Письма в ЖЭТФ, том 111, вып. 6, с. 355 – 360

Параметрические световые пули при отсутствии дисперсии групповой скорости на частоте второй гармоники

С. В. Сазонов[+*1)], *М. В. Комиссарова*[×]

[+]*Национальный исследовательский центр "Курчатовский институт", 123182 Москва, Россия*

[*]*Московский авиационный институт (Национальный исследовательский университет), 125993 Москва, Россия*

[×]*МГУ им. М. В. Ломоносова, 119991 Москва, Россия*

Поступила в редакцию 26 февраля 2020 г.
После переработки 26 февраля 2020 г.
Принята к публикации 26 февраля 2020 г.

Проведено аналитическое исследование возможности формирования двухчастотной световой пули в квадратично-нелинейной среде при равенстве нулю коэффициента дисперсии групповой скорости на частоте второй гармоники. Показано, что временная длительность компоненты световой пули на частоте второй гармоники в два раза короче, чем длительность импульса на основной частоте. В то же время поперечные размеры обеих составляющих одинаковы. Данная световая пуля устойчива, если ее апертура превышает определенное минимальное значение, пропорциональное временной длительности.

DOI: 10.31857/S0370274X20060041

Введение. Волновые пакеты, которые при распространении в нелинейной среде остаются ограниченными по всем трем пространственным координатам, часто называют пространственно-временными солитонами или световыми пулями [1–3]. Фактически световые пули представляют собой обобщение во временную область самоканалированных оптических пучков, существование и устойчивость которых в нелинейной среде изучается с 1964 г. [4].

Возможность формирования световых пуль зависит от многих факторов, основными из которых являются нелинейные свойства среды, характер дисперсии групповых скоростей (ДГС) и влияние дифракционного уширения. Так, в кубично-нелинейных средах в режиме аномальной дисперсии при нелинейности керровского типа происходит пространственно-временной коллапс, которого, однако, можно избежать при насыщающей нелинейности или при использовании неоднородной керровской среды [1, 5]. Если же дисперсия групповых скоростей в керровской среде нормальна, пространственно-временной коллапс заменяется расщеплением импульса и дроблением спектра. Световые пули в этом случае не формируются, но возникает такой вид пространственно-временной локализации, как X-волновые солитоны [6].

Световые пули формируются также в средах с плазменной нелинейностью. При этом происходит дробление импульсов на филаменты, сопровождаемое формированием спектрального суперконтинуума [7–9].

Пространственно-временные солитоны могут найти приложения в системах передачи информации [1], в управлении движением нано-частиц [10] и т.д.

В отличие от сред с кубичной нелинейностью, для которых, в целом, характерна неустойчивость пространственно-временных солитонов, в средах с нелинейностью второго порядка, наоборот, возможно формирование устойчивых световых пуль. Это обусловлено тем, что в подобных средах не происходит пространственно-временной коллапс [11].

За последние двадцать лет появилось достаточно много работ, в которых формирование световых пуль при квадратичной нелинейности было продемонстрировано как теоретически [12–16], так и экспериментально [17, 18]. Следуя сложившейся традиции, будем называть такие световые пули параметрическими.

Теория "дышащих" световых пуль, распространяющихся в средах с квадратичной нелинейностью, была последовательно разработана для режимов как аномальной [14, 15], так и нормальной [15, 16] ДГС. Особо подчеркнем, что последний случай может быть реализован только в неоднородной среде, например, в волноводе. Области устойчивости таких световых пуль зависят от характеров конкуренции нелинейности, дисперсии, дифракции и геометрических свойств волновода.

1)e-mail: sazonov.sergey@gmail.com

На практике разнообразный характер нелинейно-дисперсионных эффектов, проявляющихся при генерации второй гармоники, обусловлен не только тем, что коэффициенты ДГС на каждой из частот могут быть как положительными, так и отрицательными, но и тем, что их абсолютные величины могут существенно отличаться друг от друга [19]. Особый интерес представляет случай, когда несущая частота импульса одной из гармоник находится вблизи нулевой дисперсии, т.е. когда различные участки спектра импульса принадлежат областям нормальной и аномальной ДГС. Возможность формирования временного параметрического солитона при трехчастотном взаимодействии в отсутствие ДГС у одной из компонент была показана еще в сравнительно ранних работах (см. [19] и цитируемую там литературу).

Отметим, что поиск методов, снижающих дисперсию при распространении сигналов по волокну, привел к тому, что наиболее интенсивно исследование оптического импульса, распространяющегося в условиях близости к длине волны нулевой дисперсии, проводилось для сред с кубичной нелинейностью [1, 20]. Частота формирующегося в этом режиме солитона сдвигается в область аномальной дисперсии, а энергия в другом спектральном диапазоне рассеивается. Таким образом, использование режима нулевой дисперсии позволяет существенно снизить мощность входного излучения и повысить скорость передачи информации в системах оптической связи.

Возвращаясь к обсуждению параметрических пространственно-временных солитонов, отметим, что первые эксперименты по их наблюдению были выполнены в каскадном пределе, при котором достаточно было управлять ДГС только для импульса накачки [18, 21]. При использовании критерия Вахитова–Колоколова и прямого численного моделирования было показано, что произвольное соотношение между коэффициентами ДГС на основной частоте и на второй гармонике обуславливает асимметрию многомерных солитонов [22, 23]. При этом в условиях сильного различия значений ДГС световые пули имеют квазиустойчивый характер [22, 23].

Несмотря на большое количество работ по параметрическим пространственно-временным солитонам, особенности формирования параметрических световых пуль в области перехода от аномальной дисперсии к нормальной на одной из гармоник ранее не обсуждались.

Целью настоящей работы является исследование возможности формирования световых пуль в однородных объемных средах с квадратичной нелинейностью и нулевым коэффициентом ДГС на второй гармонике.

Двухчастотный пространственно-временной солитон. Пусть световой импульс распространяется вдоль оси z. При этом направление распространения по отношению к оптической оси одноосного кристалла выбрано так, что выполняются условия фазового и группового синхронизмов. Тогда система уравнений для огибающих ψ_1 и ψ_2 электрического поля импульса на основной частоте ω и на второй гармонике 2ω соответственно запишется в параксиальном приближении следующим образом:

$$i\frac{\partial\psi_1}{\partial z} = -\frac{\beta}{2}\frac{\partial^2\psi_1}{\partial\tau^2} + \alpha_1\psi_1^*\psi_2 + \frac{c}{2n\omega}\Delta_\perp\psi_1, \qquad (1)$$

$$i\frac{\partial\psi_2}{\partial z} = \alpha_2\psi_1^2 + \frac{c}{4n\omega}\Delta_\perp\psi_2. \qquad (2)$$

Здесь $\tau = t - z/v_g$, t – время, v_g и n – линейные групповая скорость и показатель преломления, одинаковые для обеих частот, $\beta = \partial v_g^{-1}/\partial\omega$ – параметр ДГС на основной частоте ω, c – скорость света в вакууме, $\alpha_1 = 2\pi\omega\chi_1^{(2)}/cn$, $\alpha_2 = 4\pi\omega\chi_2^{(2)}/cn$, $\chi_1^{(2)}$ и $\chi_2^{(2)}$ – нелинейные восприимчивости второго порядка на основной частоте и на второй гармонике соответственно, $\Delta_\perp$ – поперечный лапласиан.

При $\Delta_\perp\psi_{1,2} = 0$ имеем решение системы (1), (2) в виде временного двухчастотного солитона:

$$\psi_1 = \pm\frac{|\beta|}{\sqrt{\alpha_1\alpha_2}\tau_p^2}e^{i\frac{\beta}{2\tau_p^2}z}\operatorname{sech}\left(\frac{\tau}{\tau_p}\right), \qquad (3)$$

$$\psi_2 = -\frac{\beta}{\alpha_1\tau_p^2}e^{i\frac{\beta}{\tau_p^2}z}\operatorname{sech}^2\left(\frac{\tau}{\tau_p}\right), \qquad (4)$$

где роль свободного параметра играет временная длительность τ_p.

Для того, чтобы найти приближенное решение системы (1), (2) в виде локализованного пространственно-временного солитона используем хорошо апробированный метод усредненного лагранжиана [24–28].

Взяв за основу одномерный солитон (3), (4) и следуя работам [14, 15], запишем пробное решение в виде

$$\psi_1 = \pm\frac{|\beta|}{\sqrt{\alpha_1\alpha_2}}\rho^{2/3}e^{-in\omega\varphi/c}\operatorname{sech}(\rho^{1/3}\tau), \qquad (5)$$

$$\psi_2 = -\frac{\beta}{\alpha_1}\rho^{2/3}e^{-2in\omega\varphi/c}\operatorname{sech}^2(\rho^{1/3}\tau), \qquad (6)$$

Системе (1), (2) соответствует плотность лагранжиана

$$L = L_1 + \frac{\alpha_1}{2\alpha_2}L_2 + L_{\text{int}}, \qquad (7)$$

где

$$L_1 = \frac{i}{2}\left(\psi_1^*\frac{\partial\psi_1}{\partial z} - \psi_1\frac{\partial\psi_1^*}{\partial z}\right) -$$

$$-\frac{\beta}{2}\left|\frac{\partial\psi_1}{\partial\tau}\right|^2 + \frac{c}{2n\omega}|\nabla_\perp\psi_1|^2, \quad (8)$$

$$L_2 = \frac{i}{2}\left(\psi_2^*\frac{\partial\psi_2}{\partial z} - \psi_2\frac{\partial\psi_2^*}{\partial z}\right) + \frac{c}{4n\omega}|\nabla_\perp\psi_2|^2, \quad (9)$$

$$L_{\text{int}} = -\frac{\alpha_1}{2}(\psi_1^{*2}\psi_2 + \psi_1^2\psi_2^*). \quad (10)$$

Подставляя (5) и (6) в (7)–(10) и интегрируя по τ, получим усредненный лагранжиан

$$\Lambda \equiv \frac{3\alpha_1\alpha_2}{10\beta^2}\frac{n\omega}{c}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} L d\tau =$$

$$= \rho\frac{\partial\varphi}{\partial z} + \rho\frac{(\nabla_\perp\varphi)^2}{2} + \frac{3c}{10n\omega}\beta\rho^{5/3} + \frac{g^2}{2}\frac{(\nabla_\perp\rho)^2}{\rho}, \quad (11)$$

где

$$g = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{10}\left(\frac{7\pi^2}{30} + 17\right)}\frac{c}{n\omega} \approx 0.463\frac{c}{n\omega}. \quad (12)$$

Записывая уравнения Эйлера–Лагранжа для переменных φ и ρ с использованием лагранжиана (11), придем к системе уравнений

$$\frac{\partial\rho}{\partial z} + \nabla_\perp(\rho\nabla_\perp\varphi) = 0, \quad (13)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{(\nabla_\perp\varphi)^2}{2} + \frac{c}{2n\omega}\beta\rho^{2/3} = 2g^2\frac{\Delta_\perp\sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}}. \quad (14)$$

Система (13), (14) формально схожа с уравнениями, описывающими свободное двумерное течение квантовой бозе-жидкости. Роль времени здесь играет координата z, а роли плотности воображаемой жидкости и потенциала ее гидродинамической скорости принадлежат соответственно переменным ρ и φ.

В одномерном случае ($\nabla_\perp\varphi = \Delta_\perp\sqrt{\rho} = 0$) система (13), (14) имеет решение $\rho = \frac{1}{\tau_p^3} = \text{const}$, $\varphi = -\frac{c}{2n\omega}\frac{\beta}{\tau_p^2}$. Подставляя данные выражения в (5) и (6), получаем точное совпадение с одномерными решениями (3) и (4). Данное обстоятельство является веским аргументом в пользу используемого здесь метода усредненного лагранжиана.

В планарном случае ($\nabla_\perp = \partial/\partial x$, где координатная ось x перпендикулярна оси z) система (13), (14) обладает точным локализованным решением, соответствующем двумерной световой пуле [14]. Кроме того, данная система имеет точное локализованное решение в приближении геометрической оптики, когда можно формально положить $g = 0$, т.е. пренебречь правой частью в (14) [29]. Однако в этом случае не существует устойчивой световой пули: в зависимости от знака ДГС и от входных условий импульс испытывает неограниченную самофокусировку или дефокусировку.

Препятствовать самофокусировке способна дифракция. Ниже мы найдем приближенное решение системы (13), (14), соответствующее аксиально-симметричной световой пуле. Для этого воспользуемся автомодельным аксиально-симметричным решением уравнения (12), используя радиальную переменную r цилиндрической системы координат [29–31]:

$$\rho = \frac{1}{\tau_0^3}\frac{R_0^2}{R^2}G\left(\frac{r}{R}\right),\ \varphi = f(z) + \frac{r^2}{2}K,\ K = \frac{R'}{R}. \quad (15)$$

Здесь τ_0 – временная длительность импульса основной частоты на его центральной оси (при $r = 0$), R – поперечный радиус (апертура) солитона, зависящий от z, R_0 – равновесное значение данного радиуса, $f(z)$ и $G(r/R)$ – неизвестные функции, при этом $G(0) = 1$, штрих над R обозначает производную по переменной z.

Из (5), (6) и второго выражения (15) видно, что динамический параметр $K(z)$ имеет смысл кривизны волновых фронтов на центральной оси солитона.

Следуя [29], выберем $G(r/R)$ в виде

$$G = \exp\left(-\frac{3r^2}{2R^2}\right) \quad (16)$$

и подставим данное выражение вкупе с (15) в уравнение (14). При этом в левой части (14) используем приосевое приближение $r^2/R^2 \ll 1$ [29–31], записав приближенно $G \approx 1 - 3r^2/2R^2$. Тогда, приравнивая в левой и правой частях (14) коэффициенты при r^0 и r^2, получим систему уравнений

$$f' = -\frac{c\beta}{2n\omega\tau_0^2}\frac{R_0^{4/3}}{R^{4/3}} - \frac{6g^2}{R^2}, \quad (17)$$

$$R'' = -\frac{\partial U}{\partial R}, \quad (18)$$

где

$$U = \frac{3c\beta}{4n\omega\tau_0^2}\frac{R_0^{4/3}}{R^{4/3}} + \frac{9g^2}{8R^2}. \quad (19)$$

Уравнение (18) формально совпадает с уравнением движения ньютоновской частицы единичной массы во внешнем поле с “потенциальной энергией” $U(R)$. Из (19) легко видеть, что функция $U(R)$ имеет

минимум только при $\beta < 0$. Данный минимум соответствует равновесному значению R_0 апертуры солитона, т.е. $(\partial U/\partial R)_{R=R_0} = 0$. Тогда (см. (19) и (12))

$$R_0 = 0.69\sqrt{\frac{c}{n\omega|\beta|}}\tau_0. \tag{20}$$

Введя дисперсионную $l_d = 2\tau_0^2/|\beta|$ и дифракционную $l_D = n\omega R_0^2/c$ длины, перепишем (20) в виде

$$L_D = 0.24 l_d. \tag{21}$$

Очевидно, при $R = R_0$ имеем $R' = K = 0$. В этом случае уравнение (17) при учете (20) легко интегрируется: $\varphi = f = -13c|\beta|z/(6n\omega\tau_0^2)$. Отсюда, а также из (5), (6), (15) и (16) при $R = R_0$ имеем

$$\psi_1 = \pm\frac{|\beta|}{\sqrt{\alpha_1\alpha_2}\tau_0^2}\exp\left(-\frac{r^2}{R_0^2} + i\frac{13|\beta|}{6\tau_0^2}z\right)\times$$
$$\times\,\mathrm{sech}\left[\frac{\tau}{\tau_0}\exp\left(-\frac{r^2}{2R_0^2}\right)\right], \tag{22}$$

$$\psi_2 = \frac{|\beta|}{\alpha_1\tau_0^2}\exp\left(-\frac{r^2}{R_0^2} + i\frac{13|\beta|}{3\tau_0^2}z\right)\times$$
$$\times\,\mathrm{sech}^2\left[\frac{\tau}{\tau_0}\exp\left(-\frac{r^2}{2R_0^2}\right)\right]. \tag{23}$$

Данное приближенное решение системы (1), (2) представляет собой двухчастотный локализованный во всех направлениях пространственно-временной солитон (световую пулю), который распространяется вдоль оси z с линейной групповой скоростью v_g. Это решение обладает одним свободным параметром, в качестве которого можно взять временную длительность τ_0. Апертура R_0 солитона связана с τ_0 соотношением (20).

Как видно из (22) и (23), временная длительность τ_0 компоненты световой пули на первой гармонике в два раза больше временной длительности $2\tau_0$ компоненты на второй гармонике. При этом поперечные размеры обеих компонент пули одинаковы и равны R_0.

Малые отклонения апертуры R от равновесного значения R_0 приведут к ее малым периодическим колебаниям около R_0. Вместе с апертурой малым колебаниям будут подвержены амплитуды, временные длительности, фазовые скорости и кривизны волновых фронтов обеих компонент световой пули (см. (5) и (6), (15)–(17)).

Здесь возникает вопрос: насколько большими могут быть отклонения R от R_0, чтобы световая пуля оставалась устойчивой? Для этого заметим, что первый интеграл уравнения (18) имеет вид $R'^2/2 + U(R) = \mathrm{const}$. Так как $U(R) \to -0$ при $R \to \infty$, то в этом же пределе $R' \to 0$, если всюду $K^2 + 2U(R)/R^2 < 0$. Таким образом в этом случае область изменения апертуры в процессе распространения световой пули является ограниченной (финитной). В противном случае обе компоненты импульса должны испытывать неограниченное дифракционное уширение, сопровождаемое столь же неограниченным дисперсионным расплыванием (см. (5), (6) и первое выражение (15)). Отмеченное условие устойчивости является наиболее прозрачным в условиях отклонения R от R_0 при плоских волновых фронтах солитона ($K = 0$). Тогда имеем $U(R) < 0$. Отсюда и из (19) находим

$$R > R_{\min} = 0.54R_0 = 0.38\sqrt{\frac{c}{n\omega|\beta|}}\tau_0. \tag{24}$$

Заметим, что данное неравенство является необходимым условием устойчивости световой пули (22), (23).

Энергии обеих компонент солитона определяются по формуле $W_{1,2} = v_g\int_0^\infty rdr\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|\psi_{1,2}|^2 d\tau$. Подставляя сюда (22), (23) и учитывая (20), будем иметь

$$W_1 = 0.32\frac{cv_g}{n\omega}\frac{|\beta|}{\alpha_1\alpha_2\tau_0},\ W_2 = 0.11\frac{cv_g}{n\omega}\frac{|\beta|}{\alpha_1^2\tau_0}. \tag{25}$$

Видно, что энергии обеих компонент одного порядка по величине. Использовав выражения для коэффициентов $\alpha_{1,2}$, приведенные после системы (1), (2), а также взяв для кристалла KDP в ближнем инфракрасном диапазоне [32] $2\omega \sim 10^{15}\,\mathrm{c}^{-1}$, $\chi_{1,2}^{(2)} \sim 10^{-9}$ СГСЭ, $|\beta| \sim 10^{-28}\,\mathrm{c}^2/\mathrm{см}$, $v_g \sim c$ и полагая, что длительность импульса $\tau_0 \sim 10^{-12}\,\mathrm{c}$, из (25) найдем $W_{1,2} \sim 1\,$мкДж. Для мощностей импульсов имеем $P_{1,2} \sim W_{1,2}/\tau_0 \sim 10^6\,$Вт. Используя (20), при приведенных выше параметрах получим оценку для апертуры $R_0 \sim 1\,$мм. При этом продольный размер световой пули $l_\parallel \sim v_g\tau_p \sim 0.1\,$мм. Для интенсивностей компонент имеем $I_{1,2} \sim P_{1,2}/R_0^2 \sim 10^8\,\mathrm{Вт/см}^2$.

Приведенные оценки показывают, что рассмотренные выше параметрические двухчастотные световые пули могут быть обнаружены в экспериментальных условиях. Для этого несущую частоту ω входного импульса надо подобрать так, чтобы на частоте 2ω параметр ДГС обращался в ноль. В кристаллах обычно это условие может быть выполнено в ближнем инфракрасном диапазоне.

Заключение. Проведенное выше исследование показывает, что отсутствие ДГС на частоте второй гармоники не является препятствием для формирования двухчастотной параметрической световой пули в среде с квадратичной нелинейностью. В этом

случае импульс на основной частоте, генерируя сигнал второй гармоники (см. первое слагаемое в правой части (2)), испытывает дисперсионное и дифракционное уширения. Однако нелинейность на основной частоте, появившаяся за счет порожденного импульса на второй гармонике (см. второе слагаемое в правой части (1)), останавливает эти процессы. В результате формируется локализованный сгусток энергии на основной частоте. В свою очередь этот сгусток захватывает и локализует порожденный им сигнал второй гармоники. Благодаря отсутствию ДГС импульс второй гармоники испытывает в два раза большее нелинейное самосжатие в направлении распространения, чем импульс на основной несущей частоте. Поперечные же размеры обеих компонент световой пули одинаковы.

При равенстве нулю групповой дисперсии второго порядка возникает естественный вопрос об учете ДГС третьего порядка. Но коль скоро устойчивая световая пуля может формироваться в пренебрежении на второй гармонике ДГС всех порядков, то, скорее всего, учет ДГС третьего порядка будет иметь здесь характер малых поправок.

Важным остается вопрос устойчивости световой пули (22), (23) по отношению к малым отклонениям от нуля параметра ДГС на частоте второй гармоники. Причем интерес представляют отклонения как в область отрицательных, так и положительных значений. Как было сказано во вводной части статьи, знак ДГС качественным образом влияет на характер пространственно-временной динамики световых импульсов.

Механизм формирования световой пули (22), (23) выявляет несимметричные роли импульсов на основной частоте и на второй гармонике. В этой связи важным является изучение возможности формирования параметрической световой пули при равенстве нулю ДГС на основной частоте. Данный вопрос представляет интерес для дальнейших исследований.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (# 17-11-01157).

1. Ю. С. Кившарь, Г. П. Агравал, *Оптические солитоны: от волоконных световодов к фотонным кристаллам*, Физматлит, М. (2005), 648 с. [Yu. S. Kivshar and G. P. Agrawal, *Optical Solitons: From Fibers to Photonic Crystals*, Academic Press, N.Y. (2003)].
2. D. Mihalache, Rom. Rep. Phys. **69**, 403 (2017).
3. Ya. V. Kartashov, G. E. Astrakharchik, B. A. Malomed, and L. Torner, Nature Review Physics **1**, 185 (2019).
4. R. Y. Chiao, E. Garmire, and C. H. Townes, Phys. Rev. Lett. **13**, 479 (1964).
5. Ya. V. Kartashov, B. A. Malomed, and L. Torner, Rev. Mod. Phys. **83**, 247 (2011).
6. C. Conti, S. Trillo, P. Di Trapani, G. Valiulis, A. Piskarskas, O. Jedrkiewicz, and J. Trull, Phys. Rev. Lett. **90**, 170406 (2003).
7. А. Е. Дормидонов, В. О. Компанец, С. В. Чекалин, В. П. Кандидов, Письма в ЖЭТФ **104**, 173 (2016) [A. E. Dormidonov, V. O. Kompanets, S. V. Chekalin, and V. P. Kandidov, JETP Lett. **104**, 175 (2016)].
8. В. П. Кандидов, В. О. Компанец, С. В. Чекалин, Письма в ЖЭТФ **108**, 307 (2018) [V. P. Kandidov, V. O. Kompanets, and S. V. Chekalin, JETP Lett. **108**, 287 (2018)].
9. С. В. Чекалин, В. О. Компанец, А. Е. Дормидонов, В. П. Кандидов, УФН **189**, 299 (2019) [S. V. Chekalin, V. O. Kompanets, A. E. Dormidonov, and V. P. Kandidov, Physics – Uspekhi **62**, 282 (2019)].
10. D. A. Dolinina, A. S. Shalin, and A. V. Yulin, Pis'ma v ZhETF **110**, 755 (2019).
11. A. A. Kanashov and A. M. Rubenchik, Physica D **4**, 122 (1981).
12. H. Sakaguchi and B. A. Malomed, Opt. Soc. Am. B **29**, 2741 (2012).
13. I. N. Towers, B. A. Malomed, and F. W. Wise, Phys. Rev. Lett. **90**, 1239021 (2003).
14. S. V. Sazonov, M. S. Mamaikin, M. V. Komissarova, and I. G. Zakharova, Phys. Rev. E **96**, 022208 (2017).
15. S. V. Sazonov, A. A. Kalinovich, M. V. Komissarova, and I. G. Zakharova, Phys. Rev. A **100**, 033835 (2019).
16. A. A. Kalinovich, M. V. Komissarova, S. V. Sazonov, and I. G. Zakharova, PLOS ONE **14**, e0220840 (2019).
17. S. Blaha, E. Averlant, and K. Panajotov, Proceedings of SPIE: Photonics Europe **9892**, 989227 (2016).
18. X. Liu, L. J. Qian, and F. W. Wise, Phys. Rev. Lett. **82**, 4631 (1999).
19. А. П. Сухоруков, *Нелинейные волновые взаимодействия в оптике и радиофизике*, Наука, М. (1988), 231 с.
20. P. K. Wai, C. R. Menyuk, H. H. Chen, and Y. C. Lee, Opt. Lett. **12**, 628 (1987).
21. P. Di Trapani, D. Caironi, G. Valiulis, A. Dubietis, R. Danielius, and A. Piskarskas, Phys. Rev. Lett. **81**, 570 (1998).
22. D. Mihalache, D. Mazilu, J. Dorring, and L. Torner, Opt. Commun. **159**, 129 (1999).
23. B. A. Malomed, P. Drummond, H. He, A. Berntson, D. Anderson, and M. Lisak, Phys. Rev. E **56**, 4725 (1997).
24. D. Anderson, Phys. Rev. A **27**, 3135 (1983).
25. С. К. Жданов, Б. А. Трубников, ЖЭТФ **92**, 1612 (1987) [Sov. Phys. JETP **65**, 904 (1987)].
26. D. Anderson, M. Desaix, M. Lisak, and M. L. Quorida-Teixeiro, J. Opt. Soc. Am. B **9**, 1358 (1992).

27. С. В. Сазонов, ЖЭТФ **130**, 145 (2006) [S. V. Sazonov, JETP **103**, 126 (2006)].
28. S. V. Sazonov, Phys. Rev. A **100**, 043828 (2019).
29. S. V. Sazonov, J. Phys. Soc. Jpn. **85**, 124404 (2016).
30. С. А. Ахманов, А. П. Сухоруков, Р. В. Хохлов, УФН **93**, 19 (1967) [S. A. Akhmanov, A. P. Sukhorukov, and R. V. Khokhlov, Sov. Phys. Usp. **10**, 609 (1968)].
31. Н. В. Карлов, Н. А. Кириченко, *Колебания, волны, структуры*, Физматлит, М. (2001), 496 с.
32. А. Ярив, *Квантовая электроника*, Сов. Радио, М. (1980), 488 с. [A. Yariv, *Quantum Electronics*, John Wiley & Sons, N.Y. (1989), 676 p.].