40)$$

$\mathcal{G}(\mathbf{R})^{(0)}_{AB}$ даются (28). Что касается зависящей от импульсов части, она также принимается равной A^{eik} (24). Это выглядит странно с точки зрения диаграммного подхода, поскольку для появления A^{eik} требуется равенство всех слагаемых в сумме по σ в (39). В двух петлях разница Δ_{AB} между двумя подходами такова, что

$$\Delta_{gg}+\Delta_{qq}=2\Delta_{gq} \quad (41)$$

и, следовательно, она может быть отнесена к вкладу полюса. Для этого достаточно изменить двухпетлевые вклады в вершины глюон-глюон-реджеон и кварк-кварк-реджеон в (1).

Но в трех петлях вклады разреза оказываются равными

$$\mathcal{G}(\mathbf{8})^{(0)C}_{AB}\,g^6\frac{s}{t}\left(\frac{-4\pi^2}{3}\right)\mathbf{q}^2\times \\ \times\left(A_2(q_\perp)+g^2N_c\ln s\left(\frac{1}{2}A_3^b(q_\perp)-A_3^c(q_\perp)\right)\right)\ln s, \quad (42)$$

и объяснить нарушение полюсной формы, только разрезом невозможно. Это можно сделать только если ввести смешивание полюса и разреза [18] с цветовыми коэффициентами

$$\mathcal{G}(\mathbf{8})_{AB}^{(1)\mathrm{mix}}=\frac{1}{6(N_c^2-1)\,T_A\,T_B}\sum_{\sigma}Tr\left(\mathcal{T}_g^c\mathcal{T}_g^{c_1^\sigma}\mathcal{T}_g^{c_2^\sigma}\mathcal{T}_g^{c_3^\sigma}\right)\times$$
$$\times\left[\mathcal{T}_A Tr\left(\mathcal{T}_B^c\mathcal{T}_B^{c_1}\mathcal{T}_B^{c_2}\mathcal{T}_B^{c_3}\right)+\mathcal{T}_B Tr\left(\mathcal{T}_A^c\mathcal{T}_A^{c_1}\mathcal{T}_A^{c_2}\mathcal{T}_A^{c_3}\right)\right]. \tag{43}$$

Смешивание дает вклад только начиная с трех петель.

Следует отметить, что в подходе, используемом в [18], вклад разреза не подавлен при больших N_c, т.е. он существует в планарной $N=4$ SYM, что противоречит общему представлению, что в пределе высоких энергий четырехточечные амплитуды в этой теории даются вкладом реджезованного глюона.

3.3. Четыре петли в диаграммном подходе. Представленные выше трехпетлевые результаты не позволяют отвергнуть какой-либо из подходов. Это можно было бы сделать, сравнивая их результаты в высших петлях с результатами вычислений методом инфракрасной факторизации. К сожалению, они еще не известны. Некоторые результаты известны только в диаграммном подходе.

В четырех петлях есть три типа вкладов. Первый (самый простой) идет от реджевских траекторий каждого из трех реджеонов. Второй тип содержит поправки от произведений траекторий и реальных частей ядра БФКЛ, а третий – от реджеон-реджеонных взаимодействий. Зависимая от импульса часть всех этих поправок выражается через интегралы

$$I_i=\int\frac{d^{2+2\epsilon}l_1\,d^{2+2\epsilon}l_2\,d^{2+2\epsilon}l_3}{(2\pi)^{3(3+2\epsilon)}\mathbf{l}_1^2\mathbf{l}_2^2\mathbf{l}_3^2}F_i\delta^{3+2\epsilon}(\mathbf{q}-\mathbf{l}_1-\mathbf{l}_2-\mathbf{l}_3), \tag{44}$$

где

$$F_a=f_1(\mathbf{l}_1)f_1(\mathbf{l}_2),\;\; F_b=f_1(\mathbf{l}_1)f_1(\mathbf{l}_1),\;\; F_c=f_2(\mathbf{l}_1+\mathbf{l}_2),$$
$$F_d=f_1(\mathbf{l}_1+\mathbf{l}_2)f_1(\mathbf{l}_1+\mathbf{l}_2),\;\; F_e=f_1(\mathbf{q}-\mathbf{l}_1)f_1(\mathbf{q}-\mathbf{l}_3), \tag{45}$$

$$f_1(\mathbf{k})=\mathbf{k}^2\int\frac{d^{2+2\epsilon}l}{(2\pi)^{(3+2\epsilon)}\mathbf{l}^2(\mathbf{l}-\mathbf{k})^2},$$
$$f_2(\mathbf{k})=\int\frac{d^{2+2\epsilon}l\,f_1(\mathbf{l})}{(2\pi)^{(3+2\epsilon)}\mathbf{l}^2(\mathbf{l}-\mathbf{k})^2}. \tag{46}$$

Вычисление цветовых факторов $\mathcal{G}(\mathbf{R})_{AB}^{(2)\sigma}$ не легко.

Конечно, это тривиально для квадратов виртуальных частей. Соответствующий цветовой множитель

$$\mathcal{G}(\mathbf{R})_{AB,VV}^{(2)\sigma}=\frac{N_c^2}{4}\mathcal{G}(\mathbf{R})_{AB}^{(0)\sigma}. \tag{47}$$

Это не сложно и для произведений виртуальных и реальных частей из-за свойства (32). Оно дает

$$\mathcal{G}(\mathbf{R})_{AB,VR}^{(2)\sigma}=\frac{N_c}{2}\left(C_2(\mathbf{R})-3N_c\right)\mathcal{G}(\mathbf{R})_{AB}^{(0)\sigma}. \tag{48}$$

Однако, это довольно сложно для квадрата реальной части. Он содержит матричные элементы

$$\langle\Psi_B^\sigma|\sum_{i\neq j=1}^{3}\hat{T}^c(i)\hat{T}^c(j)\hat{T}^d(i)\hat{T}^d(j)|\Psi_A\rangle \tag{49}$$

и

$$\langle\Psi_B^\sigma|\sum_{i\neq j\neq k=1}^{3}\hat{T}^c(i)\hat{T}^c(j)\hat{T}^d(i)\hat{T}^d(k)|\Psi_A\rangle. \tag{50}$$

Из-за (32) их разница равна

$$\frac{1}{4}\left(C_2(\mathbf{R})-3N_c\right)^2\mathcal{G}(\mathbf{R})_{AB}^{(0)\sigma}, \tag{51}$$

поэтому достаточно получить первый.

Довольно утомительные расчеты дают его вклад $\mathcal{G}(\mathbf{8})_{AB}^{(s)\sigma}$ в $\mathcal{G}(R)_{AB}^{(2)\sigma}$:

$$\mathcal{G}(\mathbf{8})_{AB}^{(s)b}=\mathcal{G}(\mathbf{8})_{AB}^{(s)c}=\mathcal{G}(\mathbf{8})_{AB}^{(s)d}=\mathcal{G}(\mathbf{8})_{AB}^{(s)e}=\mathcal{G}(\mathbf{8})_{AB}^{(s)}, \tag{52}$$

$$\frac{1}{2}\left(\mathcal{G}(\mathbf{8})_{AB}^{(s)a}+\mathcal{G}(\mathbf{8})_{AB}^{(s)f}\right)=\mathcal{G}(\mathbf{8})_{AB}^{(s)}+\left(\frac{N_c^4}{16}+\frac{3N_c^2}{8}\right). \tag{53}$$

Важно заметить, что члены, нарушающие полюсную факторизацию, имеют σ-независимые цветовые коэффициенты, что обеспечивает их калибровочную инвариантность так же, как в двух и трех петлях.

4. Обсуждение. Полюсная реджевская форма амплитуд КХД, являющаяся основой уравнения БФКЛ и справедливая в ГЛП и в СГЛП, нарушается в ССГЛП. Естественно думать, что причиной нарушения являются трех-реджеонные разрезы. Эта мысль подтверждается тем фактом, что наблюдаемое нарушение может быть объяснено реджевскими разрезами [17, 18]. Но объяснения, приведенные в [17] (см. также [19, 20]) и [18], различаются. В [17] нарушение объясняется только вкладом разреза, в то время как в [18] вводится также смешивание полюса и разреза. Подходы [17, 18] согласуются в трех петлях, но должны расходиться в более высоких петлях. Возможный выбор между ними может быть сделан в четырех петлях.

Но полное доказательство того, что амплитуды КХД с квантовыми числами глюонов в кросс-каналах и отрицательной сигнатурой даются в ССГЛП вкладами реджевского полюса и трехрежеонного разреза, со смешиванием или без него,

требует или проверки в каждом порядке возмущения теория (что, очевидно, невозможно) или изобретения какого-либо метода, такого как бутстрап для доказательства реджезации глюона.

Появление реджевских разрезов в амплитудах с отрицательной сигнатурой значительно осложняет вывод уравнения БФКЛ, использующий соотношения унитарности.

Работа поддержана частично Министерством науки и высшего образования РФ, частично Российским фондом фундаментальных исследований, грант # 19-02-00690.

1. V. S. Fadin, E. A. Kuraev, and L. N. Lipatov, Phys. Lett. B **60**, 50 (1975).
2. E. A. Kuraev, L. N. Lipatov, and V. S. Fadin, ZhETF **71**, 840 (1976) [Sov. Phys. JETP **44**, 443 (1976)].
3. E. A. Kuraev, L. N. Lipatov, and V. S. Fadin, ZhETF **72**, 377 (1977) [Sov. Phys. JETP **45**, 199 (1977)].
4. I. I. Balitsky and L. N. Lipatov, Yad. Fiz. **28**, 1597 (1978) [Sov. J. Nucl. Phys. **28**, 822 (1978)].
5. M. T. Grisaru, H. J. Schnitzer, and H. S. Tsao, Phys. Rev. Lett. **30**, 811 (1973).
6. M. T. Grisaru, H. J. Schnitzer, and H. S. Tsao, Phys. Rev. D **8**, 4498 (1973).
7. L. N. Lipatov, Yad. Fiz. **23**, 642 (1976) [Sov. J. Nucl. Phys. **23**, 338 (1976)].
8. V. S. Fadin and V. E. Sherman, Pisma ZhETF **23**, 599 (1976).
9. V. S. Fadin and V. E. Sherman, ZhETF **72**, 1640 (1977).
10. Ya. Ya. Balitskii, L. N. Lipatov, and V. S. Fadin, in *Materials of IV Winter School of LNPI*, Leningrad (1979), p. 109.
11. B. L. Ioffe, V. S. Fadin, and L. N. Lipatov, *Quantum chromodynamics: Perturbative and nonperturbative aspects*, Cambridge University Press, Cambridge (2010).
12. V. S. Fadin, M. G. Kozlov, and A. V. Reznichenko, Phys. Rev. D **92**, 085044 (2015).
13. V. Del Duca and E. W. N. Glover, JHEP **0110**, 035 (2001); hep-ph/0109028.
14. V. Del Duca, G. Falcioni, L. Magnea, and L. Vernazza, Phys. Lett. B **732**, 233 (2014) .
15. V. Del Duca, G. Falcioni, L. Magnea, and L. Vernazza, PoS RADCOR **2013**, 046 (2013).
16. V. Del Duca, G. Falcioni, L. Magnea, and L. Vernazza, JHEP **1502**, 029 (2015).
17. V. S. Fadin, AIP Conf. Proc. **1819**(1), 060003 (2017).
18. S. Caron-Huot, E. Gardi, and L. Vernazza, JHEP **1706**, 016 (2017).
19. V. S. Fadin and L. N. Lipatov, Eur. Phys. J. C **78**(6), 439 (2018).
20. V. S. Fadin, PoS DIS **2017**, 042 (2018).
21. T. Becher and M. Neubert, Phys. Rev. Lett. **102**, 162001 (2009); Erratum: [Phys. Rev. Lett. **111**(19), 199905 (2013].
22. T. Becher and M. Neubert, JHEP **0906**, 081 (2009); Erratum: [JHEP **1311**, 024 (2013)].
23. E. Gardi and L. Magnea, Nuovo Cim. C **32**(5–6), 137 (2009) [Frascati Phys. Ser. **50**, 137 (2010)].
24. Ø. Almelid, C. Duhr, and E. Gardi, Phys. Rev. Lett. **117**(17), 172002 (2016).