Письма в ЖЭТФ, том 111, вып. 8, с. 509 – 513 © 2020 г. 25 апреля

# Когерентный вихрь в двумерном турбулентном потоке в окрестности вращающегося диска

*А. Б. Бузовкин*[+], *С. С. Вергелес*[*1)], *И. В. Колоколов*[*], *В. В. Лебедев*[*]

[+]*Национальный исследовательский университет, Высшая школа экономики, 101000 Москва, Россия*

[*]*Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН, 142432 Черноголовка, Россия*

Поступила в редакцию 25 марта 2020 г.
После переработки 25 марта 2020 г.
Принята к публикации 26 марта 2020 г.

Рассматривается структура когерентного вихря, образующегося вокруг твердого вращающегося диска в двумерном турбулентном потоке. Найден профиль средней скорости когерентного вихря для разных скоростей вращения.

DOI: 10.31857/S1234567820080054

Турбулентность – хаотическое состояние, реализуемое в жидкостях при больших числах Рейнольдса Re, смотри, например, [1]. В двумерном случае наблюдается тенденция к образованию все более крупных вихрей, что приводит к формированию так называемого обратного каскада. В однородном случае реализуется хаотическое течение со стационарной статистикой. Однако неоднородность (скажем, наличие стенок) может привести к появлению когерентных структур с хорошо определенным средним потоком. Здесь обсуждается возможность возникновения когерентного вихря вокруг вращающегося диска, погруженного в двумерный турбулентный поток.

В некоторых случаях турбулентность оказывается эффективно двумерной [2, 3]. Уже первые теоретические работы [4–6], посвященные двумерной турбулентности, обнаруживают ее принципиальное отличие от трехмерной. Разница связана с существованием двух квадратичных величин (энергии и энстрофии), сохраняемых двумерным уравнением Эйлера. Это приводит к двум различным каскадам, порождаемым нелинейным взаимодействием: энстрофия переносится от масштаба накачки к меньшим масштабам (прямой каскад), тогда как энергия переносится к более крупным масштабам (обратный каскад). Энстрофия диссипирует из-за вязкости на масштабах, меньших, чем длина накачки, а энергия диссипирует из-за трения о дно на масштабах, превышающих длину накачки.

Статистические свойства флуктуаций скорости в обратном каскаде были исследованы как экспериментально [7], так и численно [8]. Результаты работ находятся в хорошем согласии с аналитической теорией, разработанной для неограниченной системы [9]. В частности, в обратном каскаде [2] наблюдается нормальный Колмогоровский скейлинг. Нормальный скейлинг в обратном каскаде двумерной турбулентности контрастирует с аномальным скейлингом, наблюдаемым в трехмерной турбулентности [10]. Некоторые теоретические аргументы в пользу нормального скейлинга в обратном каскаде были представлены в работе [11], где эта особенность была связана с ведущей ролью сходящихся лагранжевых траекторий в обратном каскаде.

В неограниченной двумерной системе обратный каскад заканчивается на масштабе $L_\alpha$, который определяется балансом между потоком энергии $\epsilon$ (производство энергии на единицу массы) в большие масштабы и потерей на трение $\alpha V^2$, где $\alpha$ – коэффициент трения о дно, а $V$ – характерная скорость на масштабе $L_\alpha$. Используя Колмогоровскую оценку $V \sim (\epsilon L_\alpha)^{1/3}$ для скорости $V$, получаем из этого баланса $L_\alpha = \epsilon^{1/2}\alpha^{-3/2}$. Если размер ячейки $L$ меньше, чем $L_\alpha$, то энергия, переносимая обратным каскадом на масштабы порядка размера ячейки $L$, начинает там накапливаться. Сценарий реализуется, если масштаб накачки $l$ много меньше размера ячейки $L$, $l \ll L$, в противном случае нет места для обратного каскада, переносящего энергию на масштаб $L$.

Накопление энергии на масштабе $L$ приводит к появлению интенсивного крупномасштабного движения, включающего большие когерентные вихри. Тенденция к образованию вихрей была отмечена уже в первых работах, посвященных двумерной турбулентности, как экспериментальных [12], так и численных [13–15]. В численной работе [16], где используют-

[1)]e-mail: ssver@itp.ac.ru

ся периодические граничные условия, было установлено, что благодаря обратному каскаду в квадратной ячейке появляется устойчивая структура, которая представляет собой вихревой диполь. Несколько иная когерентная вихревая структура генерируется в лабораторных экспериментах в квадратной ячейке [17, 18]. С теоретической точки зрения последний случай соответствует нулевым граничным условиям для скорости потока на границах ячейки.

В работе [19] представлены результаты численного моделирования двумерной турбулентности для периодических условий в квадратной ячейке с короткой по времени корреляцией накачки. Профиль средней скорости когерентного вихря оказывается изотропен в некотором диапазоне расстояний от центра вихря. В той же работе был найден интервал расстояний от центра вихря, где реализуется плоский профиль скорости, и были сформулированы некоторые теоретические аргументы в пользу плоского профиля. В работе [20] было показано, что плоский профиль соответствует пассивному (квазилинейному) режиму турбулентных колебаний, а в работе [21] мы рассчитали структурную функцию флуктуаций скорости для этого случая.

Имеется серия работ, посвященных когерентным структурам в двумерных турбулентных потоках в геометрии, отличной от квадратной. В статье [22] в рамках подхода получены аналитические решения для двумерных средних течений, порожденных обратным турбулентным каскадом на сфере и в плоских прямоугольных областях с различными отношениями сторон. В статье [23] численно показано, что для прямоугольного прямоугольника при увеличении соотношения сторон формируется система сосуществующих струй и вихрей. В статье [24] корреляционные функции скорости исследуются как аналитически, так и численно для прямоугольной ячейки. В работе [25] было численно продемонстрировано, что в случае течения, поддерживаемого давлением, появляется струя, скользящая между пристеночными вихрями.

В вышеупомянутых работах использовалась модель коротко коррелированной по времени накачки. В статье [26] показано, что плоский профиль скорости должен наблюдаться в квазилинейном режиме и для статической накачки в квадратной ячейке. Это предсказание проверено в эксперименте [27], где использовалась именно статическая накачка (на основе силы Лоренца). Таким образом, плоский профиль скорости весьма универсален.

В настоящей работе мы обсуждаем возможность формирования когерентного вихря вокруг вращающегося диска, погруженного в двумерный турбулентный поток при больших числах Рейнольдса Re. Такая возможность может быть реализована, если радиус диска $r_0$ намного меньше длины $L_\alpha$. Тогда из-за неоднородности может образоваться некоторая интегральная завихренность вокруг диска, приводящая к появлению когерентного вихря. Такая ситуация может быть легко реализована и исследована экспериментально. Наша задача – теоретически исследовать пространственную структуру когерентного вихря вокруг вращающегося диска.

Предполагается, что профиль средней скорости, возникающий вокруг вращающегося диска, является изотропным, т.е. он может характеризоваться исключительно полярной скоростью $U$ в системе отсчета с началом в центре диска. Чтобы установить профиль скорости когерентного вихря, можно использовать уравнения, полученные в работах [19–21]. Этими уравнениями являются баланс углового момента

$$\alpha U = -(\partial_r + 2/r)\langle uv\rangle, \tag{1}$$

и выражение для угловой компоненты тензора напряжения Рейнольдса

$$\langle uv\rangle = \epsilon/\Sigma, \tag{2}$$

полученное в квазилинейном приближении. В уравнениях (1), (2) $r$ – расстояние до центра вихря, $\epsilon$ – скорость производства энергии на единицу массы (поток энергии), $\alpha$ – коэффициент трения о дно, $u$ и $v$ – азимутальная и радиальная компоненты флуктуирующей части скорости и

$$\Sigma = \partial_r U - U/r = r\partial_r(U/r), \tag{3}$$

есть локальный (зависящий от $r$) коэффициент сдвига среднего течения.

Уравнения (1), (2) описывают стационарный зависящий от $r$ профиль скорости $U$. Уравнения должны быть дополнены граничным условием на радиусе диска, которое фиксирует скорость течения $U$, равную скорости диска на его границе. Уравнения (1), (2) верны, если длина накачки $l$ много меньше $r$ и реализуется квазилинейный режим. Последнее условие подразумевает, что скорость сдвига $\Sigma$ среднего течения должна быть больше, чем характерный градиент скорости флуктуаций на масштабе накачки $l$, который был бы в случае изотропного обратного каскада в неограниченной ячейке:

$$\Sigma \gg \epsilon^{1/3} l^{-2/3}, \tag{4}$$

где мы использовали Колмогоровскую оценку для градиента скорости на длине накачки. Уравнения

(1), (2) справедливы, если $r^2 \gg \nu/\alpha$, где $\nu$ – коэффициент кинематической вязкости.

Легко найти плоский профиль скорости $U = \sqrt{3\epsilon/\alpha}$ как однородное решение уравнений (1), (2). Однако в нашем случае следует рассмотреть профиль с граничным условием $U = U_0$ на радиусе диска $r_0$, где $U_0$ определяется угловой скоростью диска. При этом условии скорость $U$ становится зависимой от $r$. Мы рассматриваем обе возможности: $U_0 > \sqrt{3\epsilon/\alpha}$ и $U_0 < \sqrt{3\epsilon/\alpha}$. Некоторое ограничение снизу на $U_0$ наложено неравенством (4).

Удобно перейти к безразмерным переменным $f, z$, введенным в соответствии со следующими соотношениями

$$U = \sqrt{\epsilon/\alpha}\, f, \quad \Sigma = -\sqrt{\epsilon/\alpha}\, z/r. \tag{5}$$

В терминах безразмерных переменных уравнения (1), (2) переписываются как

$$\partial_\rho f = f - z, \quad \partial_\rho z = -fz^2 + 3z, \tag{6}$$

где $\rho = \ln(r/r_0)$, $\rho > 0$. Уравнения (6) должны решаться с граничным условием $f = f_0 = U_0\sqrt{\alpha/\epsilon}$ при $\rho = 0$.

Очевидно, что существует решение уравнений (6) $z = 0$, $f \propto \exp(\rho) \propto r$, соответствующее твердотельному вращению жидкости. Траектория разделяет области $z > 0$ и $z < 0$. Мы анализируем случай $z > 0$, обратный случай $z < 0$ сводится к предыдущему, поскольку уравнения (6) инвариантны относительно преобразования $f, z \to -f, -z$.

Уравнения (6) являются автономными дифференциальными уравнениями. Поэтому их решения можно представить в виде траекторий на плоскости $f, z$. Приравнивая нулю правые части уравнений (6), мы находим неустойчивую неподвижную точку $f = z = 0$ и седловую точку $f = z = \sqrt{3}$. Именно эта точка соответствует универсальному плоскому профилю скорости. Фазовый портрет системы (6) изображен на рис. 1. Траектории, идущие в седловую точку $f = z = \sqrt{3}$ и идущие из нее, разделяют полуплоскость $z > 0$ на четыре сектора, обозначенные цифрами 1–4 на рис. 1.

Автономность системы уравнений (6) позволяет вывести замкнутое дифференциальное уравнение для $f$ и $z$, которое имеет вид

$$(f - z)\frac{dz}{df} = -fz^2 + 3z. \tag{7}$$

Это уравнение можно использовать для установления геометрических характеристик траекторий на фазовом портрете, представленном на рис. 1.

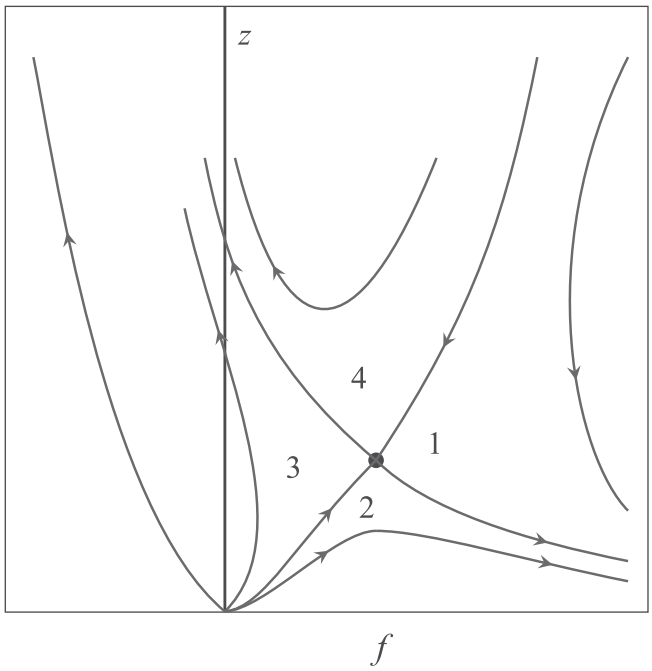


Рис. 1. (Цветной онлайн) Фазовый портрет к системе уравнений (6). Траектории можно найти из уравнения (7). Направление движения вдоль траекторий определяется уравнениями (6)

Траектории, начинающиеся в секторах 1, 2, в конце концов уходят в большие $f$. Их асимптотическое поведение определяется выражением

$$z = \frac{4}{f} - \frac{8}{f^3} + \frac{C}{f^5}, \tag{8}$$

где $C$ – некоторая константа. Как следует из уравнений (6), в этом случае $f \propto r$ с небольшими поправками. Поэтому асимптотическое поведение близко к твердотельному вращению.

Траектории, начинающиеся в секторах 3, 4 (включая область $f < 0$), в конечном итоге уходят в большие $z$ и отрицательные $f$ с большим абсолютным значением. Асимптотически при больших $|f|$,

$$z \propto \exp(f^2/2). \tag{9}$$

Подставляя выражение в уравнение (6) для $f$, мы заключаем, что $|f|$ уходит в бесконечность при конечном $r$. Таким образом, мы сталкиваемся с сингулярностью.

Оба приведенных выше случая, твердотельное вращение и сингулярность в решении, нас не устраивают, поскольку нас интересуют решения, переходящие в универсальный плоский режим при больших $r$. Поэтому мы должны рассмотреть траектории, идущие к седловой точке. В этом случае и $f$, и $z$ стремят-

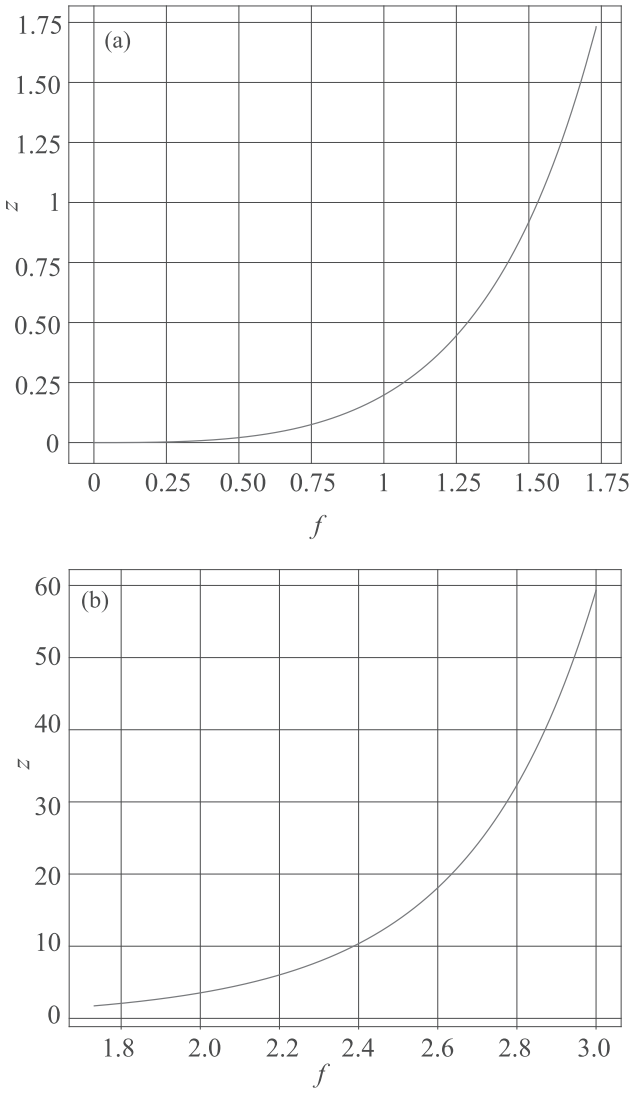


Рис. 2. (Цветной онлайн) Зависимость $z$ от $f$ для решений, стремящихся к универсальному плоскому профилю скорости $f = z = \sqrt{3}$ на больших расстояниях $r$. (a) – график соответствует случаю $z < \sqrt{3}$; (b) – случаю $z > \sqrt{3}$

ся к значению $\sqrt{3}$, соответствующему плоскому профилю скорости. Начальная точка траектории определяется начальным условием $f_0$. Если $f_0 < \sqrt{3}$, то решение определяется траекторией, ведущей в седловую точку снизу, а если $f_0 > \sqrt{3}$, то решение определяется траекторией, идущей в седловую точку сверху, смотри рис. 1. Траектории можно найти численно путем решения уравнения (7). Результаты представлены на рис. 2, где представлены случаи $z < \sqrt{3}$ и $z > \sqrt{3}$.

В пределе $f_0 \ll 1$ величина $f$ мала при малых $\rho = 0$, величина $z$ также мала здесь. Поэтому мы получаем из уравнения (7) уравнение $(f - z)dz/df = 3z$,

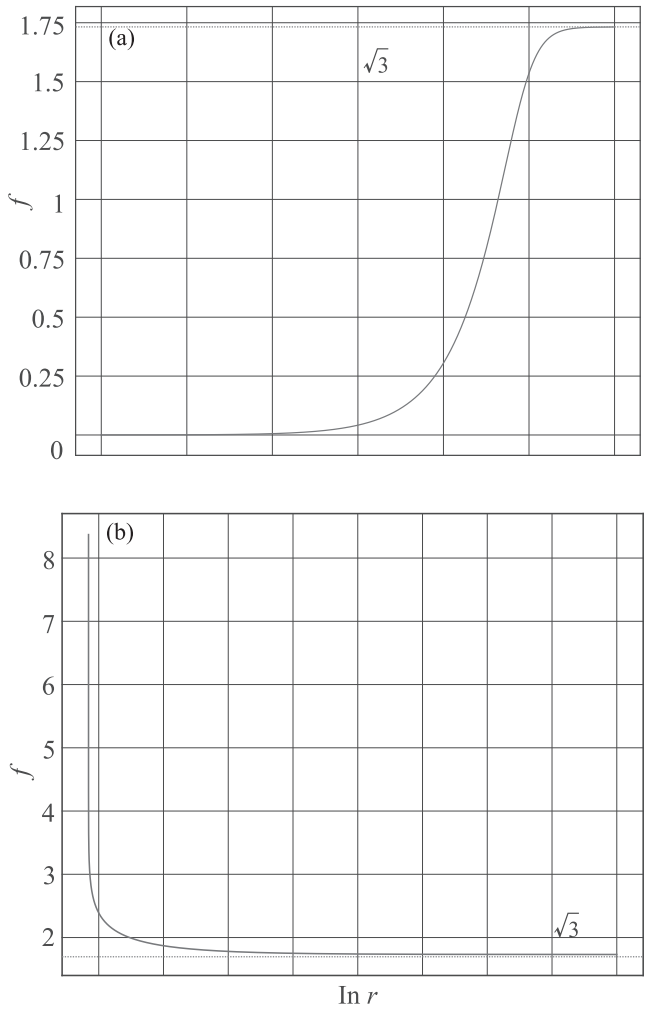


Рис. 3. (Цветной онлайн) Безразмерная полярная скорость $f$ как функция $\ln r$. (a) – График соответствует $f_0 < \sqrt{3}$; (b) – график соответствует $f_0 > \sqrt{3}$

что приводит к заключению, что $z = c_1 f^3$. Численное решение позволяет извлечь коэффициент пропорциональности, равный $c_1 = 0.166$. Используя закон $z \sim f^3$ и условие применимости (4), можно найти неравенство

$$U_0 \gg \epsilon^{4/9} \alpha^{-1/3} r_0^{1/3} l^{-2/9}, \tag{10}$$

которое должно выполняться для правильности нашего подхода.

В пределе $f_0 \gg 1$ величина $f$ велика при малых $\rho$, и выполняется условие $z \gg f$. Поэтому мы получаем из уравнения (7) $dz/df = fz$, что приводит к $z = c_2 \exp(f^2/2)$. Коэффициент здесь можно извлечь из численного решения, он составляет $c_2 = 0,672$. Из решения $z = c_2 \exp(f^2/2)$ мы видим, что, в самом деле, $z \gg f$ при $f \gg 1$.

Возвращаясь к уравнениям (6), мы можем численно найти зависимости $f$ и $z$ от $\rho$. Зависимость $f$ от $\rho$ показана на рис. 3 для случаев $f < \sqrt{3}$ и $f > \sqrt{3}$. Положение точки, где $\rho = 0$ ($r = r_0$), зависит от начального значения $f_0$. В пределе $f \ll 1$ величина $z = c_1 f^3$ пренебрежимо мала, и из уравнений (6) мы находим, что $f \propto \exp(\rho) \propto r$ и $z \propto \exp(3\rho) \propto r^3$.

В пределе $f \gg 1$ величина $z = c_2 \exp(f^2/2) \gg f$, и мы находим из уравнений (6) $\partial_\rho f = -c_2 \exp(f^2/2)$. Поэтому мы находим, что

$$c_2 \rho = \int_f^{f_0} dx \, \exp(-x^2/2). \tag{11}$$

Интеграл здесь можно записать как разницу между значениями функции ошибок. Поскольку интеграл в правой части уравнения (11) сходится при $f_0 \to \infty$, мы заключаем, что при большом $f_0$ существует пограничный слой шириной 1 (порядка $r_0$ в терминах расстояний), где $f$ переходит в значение порядка единицы.

Таким образом, мы показали, что в двумерной турбулентности вокруг вращающегося диска образуется когерентный вихрь. Мы проанализировали случай, когда на больших расстояниях значение средней полярной скорости $U$ стремится к универсальной постоянной $\sqrt{3\epsilon/\alpha}$, найденной в работах [19–21]. На границе диска средняя полярная скорость $U_0$ может быть больше или меньше, чем $\sqrt{3\epsilon/\alpha}$. Однако есть условие применимости (10) нашего подхода. Такая установка может быть реализована экспериментально в ячейке с тонким жидким слоем, где турбулентность возбуждается внешним воздействием.

Работа выполнена при поддержке гранта Министерства науки и высшего образования РФ # 075-15-2019-1893 (С. С. Вергелес и В. В. Лебедев), гранта фонда развития теоретической физики и математики “БАЗИС” # 19-1-2-46-1 (С. С. Вергелес) и Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (в рамках госзадания) (И. В. Колоколов).

1. A. S. Monin and A. M. Yaglom, *Statistical Fluid Mechanics*, MIT Press, Cambridge, MA (1971), v. 1; Dover publications, Mineola (2007), v. 2.
2. G. Boffetta and R. E. Ecke, Annu. Rev. Fluid Mech. **44**, 427 (2012).
3. *Focus Issue: Two-Dimensional Turbulence*, ed. by G. Boffetta, G. Falkovich, and M. Shats, Physics of Fluids **29**(11) (2017).
4. R. H. Kraichnan, Phys. Fluids **10**, 1417 (1967).
5. C. E. Leith, Phys. Fluids **11**, 671 (1968).
6. G. K. Batchelor, Phys. Fluids **12**, 233 (1969).
7. P. Tabeling, Phys. Rep. **362**, 1 (2002).
8. G. Boffetta, A. Celani, and M. Vergassola, Phys. Rev. E **61**, R29 (2000).
9. R. H. Kraichnan and D. Montgomery, Rep. Prog. Phys. **43**, 547 (1980).
10. U. Frisch, *Turbulence: The Legacy of A. N. Kolmogorov*, Cambridge University Press, Cambridge (1995).
11. G. Falkovich, J. Phys. A: Math. Theor. **42**, 123001 (2009).
12. J. Sommeria, J. Fluid Mech. **170**, 139 (1986).
13. L. M. Smith and V. Yakhot, Phys. Rev. Lett. **71**, 352 (1993).
14. L. M. Smith and V. Yakhot, J. Fluid Mech. **274**, 115 (1994).
15. V. Borue, Phys. Rev. Lett. **72**, 1475 (1994).
16. M. Chertkov, C. Connaughton, I. Kolokolov, and V. Lebedev, Phys. Rev. Lett. **99**, 084501 (2007).
17. H. Xia, M. Shats, and G. Falkovich, Phys. Fluids **21**, 125101 (2009).
18. N. Francois, Y. Xia, H. Punzmann, S. Ramsden, and M. Shats, Phys. Rev. X **4**, 021021 (2014).
19. J. Laurie, G. Boffetta, G. Falkovich, I. Kolokolov, and V. Lebedev, Phys. Rev. Lett. **113**, 254593 (2014).
20. I. V. Kolokolov and V V. Lebedev, Phys. Rev. E **93**, 033104 (2016).
21. I. V. Kolokolov and V. V. Lebedev, J. Fluid Mech. **809**, R2-1 (2016).
22. G. Falkovich, Proc. R. Soc. A **472**, 20160287 (2016).
23. A. Frishman, J. Laurie, and G. Falkovich, Phys. Rev. Fluids **2**, 032602 (2017).
24. A. Frishman and C. Herbert, Phys. Rev. Lett. **120**, 204505 (2018).
25. G. Falkovich and N. Vladimirova, Phys. Rev. Letters **121**, 164501 (2018).
26. I. V. Kolokolov and V. V. Lebedev, Pis’ma v ZhETF **106**, 633 (2017) [JETP Lett. **106**, 659 (2017)].
27. A. V. Orlov, M. Yu. Brazhnikov, and A. A. Levchenko, Pis’ma v ZhETF **107**, 166 (2018) [JETP Lett. **107**, 157 (2018)].