

# Эффективная групповая скорость и форма пучков-близнецов

П. А. Прудковский<sup>1)</sup>

Физический факультет, МГУ им. М. В. Ломоносова, 119991 Москва, Россия

Поступила в редакцию 20 октября 2019 г.

После переработки 1 апреля 2020 г.

Принята к публикации 1 апреля 2020 г.

Теоретически исследованы форма и скорости распространения импульсов пучков-близнецов в процессе их генерации при параметрическом рассеянии света – в случае, когда задержки, вызванные дисперсией групповых скоростей, превышают длину импульса накачки. Показано, что эффективная групповая скорость импульса рассеянного излучения определяется средним арифметическим групповых скоростей на частоте рассеянного излучения и на частоте накачки. Для больших коэффициентов параметрического усиления численно найдены элементы матрицы рассеяния, показано, что перемешивание спектральных компонент рассеянного излучения может приводить к существенному сужению импульсов пучков-близнецов. Наконец, для случая генерации широкополосных пучков-близнецов последовательно в двух кристаллах с апериодической доменной структурой показано, что видность трехчастотной интерференции уменьшается по мере отставания импульса накачки от импульсов рассеянного излучения.

DOI: 10.31857/S123456782008011X

Хорошо известно, что при спонтанном параметрическом рассеянии света происходит рождение пар фотонов, описываемых единым квантовым состоянием – так называемых бифотонов. Рост интенсивности накачки приводит к переходу в вынужденный режим рассеяния, при котором рассеянный свет состоит из большого числа бифотонных пар. Подобное состояние неклассического света принято называть пучками-близнецами [1].

Неклассические свойства пучков-близнецов исследовались, начиная с конца прошлого века. Так как в двух пучках рассеянного излучения одинаковое число фотонов, то можно зарегистрировать подавление флуктуаций разности их интенсивностей ниже уровня дробового шума [2–6]. Позже были исследованы более нетривиальные свойства пучков-близнецов: корреляции между числами фотонов в двух пучках, полученные при помощи статистики фотоотчетов [7–10], квадратурное сжатие [11], возможность наблюдения неклассических корреляций в различных оптических схемах [12–14]. Было показано, что пучки-близнецы можно использовать для прецизионных измерений [15–18] и приготовления макроскопического пучка света с подавленными флуктуациями интенсивности [19].

Вынужденный режим параметрического рассеяния требует достаточно большой интенсивности накачки. Поэтому обычно для генерации пучков-

близнецов используется импульсная накачка. Если длина когерентности накачки составляет единицы пикосекунд, то важную роль начинает играть согласование групповых скоростей накачки и пучков-близнецов [20, 21]. Учет расплывания импульсов пучков-близнецов или отставания импульса накачки от них из-за дисперсии групповых скоростей крайне важен при использовании оптических схем с несколькими нелинейными кристаллами [22–25], а также при генерации широкополосных пучков-близнецов в кристаллах с апериодической доменной структурой [25–28]. В данной работе теоретически исследовано, как от параметров импульса накачки и дисперсионных свойств кристалла зависит скорость распространения пучков-близнецов в процессе их генерации в нелинейном кристалле с периодической или апериодической доменной структурой и их форма на выходе из него.

Рассмотрим процесс генерации бифотонного излучения при коллинеарном параметрическом взаимодействии в нелинейном кристалле под действием накачки с центральной частотой  $\omega_p = 2\omega_0$ . В случае линейного распространения импульсы излучения на частотах  $\omega_0 \pm \Omega$ , вошедшие в кристалл вместе с импульсом накачки, на выходе были бы смещены относительно импульса накачки в соответствии с дисперсией групповых скоростей. Для примера на рис. 1 показано время прохождения импульсов с разными частотами через кристалл ниобата лития (легированного 5% оксида магния) толщиной  $L = 5$  мм. Одна-

<sup>1)</sup>e-mail: vysogota@gmail.com

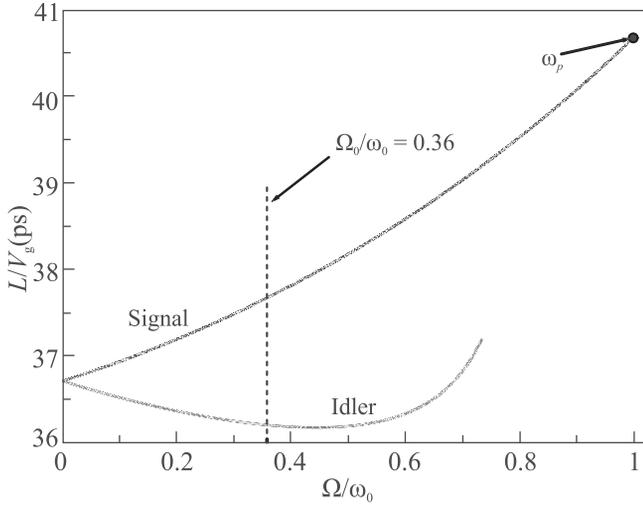


Рис. 1. (Цветной онлайн) Время линейного прохождения импульсов с различными частотами  $\omega_0 \pm \Omega$  через кристалл ниобата лития толщиной  $L = 5$  мм. Частота  $\omega_0$  соответствует длине волны  $\lambda_0 = 1064$  нм. Для частоты  $\Omega_0 = 0.36\omega_0$  импульс на частоте сигнального излучения  $\omega_0 + \Omega$  обгоняет импульс накачки на 3.0 пс, а на сопряженной холостой частоте  $\omega_0 - \Omega$  – на 4.4 пс

ко процесс нелинейного взаимодействия вносит дополнительное изменение фазы распространяющихся через кристалл волн и тем самым меняет их эффективную групповую скорость.

Для начала рассмотрим решение в случае непрерывной накачки. Положительно-частотную часть рассеянного поля запишем в виде

$$E^{(+)}(t, z) = e^{-i\omega_0 t} \int_{-\omega_0}^{\omega_0} \hat{a}(\Omega, z) e^{i\{k(\omega_0 + \Omega)z - \Omega t\}} d\Omega, \quad (1)$$

где  $\hat{a}(\Omega, z)$  – оператор уничтожения фотонов на частоте  $\omega_0 + \Omega$ , причем компоненты с  $\Omega > 0$  относятся к сигнальной, а с  $\Omega < 0$  – к холостой части рассеянного излучения. Эволюция операторов поля в кристалле описывается уравнениями

$$\frac{\partial \hat{a}(\Omega, z)}{\partial z} = i\gamma \hat{a}^+(-\Omega, z) e^{i\Delta(\Omega)z - iKz}, \quad (2)$$

где коэффициент  $\gamma$  пропорционален амплитуде поля накачки и величине квадратичной восприимчивости, расстройка фазового синхронизма  $\Delta(\Omega) = k_p - k(\omega_0 + \Omega) - k(\omega_0 - \Omega)$ , а  $K$  – вектор обратной решетки доменной структуры, наведенной в кристалле и обеспечивающей замыкание квазисинхронизма  $\Delta(\Omega_0) = K$  на некоей частоте  $\Omega_0$ . Несложно получить решение уравнения (2) в виде

$$\hat{a}(\Omega, z) = A(\Omega, z)\hat{a}(\Omega, 0) + B(\Omega, z)\hat{a}^+(-\Omega, 0), \quad (3)$$

где коэффициенты преобразования Боголюбова имеют вид:

$$\begin{cases} A(\Omega, z) = e^{iq(\Omega)z} \left\{ \cos(z\sqrt{q^2(\Omega) - |\gamma|^2}) - \right. \\ \left. - iq(\Omega)z \operatorname{sinc}(z\sqrt{q^2(\Omega) - |\gamma|^2}) \right\}, \\ B(\Omega, z) = i\gamma z e^{iq(\Omega)z} \operatorname{sinc}(z\sqrt{q^2(\Omega) - |\gamma|^2}). \end{cases} \quad (4)$$

Здесь  $q(\Omega) = \{\Delta(\Omega) - K\}/2$ . Если и сигнальное, и холостое поле на входе в кристалл находятся в вакуумном состоянии, то интенсивность поля на выходе определяется только коэффициентом  $B(\Omega, z)$ , и для ее расчета достаточно только части выражения для  $E^{(+)}(t, z)$ :

$$E^{(+)}(t, z) \rightarrow i\gamma z \int_{-\omega_0}^{\omega_0} e^{i\left\{\frac{k(\omega_0 + \Omega) - k(\omega_0 - \Omega) + k_p - K}{2}z - (\omega_0 + \Omega)t\right\}} \times \\ \times \operatorname{sinc}\left\{z\sqrt{q^2(\Omega) - |\gamma|^2}\right\} \hat{a}^+(-\Omega, 0) d\Omega. \quad (5)$$

Выражение имеет форму волнового пакета, однако роль эффективного волнового вектора поля играет комбинация волновых векторов на разных частотах. Казалось бы, отсюда следует, что эффективные групповые скорости сопряженных сигнальной и холостой мод должны быть равны:

$$V_g^{(\text{eff})}(\omega_0 \pm \Omega) = \left\{ \frac{\partial}{\partial \Omega} \left( \frac{k(\omega_0 + \Omega) - k(\omega_0 - \Omega)}{2} \right) \right\}^{-1} = \\ = \frac{2}{V_g^{-1}(\omega_0 + \Omega) + V_g^{-1}(\omega_0 - \Omega)}. \quad (6)$$

Это, однако, умозрительный вывод, имеющий в основном методическое значение – в случае непрерывной накачки средняя интенсивность рассеянного излучения, рассчитанная с помощью выражения (5), также будет постоянна.

Теперь учтем импульсный характер накачки  $E_p(t) = E_0 f(t) e^{-i\omega_p t} \equiv E_0 e^{-i\omega_p t} \int f(\nu) e^{-i\nu t} d\nu$ . Ненулевая ширина спектра накачки усложняет уравнения, определяющие эволюцию операторов рассеянного поля в кристалле:

$$\frac{\partial \hat{a}(\Omega, z)}{\partial z} = i\gamma \int f(\nu) \hat{a}^+(\nu - \Omega, z) e^{i\Delta(\Omega, \nu)z - iKz} d\nu. \quad (7)$$

Расстройка синхронизма теперь учитывает как частоту рассеянного поля, так и частоту накачки:  $\Delta(\Omega, \nu) = k(\omega_p + \nu) - k(\omega_0 + \Omega) - k(\omega_0 + \nu - \Omega)$ . В этом случае каждая спектральная компонента сигнального излучения связана с целой полосой компонент в спектре холостого излучения, и наоборот. Связь между операторами рассеянного излучения на

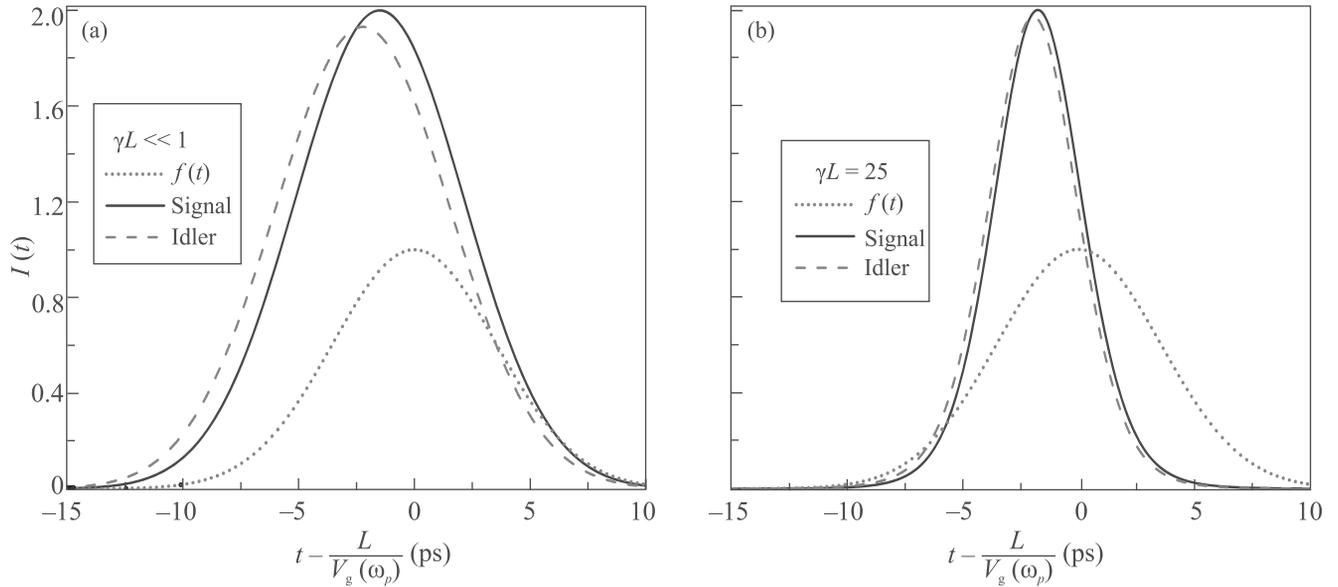


Рис. 2. (Цветной онлайн) Форма импульсов сигнального и холостого излучения с центральной частотой  $\omega_0 \pm \Omega$  ( $\Omega_0/\omega_0 = 0.36$ ) на выходе из кристалла ниобата лития для случаев – предельно малого  $\gamma L \ll 1$  (a) и большого  $\gamma L \approx 25$  (b) коэффициентов параметрического усиления. Для сравнения импульсы нормированы так, чтоб высота импульсов сигнального излучения в обоих случаях была одинакова. Мелким пунктиром показана форма импульса накачки  $f(t)$  с  $\tau = 5$  пс

выходе из кристалла и операторами на входе теперь определяется матрицей рассеяния [29]:

$$\hat{a}(\Omega, z) = \int \{ A(\Omega, \nu, z)\hat{a}(\nu + \Omega, 0) + B(\Omega, \nu, z)\hat{a}^+(\nu - \Omega, 0) \} d\nu. \quad (8)$$

Найти аналитическое решение системы уравнений (7) уже не представляется возможным. Однако несложно записать приближенное решение при малых величинах коэффициента усиления  $\gamma L \ll 1$  [21], описывающее спонтанное параметрическое рассеяние:

$$\hat{a}(\Omega, z) \approx \hat{a}(\Omega, 0) - \gamma z \times \int f(\nu) \text{sinc}\{q(\Omega, \nu)z\} \hat{a}^+(\nu - \Omega, 0) e^{iq(\Omega, \nu)z} d\nu, \quad (9)$$

где снова  $q(\Omega, \nu) = \{\Delta(\Omega, \nu) - K\}/2$ . Теперь можно записать выражение для средней интенсивности сигнального излучения

$$I_S(t, z) = \langle \text{vac} | E_S^{(-)}(t, z) E_S^{(+)}(t, z) | \text{vac} \rangle = \int_0^{\omega_0} d\Omega \iint d\nu d\nu' B^*(\Omega + \nu, \nu' + \nu, z) \times e^{i\{k(\Omega + \nu) - k(\Omega)\}z - i\nu t} = \gamma^2 z^2 \int_0^{\omega_0} d\Omega \times$$

$$\left[ \iint d\nu' d\nu e^{i\{k(\omega_0 + \Omega + \nu) - k(\omega_0 + \Omega) + k(\omega_p + \nu' + \nu) - k(\omega_p + \nu')\}z/2 - i\nu t} \times f^*(\nu') f(\nu' + \nu) \text{sinc}\{q(\Omega, \nu')z\} \text{sinc}\{q(\Omega + \nu, \nu' + \nu)z\} \right], \quad (10)$$

и аналогичное выражение – для интенсивности холостого излучения. Пределы интегрирования по частоте  $\nu$  определяются шириной спектра накачки, т.е. скоростью спада функции  $f(\nu)$ . В дальнейшем мы будем считать, что она имеет гауссову форму  $f(\nu) = \exp(-\tau^2 \nu^2/2)$ , где  $\tau$  – длина импульса накачки. При любых разумных величинах  $\tau$  можно считать, что  $|\nu| = \tau^{-1} \ll \omega_0$ . Форма импульса рассеянного излучения определяется спектром накачки  $f(\nu)$  и функциями  $\text{sinc}\{q(\Omega, \nu)z\}$ , играющими роль форм-фактора процесса рассеяния. Раскладывая фазовый множитель в ряд по степеням  $\nu$ , несложно увидеть, что эффективная групповая скорость рассеянного излучения на частоте  $\omega_0 + \Omega$  зависит от групповой скорости как на этой частоте, так и на частоте накачки:

$$V_g^{(\text{eff})}(\omega_0 + \Omega) = \left\{ \frac{\partial}{\partial \nu} \left( \frac{k(\omega_0 + \Omega + \nu) + k(\omega_p + \nu)}{2} \right) \right\}^{-1} = \frac{2}{V_g^{-1}(\omega_0 + \Omega) + V_g^{-1}(\omega_p)}. \quad (11)$$

Отсюда следует, что импульсы рассеянного излучения на выходе из нелинейного кристалла обгоняют импульс накачки на интервалы времени, которые в два раза меньше, чем в случае их линейного распространения (см. рис. 1).

Решение при произвольных значениях коэффициента параметрического усиления может быть получено численно. Подставляя преобразования (8) в уравнения (7), получаем:

$$\begin{cases} \frac{\partial A(\Omega, \nu, z)}{\partial z} = \\ = i\gamma \int f(\nu') B^*(\nu' - \Omega, \nu + \nu', z) e^{2iq(\Omega, \nu')z} d\nu', \\ \frac{\partial B^*(-\Omega, \nu, z)}{\partial z} = \\ = -i\gamma \int f^*(\nu') A(\nu' + \Omega, \nu - \nu', z) \times \\ \times e^{-2iq(-\Omega, \nu')z} d\nu'. \end{cases} \quad (12)$$

Эта система уравнений интегрировалась численно сразу для всех спектральных компонент рассеянного излучения. Подставляя полученные таким образом элементы матрицы рассеяния  $B(\Omega, \nu, z)$  в выражение для средней интенсивности рассеянного излучения (10), можно найти форму импульсов пучков-близнецов, возникающих при прохождении импульса накачки через нелинейный кристалл при различных коэффициентах усиления. На рисунке 2 показана форма импульсов сигнального и холостого излучения на выходе из кристалла ниобата лития в случае, когда импульс накачки имеет длину  $\tau = 5$  пс, а квазисинхронизм замыкается на частоте  $\Omega_0/\omega_0 = 0.36$ .

В случае предельно малого коэффициента усиления  $\gamma L \ll 1$  (рис. 2а) форма импульсов соответствует аналитическому решению (10). Время, на которое импульсы сигнального и холостого излучения в этом случае обгоняют импульс накачки, действительно в два раза меньше, чем при линейном распространении на рис. 1. При большом коэффициенте параметрического усиления  $\gamma L \approx 25$  (рис. 2б) оба импульса становятся заметно уже. Это связано с тем, что чем больше коэффициент усиления, тем больше спектральных компонент рассеянного излучения перемешаны матрицей рассеяния (8): коэффициенты  $A(\Omega, \nu, z)$  и  $B(\Omega, \nu, z)$  как функции  $\nu$  оказываются существенно шире спектра накачки  $f(\nu)$ . Кроме того, максимумы импульсов в этом случае практически совпадают.

Как было отмечено выше, форма импульсов рассеянного излучения определяется спектром накачки  $f(\nu)$  и функцией, играющей роль форм-фактора процесса рассеяния в кристалле. Определяющее значение имеет более узкая из них. В случае  $\tau = 5$  пс

спектр накачки еще достаточно узок, поэтому форма импульсов на рис. 2а похожа на форму импульса накачки. Однако чем короче импульс накачки, тем сильнее форма импульсов пучков-близнецов будет зависеть от размера кристалла и его дисперсионных свойств.

На рисунке 3 показана форма импульсов рассеянного излучения, возникших под действием импульса

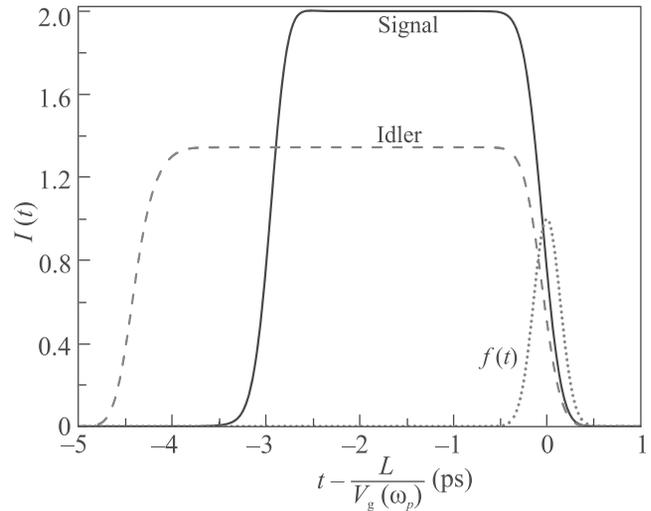


Рис. 3. (Цветной онлайн) Форма импульсов сигнального и холостого излучения на выходе из кристалла ниобата лития, возникших под действием импульса накачки длиной  $\tau = 2$  пс

накачки длиной  $\tau = 0.2$  пс. Почти прямоугольную форму импульсов в этом случае можно объяснить тем, что узкий импульс накачки, проходя через кристалл, с равной вероятностью рождает бифотонную пару в каждой точке кристалла. Излучение, родившееся в начале кристалла, обгоняет накачку в соответствии с линейной дисперсией групповых скоростей. Излучение, родившееся в самом конце кристалла, выходит из него вместе с импульсом накачки. При этом, как и следует из (11), “центр тяжести” импульсов находится посередине – т.е. совпадает с положением максимумов импульсов в случае длинного импульса накачки. Следует отметить, что в данном случае форма импульсов практически не зависит от коэффициента параметрического преобразования.

Безусловно, измерение формы и взаимного расположения выходящих из кристалла импульсов на пикосекундной шкале времен с экспериментальной точки зрения представляет собой сложную проблему. Однако взаимное смещение импульсов излучения существенно влияет на процессы их нелинейного взаимодействия. Как уже говорилось выше, особенно это проявляется в схемах с несколькими нелинейны-

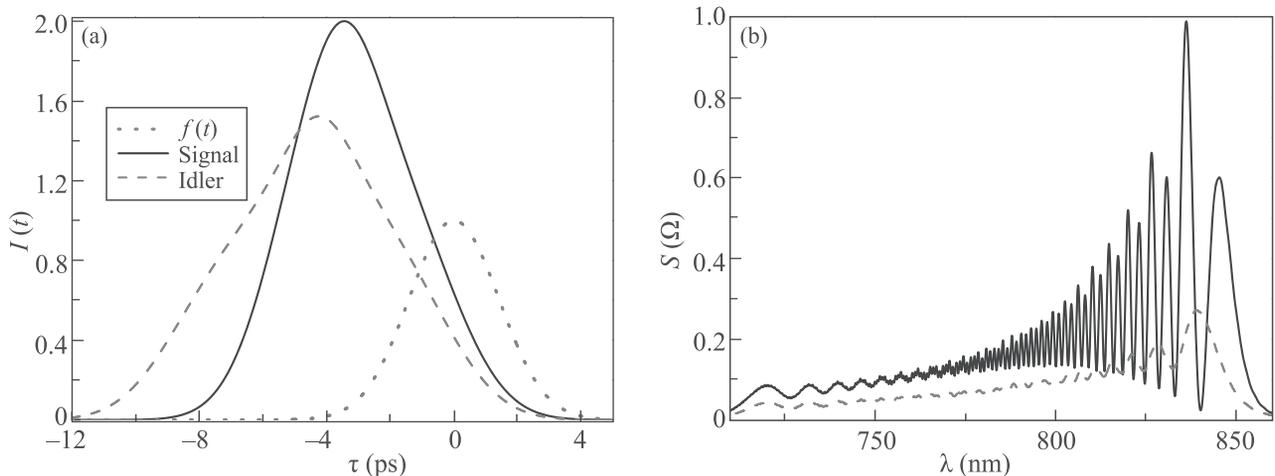


Рис. 4. (Цветной онлайн) (а) – Форма импульсов широкополосных пучков-близнецов, возникших при параметрическом рассеянии последовательно в двух кристаллах ниобата лития с аperiodической доменной структурой с законом изменения вектора обратной решетки (13) под действием импульса накачки длиной  $\tau = 2$  пс. (б) – Спектр импульса сигнального излучения как функция длины волны  $\lambda = 2\pi c/(\omega_0 + \Omega)$  после прохождения одного (пунктир) и двух (сплошная линия) кристаллов

ми кристаллами. В работе [25] экспериментально исследовалась интерференционная картина в спектре широкополосных пучков-близнецов, возникших при параметрическом рассеянии в двух последовательно расположенных нелинейных кристаллах ниобата лития с аperiodической доменной структурой.

Широкий спектр рассеянного излучения в этом случае достигается за счет медленного изменения обратного вектора решетки доменной структуры  $K(z)$ . Поэтому в разных областях кристалла квазисинхронизм замыкается на разных частотах. В случае двух кристаллов интерференция между излучением на одной и той же частоте, родившимся в разных кристаллах, зависит от набега фаз сразу трех волн – на этой частоте, на сопряженной ей, и на частоте накачки. Однако если за время распространения от одного кристалла к другому импульс накачки отстанет от излучения, родившегося в первом кристалле – интерференция пропадет.

В работе [25] использовались кристаллы с квадратично-гиперболическим законом изменения обратного вектора решетки, предложенным ранее в работе [26]:

$$K(z) = \beta - \frac{\alpha}{4(1+z/L)^2}. \quad (13)$$

Если расстройку синхронизма в кристалле можно аппроксимировать квадратичной зависимостью  $\Delta(\Omega) \approx \beta - \alpha(\Omega/\omega_0)^2$ , то закон изменения обратного вектора решетки (13) обеспечивает генерацию пучков-близнецов со спектром частот в диапазоне

$0.25 < \Omega/\omega_0 < 0.5$ , и при этом приводит к квадратичной зависимости фазы коэффициента  $B(\Omega, z)$  от частоты, что удобно для ее компенсации в экспериментальных условиях.

Кристаллы в работе [25] были ориентированы по-разному: если в первом кристалле период доменов уменьшался от начала к концу, то во втором кристалле он, наоборот, увеличивался. Благодаря этому расстояние между областями кристаллов с малым периодом было достаточно небольшим, чтобы накачка не успевала отстать от рассеянного излучения. Поэтому видность трехчастотной интерференции для спектральных компонент рассеянного излучения, рождавшихся в этих областях кристалла, не уменьшалась.

Форму импульсов, возникших при прохождении импульса накачки через два нелинейных кристалла с доменной структурой (13), а также их спектр можно получить путем численного интегрирования уравнений (12), в которых выражение  $2q(\Omega, \nu)z$  заменено на  $\Delta(\Omega, \nu)z - \int_0^z K(z')dz'$ . На рисунке 4а показана полученная таким образом форма импульсов широкополосных пучков-близнецов на выходе из второго кристалла в случае, когда длина импульса накачки составляет  $\tau = 2$  пс, а коэффициент параметрического усиления  $\gamma L \approx 25$ . Видно, что форма импульсов заметно отличается от гауссовой формы импульса накачки (особенно это проявляется для импульса холостого излучения). При этом разным частям импульсов соответствуют различные частоты, родившиеся в

разных областях кристаллов. В середине импульсов находятся спектральные компоненты, родившиеся в областях с малым периодом доменной структуры, тогда как на их крыльях - спектральные компоненты, родившиеся в областях с большим периодом.

На рисунке 4b показан спектр импульса сигнального излучения  $S(\Omega) = \int |B(\Omega, \nu)|^2 d\nu$  как функция длины волны  $\lambda = 2\pi c/(\omega_0 + \Omega)$  на выходе из первого и из второго кристаллов. Хорошо видно, что после второго кристалла в длинноволновой области спектра наблюдается картина трехчастотной интерференции, однако при смещении в коротковолновую область ее видность спадает до нуля - по мере того, как расстояние между областями кристалла, в которых рождается эта часть спектра, растет, и увеличивается отставание накачки от импульсов рассеянного излучения. К сожалению, в работе [25] интерференция была зафиксирована только в небольшой области спектра, и изменение видности интерференционной картины с изменением длины волны в эксперименте пока что не наблюдалось.

Таким образом, для формирования волновых пакетов пучков-близнецов при параметрическом рассеянии под действием импульсной накачки существенную роль играют два фактора: перемешивание различных спектральных компонент в рассеянном излучении (8) и дополнительный нелинейный фазовый набег для каждой спектральной компоненты. В результате форма импульсов пучков-близнецов определяется как спектром импульса накачки, так и форм-фактором процесса рассеяния (10), причем определяющей является более узкая из этих функций, а их эффективные групповые скорости при распространении через нелинейный кристалл заметно отличаются от линейных групповых скоростей на соответствующих частотах.

В случае спонтанного параметрического рассеяния в однородном кристалле бифотонные пары с равной вероятностью рождаются в любой точке кристалла, поэтому в среднем они проходят половину длины кристалла. В результате их эффективная групповая скорость определяется средним арифметическим обратных групповых скоростей на частоте рассеянного излучения и на частоте накачки (11).

В случае вынужденного режима параметрического рассеяния родившееся ранее излучение участвует в процессе рассеяния, что приводит к дополнительному перемешиванию спектральных компонент в рассеянном излучении. Это перемешивание определяется свойствами матрицы рассеяния (8), которая может быть найдена численно. В результате импульсы пучков-близнецов становятся заметно уже им-

пульса накачки, а различие их эффективных групповых скоростей уменьшается (рис. 2b).

Относительные скорости распространения импульсов накачки и рассеянного излучения имеют большое значение для процессов их нелинейного взаимодействия. Так, при генерации широкополосных пучков-близнецов в схеме с двумя кристаллами с аперидической доменной структурой трехчастотная интерференция наблюдается только до тех пор, пока импульс накачки не отстанет от импульсов рассеянного излучения. Поэтому видность интерференционной картины в схеме типа нелинейного интерферометра Маха-Цандера, использованной в работе [25], должна уменьшаться в соответствии с зависимостью, показанной на рис. 4.

Работа выполнена при поддержке гранта Российского фонда фундаментальных исследований # 20-02-00621 А.

1. A. Allevi and M. Bondani, *Advances In Atomic, Molecular, and Optical Physics* **66**, 49 (2017).
2. A. Heidmann, R.J. Horowitz, S. Reynaud, E. Giacobino, C. Fabre, and G. Camy, *Phys. Rev. Lett.* **59**, 2555 (1987).
3. T. Debuisschert, S. Reynaud, A. Heidmann, E. Giacobino, and C. Fabre, *Quantum Optics: Journal of the European Optical Society Part B* **1**, 3 (1989).
4. O. Jedrkiewicz, Y.-K. Jiang, E. Brambilla, A. Gatti, M. Bache, L. A. Lugiato, P. Di Trapani, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 243601 (2004).
5. M. Bondani, A. Allevi, G. Zambra, M. G. A. Paris, and A. Andreoni, *Phys. Rev. A* **76**, 013833 (2007).
6. I. N. Agafonov, M. V. Chekhova, and G. Leuchs, *Phys. Rev. A* **82**, 011801(R) (2010).
7. O. Haderka, J. Perina, Jr., M. Hamar, and J. Perina, *Phys. Rev. A* **71**, 033815 (2005).
8. E. Waks, B. C. Sanders, E. Diamanti, and Y. Yamamoto, *Phys. Rev. A* **73**, 033814 (2006).
9. J. Perina, J. Krepelka, J. Perina Jr., M. Bondani, A. Allevi, and A. Andreoni, *Phys. Rev. A* **76**, 043806 (2007).
10. W. Mauerer, M. Avenhaus, W. Helwig, and C. Silberhorn, *Phys. Rev. A* **80**, 053815 (2009).
11. A. S. Villar, L. S. Cruz, K. N. Cassemiro, M. Martinelli, and P. Nussenzveig, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 243603 (2005).
12. T. Iskhakov, M. V. Chekhova, and G. Leuchs, *Phys. Rev. Lett.* **102**, 183602 (2009).
13. A. Gatti, E. Brambilla, L. Caspani, O. Jedrkiewicz, and L. A. Lugiato, *Phys. Rev. Lett.* **102**, 223601 (2009).
14. K. Yu. Spasibko, F. Toppel, T. Sh. Iskhakov, M. Stobinska, M. V. Chekhova, and G. Leuchs, *New J. Phys.* **16**, 013025 (2014).

15. G. Brida, M. Genovese, and I. Ruo Berchera, *Nature Photon.* **4**, 227 (2010).
16. M. Bondani, A. Allevi, and A. Andreoni, *Eur. Phys. J. Spec. Top.* **203**, 151 (2012).
17. E. D. Lopaeva, I. Ruo Berchera, I. P. Degiovanni, S. Olivares, G. Brida, and M. Genovese, *Phys. Rev. Lett.* **110**, 153603 (2013).
18. A. Meda, I. Ruo-Berchera, I. P. Degiovanni, G. Brida, M. L. Rastello, and M. Genovese, *Appl. Phys. Lett.* **105**, 101113 (2014).
19. T. Sh. Iskhakov, V. C. Usenko, R. Filip, M. V. Chekhova, and G. Leuchs, *Phys. Rev. A* **93**, 043849 (2016).
20. A. M. Perez, K. Yu. Spasibko, P. R. Sharapova, O. V. Tikhonova, G. Leuchs, and M. V. Chekhova, *Nature Commun.* **6**, 7707 (2015).
21. A. Gatti, T. Corti, and E. Brambilla, *Phys. Rev. A* **92**, 053809 (2015).
22. S. Lemieux, M. Manceau, P. R. Sharapova, O. V. Tikhonova, R. W. Boyd, G. Leuchs, and M. V. Chekhova, *Phys. Rev. Lett.* **117**, 183601 (2016).
23. M. V. Chekhova and Z. Y. Ou, *Advances in Optics and Photonics* **8**, 104 (2016).
24. Y. Shaked, Y. Michael, R. Z. Vered, L. Bello, M. Rosenbluh, and A. Pe'er, *Nature Commun.* **9**, 609 (2018).
25. D. B. Horoshko, M. I. Kolobov, F. Gumpert, I. Shand, F. Konig, and M. V. Chekhova, *J. Mod. Optics* **67**, 41 (2020).
26. D. B. Horoshko and M. I. Kolobov, *Phys. Rev. A* **95**, 033837 (2017).
27. M. V. Chekhova, S. Germanskiy, D. B. Horoshko, G. Kh. Kitaeva, M. I. Kolobov, G. Leuchs, C. R. Phillips, and P. A. Prudkovskii, *Opt. Lett.* **43**, 375 (2018).
28. П. А. Прудковский, *Письма в ЖЭТФ* **107**, 776 (2018).
29. Д. Н. Клышко, *Фотонь и неллинейная оптика*, Наука, М. (1980).