Письма в ЖЭТФ, том 111, вып. 9, с. 591 – 596 © 2020 г. 10 мая

Разности инвариантов узлов-мутантов и их дифференциальное разложение

Л. Бишлер[+∗× 1)], *Сасвати Дхара*[◦ 1),2)], *Т. Григорьев*[∇ 1)], *А. Миронов*[+∗× 1)], *А. Морозов*[∗×∇ 1)], *Ан. Морозов*[∗×∇ 1)], *П. Рамадеви*[◦ 1),2)], *Вивек Кумар Сингх*[◦ 1),2)], *А. Слепцов*[∗×∇ 1)]

[+]*Физический институт им. П. Н. Лебедева, 119991 Москва, Россия*

[∗]*Институт теоретической и экспериментальной физики, 117218 Москва, Россия*

[×]*Институт проблем передачи информации, 127994 Москва, Россия*

[◦]*Физический факультет, Индийский Институт Технологии Бомбея, 400076 Мумбаи, Индия*

[∇]*Московский физико-технический институт, 141701 Долгопрудный, Россия*

Поступила в редакцию 8 апреля 2020 г.
После переработки 8 апреля 2020 г.
Принята к публикации 8 апреля 2020 г.

Мы вычисляем разности инвариантов ХОМФЛИ-ПТ для пар узлов-мутантов, раскрашенных представлениями $SL(N)$, достаточно большими для того, чтобы различить эти узлы. Эти пары мутантов включают в себя мутанты-претцели, для различения которых минимально необходимо представление, описываемое диаграммой Юнга [4, 2]. Мы обсуждаем дифференциальное разложение для разностей, оказывающееся нетривиальным для мутантов с ненулевыми дефектами. Наиболее эффективным техническим методом в этом случае является стандартный подход Решетихина–Тураева.

DOI: 10.31857/S1234567820090037

1. Введение. Различать разные узлы – одна из основных целей теории узлов. Наиболее удобным и универсальным способом делать это является вычисление и сравнение их полиномиальных инвариантов. Достаточно сильный инвариант, который при этом можно явно вычислить, – полиномы ХОМФЛИ-ПТ [1, 2], которые (при правильной нормировке) являются полиномами от двух переменных q и A. С физической точки зрения, они являются наблюдаемыми (средними значениями петель Вильсона) в трехмерной теории Черна–Саймонса. При подстановке $A = q^N$ эти полиномы описывают наблюдаемые (средние значения петель Вильсона) в теории Черна–Саймонса с калибровочной группой $SU(N)$ или $SL(N)$ и $q := \exp\left(\frac{2\pi i}{\kappa+N}\right)$, где κ – константа связи [3]. Эти полиномы также зависят от представления R калибровочной группы, бегущего вдоль вильсоновской линии.

Сложнее всего различить узлы из семейства узлов-мутантов. Их можно получать друг из друга с помощью специальных преобразований – мутаций (см. раздел 2). Полиномы этих узлов совпадают во всех симметрических и даже прямоугольных представлениях R [4, 5] (на самом деле это такие представления, разложение квадратов которых не содержит нетривиальных кратностей [6, 7]). Таким образом, для того чтобы различить эти узлы, необходимо изучать смешанные представления. Самое простое из них – представление $R = [2, 1]$, и оно действительно позволяет различить некоторые узлы-мутанты [6, 7]. Однако, как показал Х. Мортон [8] (см. также [7]), существуют мутанты, которые обладают еще большей степенью симметрии. Эти мутанты не различаются представлением $R = [2, 1]$, необходимо хотя бы представление $R = [4, 2]$. Изучение полиномов этих узлов и разностей между ними – сложная задача, которая интересна как с точки зрения теории узлов, так и с точки зрения теории представлений. На данный момент пары мутантов, которые не различаются представлением $R = [4, 2]$, не найдены.

Наиболее эффективным методом вычисления полиномов ХОМФЛИ-ПТ является подход Решетихина–Тураева (РТ), который впервые был предложен в [9–11] и основывается на использовании $\mathcal{R}$-матриц квантовой группы $U_q(SL(N))$. Его

[1)] mila-bishler@mail.ru; saswati123@phy.iitb.ac.in; grigorev.ta@phystech.edu; mironov@lpi.ru; morozov@itep.ru; andrey.morozov@itep.ru; ramadevi@phy.iitb.ac.in; vivek.singh@fuw.edu.pl; sleptsov@itep.ru

[2)] Saswati Dhara, P. Ramadevi, Vivek Kumar Singh.

современная форма, которую иногда называют современным методом РТ, использует для $\mathcal{R}$-матриц особый базис, который не зависит от N. Этот метод был развит в ряде статей [12–20], применялся для вычисления полиномов большого количества узлов и зацеплений, и оказался технически гораздо более сильным в большинстве случаев. Однако, как мы подчеркиваем в настоящем письме, для некоторых задач РТ-метод в первоначальной формулировке оказывается более прямолинейным и быстрым, хотя и не всегда позволяет получить полиномы, зависящие от переменных q, A. Причина этого в том, что для применения современной РТ-техники необходимо знание матриц Рака, которые очень сложно найти в рассматриваемых случаях. Мы опишем эти подходы более подробно в разделе 3.

Мы использовали РТ-метод для вычисления разностей между полиномами узлов-мутантов в представлениях $R = [3,1]$ и $R = [4,2]$ при некоторых значениях N. Для $[3,1]$ нам удалось проделать вычисления вплоть до $N = 7$. Это позволило найти общие ответы для произвольного N в этих случаях и, таким образом, вычислить соответствующие полиномы ХОМФЛИ-ПТ. Для представления $R = [4,2]$ нам удалось вычислить разности только для $N = 3,\ 4$. Мы изучили свойства этих разностей (см. раздел 4) и их дифференциальных разложений.

Дифференциальное разложение [16, 21–27], которое является сравнительно новым и сильным инструментом в теории узлов, часто позволяет угадать ответы для полиномов узлов, изучить их различные свойства и дает много новых идей. Оно достаточно просто устроено для узлов с нулевым дефектом [23] и становится менее тривиальным в других случаях. К сожалению, узлы-мутанты обычно имеют ненулевой дефект. Результаты, полученные нами, показывают, что дифференциальное разложение узлов-мутантов имеет достаточно интересные свойства, мы обсуждаем их в разделе 5.

2. Узлы-мутанты. В первую очередь давайте обсудим, что такое узлы-мутанты. Узлы-мутанты – это семейства узлов, которые связаны друг с другом специальной операцией – мутацией (см. рис. 1). Для проведения мутации необходимо вырезать часть узла с двумя входящими и двумя исходящими линиями внутри 3-сферы. Такую вырезанную часть узла, которую технически называют 2-танглом, поворачивают на 180 градусов и вклеивают обратно. Получившийся узел называют мутантом исходного узла.

Очевидно, что, для того чтобы эти узлы были различны, и часть узла внутри 3-сферы, и внешняя часть узла должны быть нетривиальными. По

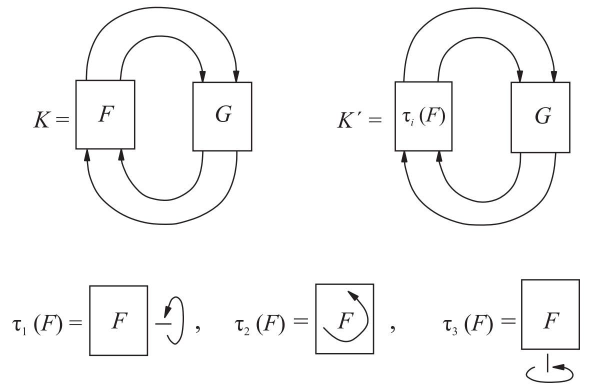

Рис. 1. Процедура мутации

этой причине узлы-мутанты являются узлами с большим числом пересечений. Простейшие пары узлов-мутантов имеют, по крайней мере, 11 пересечений, одна из этих пар состоит из известных узлов Конвея и Киношиты–Терасаки. Однако в случае узлов с 11 пересечениями узлы-мутанты появляются только парами. Мы считаем, что существует большое число операций мутации, порождающих семейства узлов-мутантов с количеством пересечений больше 11, но они выходят за рамки нашего обсуждения.

Существует семейство узлов, которые называют узлами-претцелями, изображенное на рис. 2, и кото-

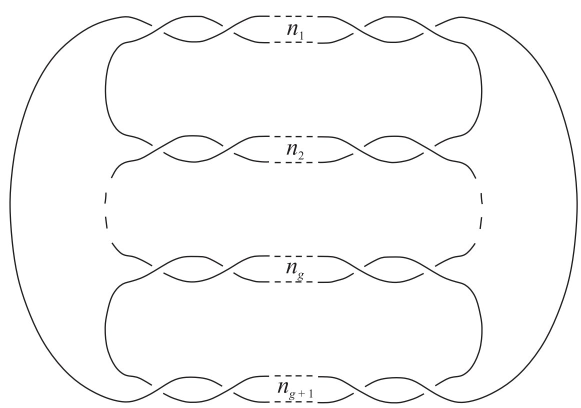

Рис. 2. Узлы-претцели $K(n_1, n_2, \ldots, n_g, n_{g+1})$

рые включают в себя много новых мутантов, полученных с помощью мутаций 2-танглов. Они являются обобщением торических узлов, о которых многое известно. Узлы-претцели можно поместить на поверхность рода g. Однако, в отличие от торических узлов, на одну ручку можно поместить только две нити, см. рис. 2. Узлы-претцели параметризуют числом пересечений на каждой ручке.

Легко увидеть, что перестановка чисел между ручками в точности отвечает мутации. Таким образом, начиная с рода 4, появляются пары мутантов. Для двух и трех ручек мутация дает в точности тот же узел, однако для старших родов существуют более широкие наборы мутантов. Заметим, что среди этих претцелевых пар мутантов некоторые принадлежат классу мутантов, обладающих более высокой симметрией и различимых только представлением $R = [4, 2]$ (см. рис. 3 и [7]).

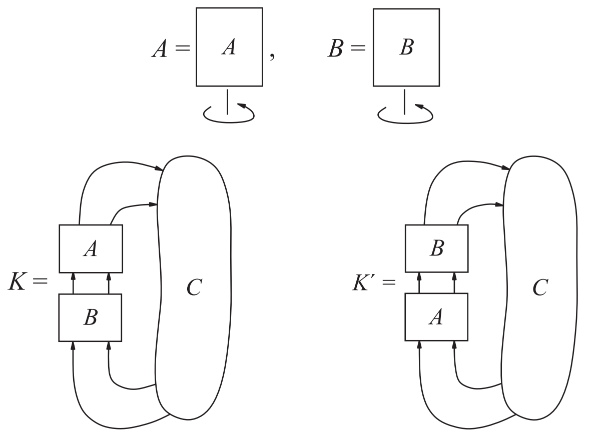

Рис. 3. Узлы-мутанты с большей степенью симметрии из [8]

3. $\mathcal{R}$-матричный РТ-подход. Подход Решетихина–Тураева (РТ) возникает естественным образом, если средние значения петель Вильсона [3] вычисляются во временной калибровке [24, 25]. Тогда каждое пересечение на диаграмме узла (проекции узла на двумерную плоскость) связано с $\mathcal{R}$-матрицей. Можно начать с универсальной квантовой $\mathcal{R}$-матрицы для $U_q(SL(N))$ и вычислить $U_q(SL(N))$-матрицу в конкретных представлениях с помощью генераторов квантованной универсальной обертывающей алгебры:

$$\mathcal{R} = \mathcal{P} q^{\sum_{i,j} a^{-1}_{i,j} h_i \otimes h_j} \overrightarrow{\prod_{\beta\in\Phi^+}} \exp_q\left((q-q^{-1})E_\beta \otimes F_\beta\right), \tag{1}$$

где E_β, F_β и h_β являются генераторами квантованной универсальной обертывающей алгебры:

$$\begin{aligned} &[h_i, E_j] = a_{ij}E_j, && [h_i, h_j] = 0, \\ &[h_i, F_j] = -a_{ij}F_j, && [E_i, F_j] = \delta_{ij}\frac{q^{h_i} - q^{-h_i}}{q - q^{-1}}. \end{aligned} \tag{2}$$

Свертка $\mathcal{R}$-матриц в пересечениях на диаграмме узла по линиям между пересечениями и последующее вычисление взвешенного следа [9] позволяет получить полином ХОМФЛИ-ПТ. В отличие от первоначального определения полиномов через скейн-соотношения [1] этот подход одинаково хорошо работает для любого представления R. Однако при использовании универсальной $\mathcal{R}$-матрицы вычисления необходимо делать отдельно для каждого N.

Более продвинутый современный РТ-метод [14, 15] использует $\mathcal{R}$-матрицы в базисе сплетающих операторов. Когда $\mathcal{R}$-матрица действует на тензорное произведение двух представлений V_1 и V_2, можно рассмотреть разложение произведения по неприводимым представлениям $V_1 \otimes V_2 = \oplus_Q \mathcal{M}^Q_{V_1V_2} \cdot Q$. Так как $\mathcal{R}$-матрица коммутирует с копроизведением [28], на неприводимые представления она действует умножением на число $\pm q^{C_2(Q)}$ [29], где $C_2(Q)$ – это собственное значение второго оператора Казимира в представлении Q.

Давайте рассмотрим $\mathcal{R}$-матрицу в базисе неприводимых представлений, или, лучше сказать, в пространстве сплетающих операторов и представим узел как замыкание n-нитевой косы. Тогда ответ для полинома ХОМФЛИ-ПТ $\mathcal{H}^{\mathcal{K}}_V(A, q)$ узла $\mathcal{K}$, раскрашенного представлением V, разделяется на две части: одна зависит от группы, другая зависит от узла [14, 15]:

$$\mathcal{H}^{\mathcal{K}}_V(A, q) = \sum_{Q\in V^{\otimes n}} S^*_Q(A, q) B^{\mathcal{K}}_Q(q). \tag{3}$$

С этого момента мы ассоциируем с представлением Q соответствующую ему диаграмму Юнга. S^*_Q – это квантовая размерность представления Q квантовой группы $U_q(SL(N))$. Квантовая размерность равна полиному Шура S_Q в некоторой специальной точке [30, разд. 7.1.6]. Она не зависит от узла, и зависит от N через переменную $A = q^N$. С другой стороны, $B^{\mathcal{K}}_Q$ вычисляется для конкретного узла как след произведения $\mathcal{R}$-матриц и не зависит от A или N. Важно, что оба этих фактора зависят только от диаграммы Юнга Q, а вся зависимость от A скрыта в фиксированных полиномах от A – квантовых размерностях. Это означает, что современный РТ-подход позволяет вычислить полиномы ХОМФЛИ-ПТ для всех N сразу, в отличие от стандартного РТ-подхода, который мы используем в данной работе.

Тем не менее, у современного РТ-подхода имеются большие трудности. Во-первых, необходимо использовать представление узла в виде косы, которое, в случае мутантов, содержит большое число нитей. Во-вторых, несмотря на то, что $\mathcal{R}$-матрицы в пространстве сплетающих операторов устроены просто, их необходимо дополнительно вращать при переходе к другим парам нитей в косе [14, 15]. Это вращение производится матрицами Рака, вычисление которых является очень непростой задачей, особенно в случаях больших представлений [31, 32] и большого числа нитей в косе [14], которыми мы здесь интересуемся.

В вычислениях, о которых идет речь в этой работе, мы не использовали базис неприводимых представлений для $\mathcal{R}$-матриц и изучали полиномы узлов и их разности для конкретных значений N, которые в некоторых случаях удалось продолжить на произвольные N.

4. Разности полиномов узлов-мутантов. В [6, 7, 20] мы использовали современный РТ-подход для вычисления разностей инвариантов для узлов-мутантов с 11 пересечениями. Мы установили, что эти разности очень хорошо факторизуются. Они равны

$$\Delta H^{\rm mutant}_{[2,1]} = A^{\gamma} \cdot f(A,q) \cdot {\rm Mt}_{[2,1]}(q), \tag{4}$$

где γ – целое число, ${\rm Mt}_{[2,1]}(q)$ – функция, зависящая только от q, и

$$f(A,q) := \{q\}^4 \cdot [3]^2 D_3^2 D_2 D_0 D_{-2} D_{-3}^2, \tag{5}$$

где [...] обозначает q-число, $\{q\} := q - q^{-1}$, и факторы

$$D_k := Aq^k - A^{-1}q^{-k} \tag{6}$$

называются дифференциалами. Отметим, что H в ур. (4) обозначает нормированные полиномы ХОМФТИ-ПТ, при этом полные полиномы (средние Вильсона) обозначаются $\mathcal{H}$ в (3).

В данной работе, используя подход, описанный в предыдущем разделе и основанный на $\mathcal{R}$-матрицах при конкретных N, мы вычислили разности между полиномами узлов-мутантов в представлениях $[3,1]$ и $[4,2]$. Ответы получились достаточно громоздки, их можно найти как в более детальной публикации [33], так и на специальном интернет-ресурсе [34].

Для представления $[3,1]$ нам сначала удалось вычислить разности для нескольких значений N. Это позволило построить полные ответы для произвольного N и, таким образом, получить полиномы ХОМФЛИ-ПТ, раскрашенные представлением $[3,1]$. Эти разности, однако, не факторизуются так же полно, как в случае представления $[2,1]$. Тем не менее в них выделяется структура дифференциалов:

$$\Delta H^{\rm mutant}_{[3,1]} = \{q\}^4 \cdot [4]^2 [2] D_4 D_3 D_0 D_{-2} \cdot {\rm Mt}_{[3,1]}(A,q). \tag{7}$$

Когда дифференциалы D_{-i} появляются в качестве множителя, это значит, что разность инвариантов равна нулю для группы $U_q(SL(i))$. Таким образом, мы видим, что разности между полиномами узлов-мутантов для представления $[2,1]$ обращаются в нуль для групп $U_q(SL(2))$ и $U_q(SL(3))$, и для представления $[3,1]$ для группы $U_q(SL(2))$. Эти результаты очевидны для группы $U_q(SL(2))$, так как разности исчезают для любых симметрических представлений, как было упомянуто во Введении. Это менее тривиально для $U_q(SL(3))$ (см. [4]). Дифференциалы D_i с положительными i имеют тот же смысл для транспонированного представления R. Представление $R = [2,1]$ не меняется при этом преобразовании, а представление $R = [3,1]$ преобразуется в $R = [2,1,1]$. Таким образом, мы заключаем, что разность для $R = [2,1,1]$ исчезает для группы $U_q(SL(4))$.

Для представления $[4,2]$ нам не удалось сконструировать ответ для произвольного N. Однако у нас получилось вычислить ответы для мутантов-претцелей для групп $U_q(SL(3))$ и $U_q(SL(4))$.

5. Дифференциальное разложение. Цветные полиномы ХОМФЛИ-ПТ обладают дополнительной структурой, которую называют дифференциальным разложением (ДР) [16, 21–27]. Она связана с теорией представлений [16, 17]. Простейший пример ДР появляется уже в фундаментальном представлении: так как для абелевой $U(1)$ теории Черна–Саймонса, т.е. для $A = q$, нормированные полиномы ХОМФЛИ-ПТ в топологическом фрейминге тривиальны, мы получаем

$$H_{[1]}(A,q) = 1 + D_1 D_{-1} \cdot F_{[1]}(A,q) \tag{8}$$

с новым, более простым полиномом Лорана $F_{[1]}(A,q)$. Если продолжить эти рассуждения и обратить внимание на другие N, можно получить общую структуру разложения цветных полиномов по произведениям независимых от узла комбинаций Z_R^Q различных дифференциалов D_k:

$$H_R^K(A,q) = \sum_{Q \in M_R} Z_R^Q(A,q) \cdot F_Q^K(A,q). \tag{9}$$

Важным параметром дифференциального разложения является дефект δ_K узла K. Он определяется как степень полинома Александера, то есть специализации фундаментального полинома ХОМФТИ-ПТ в точке $A = 1$:

$$H_{[1]}^K(A,q)\Big|_{A=1} = \sum_{j=-\delta_K-1}^{\delta_k+1} a_j q^{2j}. \tag{10}$$

Дифференциальное разложение наиболее сложно устроено в случае ненулевого дефекта, к которому относятся узлы-мутанты. Об общей теории дифференциального разложения пойдет речь в других работах, здесь же мы только обсудим конкретную проблему, возникающую для пар узлов-мутантов.

Рассмотрим разность дифференциальных разложений для полиномов ХОМФЛИ-ПТ пары узлов-мутантов. Мы обозначим эту разность через Δ. Можно предположить, что вклад в нее вносят только недиагональные композитные представления, такие как $X_2 := ([2],[1,1]) \oplus ([1,1],[2])$ и $X_3 := ([3],[2,1]) \oplus ([2,1],[3])$. Мы, однако, допускаем также дополнительное преобразование некоторых ДР-коэффициентов, которое остается ненаблюдаемым в лидирующем порядке, но может внести вклад в старшие представления, это преобразование мы обозначим δ. В первом смешанном представлении из [7, ур. (106)] и [27, ур. (14)–(17)] можно получить выражение, зависящее от двух неизвестных функций вида

$$\Delta H_{[2,1]} =$$

$$= \frac{[3]}{[2]^2}\Big(\underbrace{D_0^2}_{\times 0} + \underbrace{[3]D_2D_{-2}}_{\times\{q\}^4[2]^2\cdot\delta F_{[1]}}\Big) \oplus \underbrace{\{q\}^4[3]^2D_2D_{-2}}_{\times(\Delta F_{X_2}-\delta F_{[1]})} =$$

$$= \{q\}^4\cdot[3]^2D_3^2D_2D_0D_{-2}D_{-3}^2\cdot \mathrm{Mt}_{[2,1]}. \qquad (11)$$

Величина δF_1 обозначает возможное перераспределение коэффициентов между разными членами дифференциального разложения для двух мутантов, которое при этом не влияет на правую часть выражения, однако может проявить себя в разности между мутантами в старших представлениях. Естественно предположить, что она равна нулю, однако мы оставляем эту возможность открытой.

Аналогично, для следующего смешанного представления

$$\Delta H_{[3,1]} = \frac{[4]}{[3]}\Big(\underbrace{D_1D_0}_{0} + \underbrace{\frac{[4]}{[2]}D_3D_{-2}}_{\times[2]^2\{q\}^4\cdot\delta F_{[1]}}\Big) \oplus \underbrace{\{q\}^4[4]^2[2]D_3D_{-2}}_{\times(\Delta F_{X_2}-\delta F_{[1]})} +$$

$$+\frac{[4]}{[3]^2}\Big(\underbrace{D_3D_1^{\overline{2}}D_0}_{\times 0} + \underbrace{[4][2]D_4D_3\overline{D_0}D_{-2}}_{\times\{q\}^4[3]^2\cdot\delta F_{[2]}}\Big) \oplus \underbrace{\{q\}^4[4]^2[2]D_4D_3\overline{D_0}D_{-2}}_{\times(\Delta F_{X_3}-\delta F_{[2]})}$$

$$= \{q\}^4\cdot[4]^2[2]D_4D_3D_0D_{-2}\cdot \mathrm{Mt}_{[3,1]}. \qquad (12)$$

Теперь мы сталкиваемся со следующей проблемой: все члены в последней строке делятся на D_4, кроме $\Delta F_{X_2} \neq 0$.

Существует по крайней мере два возможных выхода из этой ситуации. Первая возможность заключается в том, чтобы допустить $\delta F_{[1]} \neq 0$. Например, пусть

$$\Delta F_{X_2} = D_3^2D_0D_{-3}^2\cdot \mathrm{Mt}_{[2,1]}\delta F_{[1]} = D_3D_2D_1D_{-3}^2\cdot \mathrm{Mt}_{[2,1]}$$

так, что $\Delta F_{X_2} - \delta F_{[1]} = -[2]\{q\}^2D_3D_{-3}^2\cdot \mathrm{Mt}_{[2,1]}$. Тогда мы получим:

$$\{q\}^4[4]^2[2]D_2D_{-2}\Big(\Delta F_{X_2} - \underbrace{\Big(1-\frac{1}{[3]}\Big)}_{\frac{[4]}{[3][2]}}\delta F_{[1]}\Big) =$$

$$=\{q\}^4[4]^2[2]D_2D_{-2}D_3D_{-3}^2\underbrace{\Big(D_3D_0 - \frac{[4]}{[3][2]}D_2D_1\Big)}_{\frac{D_4D_{-1}}{[3]}}\cdot \mathrm{Mt}_{[2,1]},$$

которое делится на D_4. Однако теперь возникает новая потенциальная проблема: мы получаем D_4D_{-1}, а не D_4D_0, однако D_0 с чертой может отсутствовать в дифференциальном разложении для ненулевого дефекта. В любом случае, еще большое количество других факторов должно сойтись...

Другая возможность заключается в том, чтобы обратить внимание на $F_{[3,1]}$, который не участвовал в вышеизложенном вычислении разностей и может отличаться для разных мутантов. В случае $H_{[2,1]}$ у нас получалось $\Delta F_{[2,1]} = 0$, потому что эта разность также входит в выражение для разности в прямоугольном представлении $H_{[2,2]}$, которая *не* различает мутантов, т.е. $\Delta H_{[2,2]} = 0$. Однако $H_{[3,3]}$ содержит вклады от *двух* непрямоугольных структур, таким образом, $F_{[3,1]}$ и $F_{[3,2]}$ могут быть ненулевыми и компенсировать друг друга в нулевой разности в прямоугольном представлении $\Delta H_{[3,3]}$.

6. Заключение. Это письмо является кратким изложением наших результатов для полиномов ХОМФЛИ-ПТ узлов-мутантов. Эти полиномы и особенно разности между ними представляют большой интерес со многих точек зрения. Нам удалось сконструировать разности между полиномами в представлении $R = [3,1]$ для всех узлов-мутантов с 11 пересечениями. Они оказались менее структурированными, чем ответы в случае представления $[2,1]$, тем не менее зависимость от представления в них достаточно нетривиальная. Мы также изучили дифференциальное разложение этих разностей, связаное со свойствами представлений, для которых они вычислены. В частности, мы нашли тонкое место в дифференциальном разложении мутантов, которое требует дальнейшего изучения в случае узлов с ненулевыми дефектами. Осталось неизученым, что происходит для старших представлений.

Мы также вычислили разности между полиномами узлов-мутантов в представлении $[4,2]$, но только для групп $U_q(SL(3))$ и $U_q(SL(4))$, что недостаточно для того, чтобы найти общий ответ, однако позволило нам различить узлы-мутанты. Для того чтобы найти полные инварианты ХОМФЛИ-ПТ, необходимо либо применить другие подходы, либо серьезно оптимизировать компьютерные программы.

Наша работа была частично поддержана грантом Фонда развития теоретической физики и математики “БАЗИС” (Л. Бишлер, А. Миронов, А. Морозов, Ан. Морозов, А. Слепцов), грантом президента Российской Федерации МК-2038.2019 (Л. Бишлер, Ан. Морозов), грантами РФФИ 19-01-00680 (А. Миронов), 19-02-00815 (А. Морозов), 20-01-00644 (Ан. Морозов, А. Слепцов), 18-31-20046-мол-а-вед (А. Слепцов), совместными грантами 19-51-50008-ЯФ-а (Л. Бишлер, А. Миронов, Ан. Морозов), 19-51-53014-ГФЕН-а, 18-51-05015-Арм-а, 18-51-45010-ИНД-а (Л. Бишлер, А. Миронов, А. Морозов, Ан. Морозов, А. Слепцов), П. Рамадеви, Вивек Кумар Сингх и Сасвати Дхара благодарят грант ДНТ-РФФИ (INT/RUS/RFBR/P-231) за поддержку. Работа также частично финансировалась РФФИ и ННФБ в соответствии с исследовательским проектом 19-51-18006 (А. Миронов, А. Морозов, Ан. Морозов). Вивек Кумар Сингх хотел бы поблагодарить Индийский Институт Научного Образования и Исследования, Пуна (Индия), где он частично занимался данной работой во время своего визита в качестве приглашенного исследователя. А. Миронов, А. Морозов и П. Рамадеви признательны Институту теоретической физики им. Кавли за гостеприимство и Национальному научному фонду за частичную поддержку по гранту NSF PHY1748958.

---

1. P. Freyd, D. Yetter, J. Hoste, W. B. R. Lickorish, K. Millett, and A. Ocneanu, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **12**(2), 239 (1985).
2. J. H. Przytycki and P. Traczyk, J. Knot Theor. **4**, 115 (1987); arXiv:1610.06679.
3. E. Witten, Commun. Math. Phys. **121**, 351 (1989).
4. H. R. Morton and H. J. Ryder, Geom. Topol. Monogr. **1**, 365 (1998); arXiv:math/9810197.
5. H. R. Morton and P. R. Cromwell, J. Knot Theory Ramif. **5**, 225 (1996).
6. S. Nawata, P. Ramadevi, and Vivek Kumar Singh, J. Knot Theory Ramif. **26**(14), 1750096 (2017); arXiv:1504.00364.
7. A. Mironov, A. Morozov, An. Morozov, P. Ramadevi, and Vivek Kumar Singh, JHEP **1507**, 109 (2015); arXiv:1504.00371.
8. H. R. Morton, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **146**, 95 (2009); arXiv:0705.1321.
9. V. G. Turaev, Invent. Math. **92**, 527 (1988).
10. N. Yu. Reshetikhin and V. G. Turaev, Commun. Math. Phys. **127**, 1 (1990).
11. N. Reshetikhin and V. G. Turaev, Invent. Math. **103**, 547 (1991).
12. P. Ramadevi, T. R. Govindarajan, and R. K. Kaul, Mod. Phys. Lett. A **9**, 3205 (1994); hep-th/9401095.
13. S. Nawata, P. Ramadevi, and Zodinmawia, J. Knot Theory Ramif. **22**, 13 (2013); arXiv:1302.5144.
14. A. Mironov, A. Morozov, and An. Morozov, JHEP **03**, 034 (2012); arXiv:1112.2654.
15. A. Mironov, A. Morozov, and An. Morozov, *Character expansion for HOMFLY polynomials. I. Integrability and difference equations*, in *Strings, Gauge Fields, and the Geometry Behind: The Legacy of Maximilian Kreuzer*, ed. by A. Rebhan, L. Katzarkov, J. Knapp, R. Rashkov, and E. Scheidegger (World Scientific Publishins Co.Pte.Ltd. (2013), p. 101; arXiv:1112.5754.
16. A. Mironov, A. Morozov, and An. Morozov, AIP Conf. Proc. **1562**(1), 123 (2013); arXiv:1306.3197.
17. C. Bai, J. Jiang, J. Liang, A. Mironov, A. Morozov, An. Morozov, and A. Sleptsov, Phys. Lett. B **778**, 197 (2018); arXiv:1709.09228.
18. A. Mironov, A. Morozov, and An. Morozov, JHEP **2018**, 128 (2018); arXiv:1804.07278.
19. A. Mironov and A. Morozov, JETP Lett. **107**, 728 (2018); arXiv:1804.10231.
20. A. Mironov, A. Morozov, An. Morozov, P. Ramadevi, Vivek Kumar Singh, and A. Sleptsov, J. Phys. A: Math. Theor. **50**, 085201 (2017); arXiv:1601.04199.
21. N. M. Dunfield, S. Gukov, and J. Rasmussen, Experimental Math. **15**, 129 (2006); arXiv:math/0505662.
22. H. Itoyama, A. Mironov, A. Morozov, and An. Morozov, JHEP **7**, 131 (2012); arXiv:1203.5978.
23. Ya. Kononov and A. Morozov, JETP Lett. **101**, 831 (2015); arXiv:1504.07146.
24. A. Morozov and A. Smirnov, Nucl. Phys. B **835**, 284 (2010); arXiv:1001.2003.
25. A. Morozov and A. Smirnov, in *The Most Unexpected at LHC and the Status of High Energy Frontier*, Proceedings of the International School of Subnuclear Physics, ed. by A. Zichichi, Erice, Sicily, Italy, 29 August-7 September 2009, World Scientific, v. 47, p. 489; arXiv:0910.5011.
26. S. Arthamonov, A. Mironov, and A. Morozov, Theor. Math. Phys. **179**, 509 (2014); arXiv:1306.5682.
27. A. Morozov, arXiv:1903.00259.
28. N. Yu. Reshetikhin, L. A. Takhtadjan, and L. D. Faddeev, Algebra and Analysis **1**, 178 (1989).
29. M. Gould and Y. Zhang, J. Math. Phys. **35**(12), 6757 (1994); arXiv:hep-th/9311041.
30. A. Klimyk and K. Schmüdgen, *Quantum groups and their representations*, World Scientific (1997); https://www.springer.com/la/book/9783642646010.
31. A. Mironov, A. Morozov, An. Morozov, and A. Sleptsov, Pisma v ZhETF **104**, 52 (2016); arXiv:1605.03098.
32. A. Mironov, A. Morozov, and A. Sleptsov, Pis'ma v ZhETF **106**, 607 (2017); arXiv:1709.02290.
33. L. Bishler, Saswati Dhara, T. Grigoryev, A. Mironov, A. Morozov, An. Morozov, P. Ramadevi, Vivek Kumar Singh, and A. Sleptsov, to be published.
34. http://knotebook.org.