Письма в ЖЭТФ, том 112, вып. 4, с. 251 – 257 © 2020 г. 25 августа

Двумерное кулоновское стекло как модель пиннинга вихрей в сверхпроводящих пленках[1)]

И. В. Побойко[2)], *М. В. Фейгельман*

Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН, 119334 Москва, Россия

Сколковский институт науки и технологий, 121205 Москва, Россия

Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики", 101000 Москва, Россия

Поступила в редакцию 26 июня 2020 г.
После переработки 4 июля 2020 г.
Принята к публикации 10 июля 2020 г.

Предложена стекольная модель пиннинга вихрей в тонких сверхпроводящих пленках с сильным беспорядком в области магнитных полей $B \ll H_{c2}$ и при низких температурах. Впервые теоретически исследован *сильный коллективный пиннинг* системы вихрей, реализующийся в сильно неупорядоченных сверхпроводниках находящихся недалеко от квантового фазового перехода в состояние изолятора – таких, как InO_x, NbN, TiN, MoGe, наногранулированный алюминий и подобные. С помощью метода реплик, развитого в теории спиновых стекол, показано, что такая система вихрей находится в неэргодическом состоянии стекольного типа с большой кинетической индуктивностью на квадрат пленки L_K. Вычислена функция распределения локальных энергий пиннинга вихрей, и показано, что она имеет широкую "щель", т.е. вероятность найти слабо запиннингованный вихрь чрезвычайно мала.

DOI: 10.31857/S1234567820160065

1. Введение. В предлагаемой работе исследована проблема очень сильно неупорядоченного сверхпроводника в магнитном поле $B \ll H_{c2}$ и при низких температурах. Интерес к такой постановке задачи связан с активными экспериментальными исследованиями в данной области (см., например, обзорную статью [1]; более подробно некоторые из этих экспериментов [2, 3] обсуждаются в заключительной части настоящей статьи). Существо изучаемой проблемы состоит в конкуренции между сильным пиннингом каждого отдельного вихря беспорядком и отталкиванием между вихрями. Сильный пиннинг здесь означает, что энергия кора вихря меняется на величину порядка самой этой энергии при сдвиге вихря на расстояние порядка размера его кора ξ. Столь сильный пиннинг возникает из-за того, что флуктуации параметра порядка в пространстве превышают его среднее значение [4]. Регулярная решетка вихрей при таких условиях не образуется, нет даже и ближнего решеточного порядка, однако плотность вихрей в среднем постоянна и задана магнитным полем с хорошей точностью. Для существования такого состояния важно, что энергия сдвиговых деформаций решетки вихрей много меньше, чем энергия деформаций сжатия (согласно [5], энергия правильной треугольной решетки лишь на 2 % ниже, чем для квадратной решетки). Отсутствие даже ближнего решеточного порядка не позволяет строить теорию известными методами, восходящими к работе А. И. Ларкина [6] (см. также статью [7] и обзоры [8–10]), поскольку все они рассматривают потенциал дефектов как возмущение по сравнению с энергией упругой деформации решетки вихрей (в модели коллективного слабого пиннинга), либо же рассматривают пиннинг отдельных вихрей без учета межвихревого взаимодействия; оба эти подхода неприменимы в интересующем нас случае. Отдельно следует также упомянуть теорию сильного пиннинга [11–13], где рассматриваются сильные примеси, а межвихревое взаимодействие учитывается в рамках теории упругости вихревой решетки: это оказывается возможным в силу предположения о малости концентрации сильных дефектов. Отличие нашей ситуации в том, что дефекты сильные и концентрация их велика.

Наша задача состоит в построении теории вихревого стекла в ситуации, которая в значительной мере напоминает "кулоновское стекло" модели кулоновской щели Эфроса–Шкловского [14, 15], но в ситуации, когда взаимодействие частиц (в данном случае – вихрей) является логарифмическим отталкиванием,

[1)]См. дополнительные материалы к данной статье на сайте нашего журнала www.jetpletters.ac.ru.

[2)]e-mail: poboiko@itp.ac.ru

$U(r) = U_0 \ln \frac{a}{r}$, а не обычным кулоновским. Постоянная $U_0 = \frac{\Phi_0^2 d}{8\pi^2\lambda^2}$ для пленки сверхпроводника толщиной d много меньшей, чем лондоновская глубина проникновения λ. Строго говоря, на самых больших расстояниях $r \geq \lambda_{2D} = 2\lambda^2/d$ энергия взаимодействия вихрей описывается уже не логарифмическим законом, а убывает $\propto 1/r$, однако мы будем интересоваться пределом очень больших отношений $\lambda/d \geq 100$ (легко реализуемым в тонких пленках сильно грязных сверхпроводников), когда конечность величины λ_{2D} не играет никакой роли.

Феноменологический подход к задаче о вихрях в пленке, подобный использованному в [14, 15], был развит в работе [16], см. также [17]. Мы здесь развиваем другой подход, опирающийся на работу Мюллера и Иоффе [18] (см. также ряд последующих работ [19, 20]), где задача о развитии кулоновской щели изучалась методами теории спиновых стекол, и предсказывался фазовый переход в неэргодическое состояние с нарушенной репличной симметрией. Однако, в отличие от работы [18] и последующих за ней, мы не будем закладывать в нашу теорию предположения о возможности представить ее в полностью локальном виде, не содержащем пространственных зависимостей матричных полей, описывающих стекольное упорядочение.

2. Модель и теория среднего поля. Мы сделаем модельное приближение о том, что вихри могут занимать положения дискретной регулярной решетки с шагом a. Описывать вихревую конфигурацию мы будем набором "чисел заполнения" каждого узла $\{n_{\mathbf{r}}\}$. Поскольку к системе приложено магнитное поле, и тем самым имеется конечная концентрация вихрей $\langle n_{\mathbf{r}} \rangle \equiv K = Ba^2/\Phi_0$, мы будем пренебрегать возможностью возникновения антивихрей в системе, а также вихрей с зарядом $n_{\mathbf{r}} > 1$. В рамках модели эту концентрацию мы будем фиксировать введением химического потенциала μ. Наконец, беспорядок в нашей модели будет учитываться в виде случайной энергии кора вихря $u_{\mathbf{r}}$ с коррелятором $\overline{u_{\mathbf{r}} u_{\mathbf{r}'}} = W^2 \delta_{\mathbf{r}\mathbf{r}'}$. Это приводит нас к следующему гамильтониану:

$$H = \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{r},\mathbf{r}'} \delta n_{\mathbf{r}} J_{\mathbf{r}\mathbf{r}'} \delta n_{\mathbf{r}'} + \sum_{\mathbf{r}} (u_{\mathbf{r}} - \mu)\delta n_{\mathbf{r}}, \qquad (1)$$

где $\delta n_{\mathbf{r}} \equiv n_{\mathbf{r}} - K$ и $J_{\mathbf{r}\mathbf{r}'} = U_0 \ln \frac{L}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$. Величина беспорядка предполагается большой, $W \gg U_0$. Фактически в рассматриваемых сверхпроводниках $W \sim U_0$; в конце статьи мы поясним, почему модельное предположение $W \gg U_0$ не влияет на наши основные результаты. Усредняя свободную энергию по беспорядку при помощи метода реплик и проводя преобразование Хаббарда–Стратановича для нелокального члена при помощи вспомогательного поля φ (имеющего смысл дуальной переменной к сверхпроводящей фазе), мы приходим к следующему выражению для статсуммы:

$$\overline{Z^n} = \int \mathcal{D}\varphi \exp\left(-\frac{1}{2}\varphi(\beta\hat{J})^{-1}\varphi\right) \times \qquad (2)$$
$$\times \prod_{\mathbf{r}} \mathrm{Tr}_{\mathrm{v}} \exp\left(\sum_a (\beta\mu + i\varphi_{\mathbf{r}}^a)\delta n_{\mathbf{r}}^a + \frac{\beta^2 W^2}{2}\delta n_{\mathbf{r}} \hat{\mathcal{I}} \delta n_{\mathbf{r}}\right),$$

где обозначено $\mathrm{Tr}_{\mathrm{v}} \equiv \sum_{n_{\mathbf{r}}=0,1}$; латинские индексы отвечают за репличное пространство $a = 1, \ldots, n$ ($n \to 0$), матрица $\mathcal{I}^{ab} = 1$ описывает вмороженный беспорядок, одинаковый для всех реплик, а взаимодействие $\hat{J} = \delta^{ab} J_{\mathbf{r}\mathbf{r}'}$ диагонально по репликам. Отметим, что в такой постановке "вихревая" часть действия стала сугубо локальной.

Мы будем описывать стекольное состояние при помощи диагональной в пространстве (но зависящей от координат) матрицы $\mathcal{G}_{\mathbf{r}}^{ab} = -\varphi_{\mathbf{r}}^a \varphi_{\mathbf{r}}^b$, описывающей корреляции медленной в пространстве части билинейной комбинации полей. Стекольный переход будет соответствовать спонтанному нарушению репличной симметрии в этой матрице. Введем параметр порядка при помощи тождества (интегрирование по $\mathcal{Q}$ происходит вдоль мнимой оси):

$$1 = \int \mathcal{D}\mathcal{G} \prod_{\mathbf{r}} \delta(\mathcal{G}_{\mathbf{r}}^{ab} + \varphi_{\mathbf{r}}^a \varphi_{\mathbf{r}}^b) =$$
$$= \int \mathcal{D}\mathcal{G}\mathcal{D}\mathcal{Q} \exp\left(-\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(\hat{\mathcal{G}}\hat{\mathcal{Q}}\right) - \frac{1}{2}\varphi\hat{\mathcal{Q}}\varphi\right). \qquad (3)$$

Флуктуации поля φ описываются пропагатором с длиной экранировки $l \sim a\sqrt{W/U_0}$. Разумно предполагать, что в стекольной фазе и вблизи перехода, флуктуации параметра порядка $\hat{\mathcal{G}}_{\mathbf{r}}$ будут скоррелированы на гораздо бóльших длинах.

Чтобы учесть взаимодействие между числами заполнения вихрей $n_{\mathbf{r}}^a$ и полем $\varphi_{\mathbf{r}}^a$, мы разложим $\exp(i\sum_a \varphi_{\mathbf{r}}^a \delta n_{\mathbf{r}}^a)$ в ряд Тейлора и запишем произвольный член в импульсном представлении:

$$e^{i\sum_a \varphi_{\mathbf{r}}^a \delta n_{\mathbf{r}}^a} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\mathbf{q}_1+\cdots+\mathbf{q}_k=0} \frac{i^k}{k!} \delta n_{\mathbf{r}}^{a_1} \ldots \delta n_{\mathbf{r}}^{a_k} \varphi_{\mathbf{q}_1} \ldots \varphi_{\mathbf{q}_k}. \qquad (4)$$

Мы хотим описать флуктуации мягких мод параметра порядка $\hat{\mathcal{G}}_{\mathbf{r}}$ с импульсами, много меньшими, чем типичные импульсы для поля φ, $q_i \sim l^{-1}$. Основной вклад в такие флуктуации будет даваться теми членами в выражении (4), в которых какие-то пары импульсов аномально близки, $|\mathbf{q}_i + \mathbf{q}_j| \ll l^{-1}$ — такие "спаривания" мы будем заменять на $\mathcal{G}^{a_i a_j}_{\mathbf{q}_i+\mathbf{q}_j}$ (имея в виду малость суммарного импульса). В таком случае, для выделения основного вклада в динамику мягких мод, нам необходимо рассмотреть все возможные "спаривания" полей φ в этом выражении. Члены с нечетными k в таком случае описывают взаимодействие мягких мод и массивных, и в ведущем приближении могут быть выброшены. Это позволяет нам свести взаимодействие поля $\varphi(\mathbf{r})$ и вихревых степеней свободы к эффективному локальному члену взаимодействия вихрей вида $\delta n_{\mathbf{r}} \hat{\mathcal{G}}_{\mathbf{r}} \delta n_{\mathbf{r}}/2$ в экспоненте.

Наконец, беря оставшийся Гауссов интеграл по $\varphi(\mathbf{r})$, мы приходим к следующей теории поля, которая описывает флуктуации мягких мод матричного параметра порядка:

$$\overline{Z^n} = \int \mathcal{DGDQ} \exp\left(-nS[\hat{\mathcal{G}}, \hat{\mathcal{Q}}]\right), \tag{5}$$

$$nS[\hat{\mathcal{G}}, \hat{\mathcal{Q}}] = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\hat{\mathcal{G}}\hat{\mathcal{Q}}) + \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\ln(1+\beta\hat{J}\hat{\mathcal{Q}}) + \beta n \sum_{\mathbf{r}} F_{\mathrm{v}}[\hat{\mathcal{G}}_{\mathbf{r}}], \tag{6}$$

где локальная свободная энергия определяется следующим образом:

$$e^{-\beta n F_{\mathrm{v}}[\hat{\mathcal{G}}]} = \mathrm{Tr}_{\mathrm{v}} \exp\left(\frac{1}{2}\delta n(\beta^2 W^2 \hat{\mathcal{I}} + \hat{\mathcal{G}})\delta n + \beta\mu \sum_a \delta n^a\right). \tag{7}$$

Мы начнем анализ действия (6) с исследования пространственно однородных седловых точек:

$$\frac{\delta S}{\delta \hat{\mathcal{G}}} = \frac{1}{2}(\hat{\mathcal{Q}} - \hat{Q}) = 0, \quad Q_{ab} = \langle \delta n_a \delta n_b \rangle_{\mathcal{G}}, \tag{8}$$

где $\hat{Q}$ – локальная корреляционная функция плотности, сосчитанная в локальной модели (7).

Второе уравнение, в полном согласии с определением матрицы $\mathcal{G}$, дает:

$$\frac{\delta S}{\delta \hat{\mathcal{Q}}} = \frac{1}{2}(\hat{\mathcal{G}} + \hat{G}_{\mathbf{rr}}) = 0, \quad \hat{G} = ((\beta\hat{J})^{-1} + \hat{\mathcal{Q}})^{-1}. \tag{9}$$

Для того, чтобы прояснить физический смысл матрицы $\hat{G}$, рассмотрим результат добавления пары инфинитезимальных вихрей с зарядами $q_{1,2} \ll 1$ в точки $\mathbf{r}_{1,2}$ в репликах $a_{1,2}$. Такая операция описывается следующим возмущением:

$$V = \sum_{\mathbf{r}} (q_1 J_{\mathbf{r}_1\mathbf{r}} \delta n^{a_1}_{\mathbf{r}} + q_2 J_{\mathbf{r}_2\mathbf{r}} \delta n^{a_2}_{\mathbf{r}}) + q_1 q_2 J_{\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2} \tag{10}$$

Рассмотрим отклик свободной энергии на такое возмущение – этот отклик имеет физический смысл энергии взаимодействия двух вихрей. После преобразования Хаббарда–Стратановича, к формуле (3) в экспоненте будет поправка к действию $-i(q_1\varphi^a_{\mathbf{r}_1} + q_2\varphi^b_{\mathbf{r}_2})$. Соответственно, после взятия Гауссового интеграла по φ в выражении (6) возникнет поправка к действию, имеющая вид:

$$\delta S = \frac{1}{2}\left(q_1^2 G^{a_1a_1}_{\mathbf{r}_1\mathbf{r}_1} + q_2^2 G^{a_2a_2}_{\mathbf{r}_2\mathbf{r}_2}\right) + q_1 q_2 G^{a_1a_2}_{\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2}. \tag{11}$$

Таким образом, матрица $\hat{G}$ (а точнее, ее среднее значение) может быть отождествлена с перенормированным взаимодействием двух "инфинитезимальных" вихрей:

$$U^{(\mathrm{eff})}_{a_1a_2}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \equiv \left.\frac{\partial^2 F}{\partial q_1 \partial q_2}\right|_{q_{1,2}=0} = T\left\langle G^{a_1a_2}_{\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2}\right\rangle. \tag{12}$$

Наконец, можно также сразу записать уравнение, определяющее химический потенциал:

$$\left\langle \frac{\partial S}{\partial(\beta\mu)} \right\rangle = \sum_a \langle \delta n^a \rangle_{\mathcal{G}} = 0. \tag{13}$$

Поскольку параметр W предполагается самым большим в задаче, то химический потенциал определяется в первую очередь "затравочной" плотностью состояний $\nu(u) = \exp(-u^2/2W^2)/\sqrt{2\pi}W$ и следующим уравнением:

$$1 - 2K = \int \nu(u) du \tanh\frac{\beta(u-\mu)}{2} \approx$$
$$\approx \int \nu(u) du \cdot \mathrm{sign}(u-\mu), \tag{14}$$

откуда следуют асимптотики:

$$\mu \approx -W \cdot \begin{cases} \sqrt{2\pi}\left(\frac{1}{2} - K\right), & |K - 1/2| \ll 1, \\ \left(2\ln\frac{1}{\sqrt{2\pi}K}\right)^{1/2}, & K \ll 1. \end{cases} \tag{15}$$

3. Высокотемпературная фаза и фазовый переход. Мы начнем исследование седловых уравнений с высокотемпературной фазы, которая соответствует реплично-симметричным решениям $\mathcal{G}_{ab} = \mathcal{G}_0\delta_{ab} + \mathcal{G}_1\mathcal{I}_{ab}$ (и аналогично для $\mathcal{Q}$). Сразу отметим, что поскольку вихревые переменные δn подобны Изинговским спинам (принимают два значения), то для них имеет место тождество $\delta n^2 = \delta n(1-2K) + K(1-K)$ (при $K = 1/2$ оно вырождается в $s^2 = 1/4$ для буквально Изинговских спинов). Как следствие, диагональная часть $\mathcal{G}_0$ попросту перенормирует химический потенциал $\mu \mapsto \mu + T\mathcal{G}_0\left(\frac{1}{2} - K\right)$, а оффдиагональная — беспорядок $W \mapsto \sqrt{W^2 + T^2\mathcal{G}_1}$. Оба этих эффекта будут незначительны, поскольку $\mu \sim W \gg T, U_0$.

Тогда получаем:

$$\mathcal{Q}_0 = \int \frac{\nu(u)du}{\left(2\cosh\frac{\beta(u-\mu)}{2}\right)^2} \approx T\nu_0. \tag{16}$$

$$\mathcal{Q}_1 = K(1-K) - \mathcal{Q}_0. \tag{17}$$

Отметим, что в силу большого W, плотность состояний $\nu(u)$ может быть заменена на константу:

$$\nu_0 \equiv \nu(\mu) \approx \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}W}, & |K-1/2| \ll 1, \\ \frac{K}{W}\left(2\ln\frac{1}{\sqrt{2\pi}K}\right)^{1/2}, & K \ll 1. \end{cases} \tag{18}$$

Как следствие, в пропагаторе $G_{ab}(\mathbf{k}) = G_0(\mathbf{k})\delta_{ab} + G_1(\mathbf{k})\mathcal{I}_{ab}$ возникает экранировка:

$$G_0(\mathbf{k}) = \frac{2\pi\beta U_0}{k^2 + l^{-2}}, \quad G_1(\mathbf{k}) = -\mathcal{Q}_1 G_0^2(\mathbf{k})/a^2, \tag{19}$$

где $l = a(2\pi\nu_0 U_0)^{-1/2} \sim a\sqrt{W/U_0}$. Наконец, параметр порядка принимает следующее значение:

$$\mathcal{G}_0 \approx -\frac{\beta U_0}{2}\ln\frac{1}{\nu_0 U_0}, \quad \mathcal{G}_1 \approx \frac{\beta^2 U_0}{\nu_0}K(1-K). \tag{20}$$

Для исследования устойчивости репличносимметричного решения и нахождения температуры замерзания, нам необходимо изучить гессиан – квадратичное разложение действия (6):

$$nS^{(2)}[\delta\hat{\mathcal{G}}, \delta\hat{\mathcal{Q}}] = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\delta\hat{\mathcal{G}}\delta\hat{\mathcal{Q}}) - \frac{1}{4}\mathrm{Tr}(\hat{G}\delta\hat{\mathcal{Q}}\hat{G}\delta\hat{\mathcal{Q}}) - \\ - \frac{1}{8}\sum_{\mathbf{r}} Q_{(a_1b_1)(a_2b_2)}\delta\mathcal{G}_{\mathbf{r}}^{a_1b_1}\delta\mathcal{G}_{\mathbf{r}}^{a_2b_2}, \tag{21}$$

где введена корреляционная функция:

$$Q_{(a_1b_1)(a_2b_2)} \equiv \langle\delta n_{a_1}\delta n_{b_1}\delta n_{a_2}\delta n_{b_2}\rangle_{\mathcal{G}} - \\ - \langle\delta n_{a_1}\delta n_{b_1}\rangle_{\mathcal{G}}\langle\delta n_{a_2}\delta n_{b_2}\rangle_{\mathcal{G}}. \tag{22}$$

По мере понижения температуры, сингулярность возникает в так называемой репликонной моде. Эта мода соответствует линейному подпространству матриц с нулевыми диагональными элементами: $\delta\mathcal{G}_{aa} = 0$ и $\sum_a \delta\mathcal{G}_{ab} = 0$. Действие, описывающее репликонные флуктуации, сводится к следующему:

$$nS^{(2)} \approx \\ \approx \int\frac{(d\mathbf{q})}{4a^2}\mathrm{tr}\Big(\delta\hat{\mathcal{G}}_{\mathbf{q}}\ \delta\hat{\mathcal{Q}}_{\mathbf{q}}\Big)\begin{pmatrix} -Q_{22} & 1 \\ 1 & -\mathcal{B}_2(\mathbf{q}) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \delta\hat{\mathcal{G}}_{-\mathbf{q}} \\ \delta\hat{\mathcal{Q}}_{-\mathbf{q}} \end{pmatrix}, \tag{23}$$

где символ tr отвечает следу лишь по репличным индексам; а также введены обозначения:

$$\mathcal{B}_2(\mathbf{q}) = \int(d\mathbf{k})G_0(\mathbf{k})G_0(\mathbf{k}+\mathbf{q}) \approx \pi(\beta U_0 l)^2\left(1 - q^2l^2/6\right), \tag{24}$$

$$Q_{22} = \int\frac{\nu(u)du}{\left(2\cosh\frac{\beta(u-\mu)}{2}\right)^4} \approx T\nu_0/6. \tag{25}$$

Квадратичное разложение (24) соответствует лестничному суммированию диаграммного ряда для четырехточеченой функции Грина поля φ. Из действия (24) следуют пропагаторы:

$$\left\langle\left\langle\mathcal{G}_{\mathbf{r}}^{ab}\mathcal{G}_{\mathbf{r}'}^{a'b'}\right\rangle\right\rangle_{\mathbf{q}} \approx \frac{12\beta a^2/\nu_0}{\tau + q^2l^2/6}\mathbb{P}_{bb'}^{aa'}, \tag{26}$$

$$\left\langle\left\langle\mathcal{Q}_{\mathbf{r}}^{ab}\mathcal{Q}_{\mathbf{r}'}^{a'b'}\right\rangle\right\rangle_{\mathbf{q}} \approx \frac{a^2\nu_0 T^2/3T_c}{\tau + q^2l^2/6}\mathbb{P}_{bb'}^{aa'}, \tag{27}$$

где введена температура замерзания $T_c \equiv U_0/12$; при этой температуре величина $\tau \equiv T/T_c - 1$ меняет знак, а в теории (24) возникает неустойчивость по отношению к спонтанному нарушению репличной симметрии. Тензор $\mathbb{P}_{bb'}^{aa'}$ представляет собой проектор на репликонную моду.

Как показано в дополнительном материале 1, корреляционная функция $\langle\langle\mathcal{Q}\mathcal{Q}\rangle\rangle$ имеет наглядный физический смысл: она представляет собой длинноволновую асимптотику среднеквадратичной флуктуации поляризуемости:

$$\overline{\langle\delta n_{\mathbf{r}}\delta n_{\mathbf{r}'}\rangle^2} = \lim_{n\to 0}\frac{1}{n(n-1)}\sum_{a\neq b}\left\langle\left\langle\hat{\mathcal{Q}}_{\mathbf{r}}^{ab}\hat{\mathcal{Q}}_{\mathbf{r}'}^{ab}\right\rangle\right\rangle. \tag{28}$$

Наконец, можно убедиться, что учет репличной структуры проектора на репликонную моду дает дополнительный фактор $\lim_{n\to 0}\mathbb{P}_{bb}^{aa}/n(n-1) = 3/2$ к выражению (27).

В окрестности перехода при $\tau \ll 1$, квадратичная часть действия (24) приближенно диагонализуется следующим преобразованием:

$$\begin{pmatrix} \hat{\Psi} \\ \hat{\Phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2Q_{22} \\ 1/2 & -1/2Q_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \delta\hat{\mathcal{G}} \\ \delta\hat{\mathcal{Q}} \end{pmatrix}, \tag{29}$$

при этом мода Ψ оказывается мягкой, а мода Φ обладает щелью в спектре и должна быть отброшена. Проводя разложение функционала по $\hat{\Psi}$, мы приходим (вывод приведен в дополнительном материале 2) к следующему функционалу Гинзбурга–Ландау:

$$nS[\hat{\Psi}] = \nu_0 T_c\Bigg(\frac{1}{24}\mathrm{Tr}(\tau\hat{\Psi}^2 + (\nabla\hat{\Psi})^2l^2/6) - \\ - \frac{1}{2160}\left(7\mathrm{Tr}\hat{\Psi}^3 + 6\sum_{ab,\mathbf{r}}\Psi_{ab,\mathbf{r}}^3\right) - \frac{1}{2016}\sum_{ab,\mathbf{r}}\Psi_{ab,\mathbf{r}}^4\Bigg). \tag{30}$$

Несмотря на наличие в задаче формально большого радиуса взаимодействия $l \gg a$, все коэффициенты при нелинейных членах одного порядка $\sim\nu_0 T_c \sim U_0/W$. Как следствие, в полученной теории Гинзбурга–Ландау отсутствует малый параметр, и область Гинзбурга, где флуктуационные эффекты сильны, имеет ширину $\mathrm{Gi} = O(1)$, так что область применимости теории среднего поля в окрестности точки перехода отсутствует. Этот же вывод относится и к трехмерному аналогу той же задачи, который был исследован в работе [18]. Поэтому мы не будем останавливаться на окрестности T_c и сразу перейдем к области низких температур $T \ll T_c$, где флуктуационные эффекты подавлены.

4. Низкотемпературная фаза в приближении одноступенчатого нарушения репличной симметрии. Соотношение между коэффициентами при двух кубических членах действия (31), $c_1/c_2 = 6/7 < 1$, предсказывает непрерывное нарушение репличной симметрии в духе схемы Паризи [21], в то время как теории, в которых это отношение > 1, описываются одноступенчатым нарушением (1-RSB) репличной симметрии [22]. Имея в виду, что в нашей задаче отношение c_1/c_2 довольно близко к единице, мы попробуем ограничиться 1-RSB и покажем, что полученное решение *численно* является очень хорошим приближением. В рамках такой схемы

$$\mathcal{G}_{ab} = \mathcal{G}_0\delta_{ab} + \mathcal{G}_1\mathcal{R}_{ab} + \mathcal{G}_2\mathcal{I}_{ab}, \tag{31}$$

$$\mathcal{Q}_{ab} = \mathcal{Q}_0\delta_{ab} + \frac{1}{m}(\mathcal{Q}_1 - \mathcal{Q}_0)\mathcal{R}_{ab} + \mathcal{Q}_2\mathcal{I}_{ab}. \tag{32}$$

Матрица $\mathcal{R}_{ab} = \delta_{[a/m],[b/m]}$ (где $[\ldots]$ обозначает целую часть) представляет собой блочно-диагональную матрицу, в которой диагональные блоки размера $m \times m$ заполнены единицами, а вне-диагональные блоки – нулями. В репличном пределе $n \to 0$ параметр $m \in (0, 1)$ становится дополнительным вариационным параметром теории. Функция Грина $\hat{G}$, см. ур. (9), параметризуется аналогично:

$$G_{ab}(\mathbf{k}) = G_0(\mathbf{k})\delta_{ab} + \frac{1}{m}(G_1(\mathbf{k}) - G_0(\mathbf{k}))\mathcal{R}_{ab} + G_2(\mathbf{k})\mathcal{I}_{ab} \tag{33}$$

при этом:

$$G_{0,1}(\mathbf{k}) = \frac{2\pi\beta U_0}{k^2 + l_{0,1}^{-2}}, \quad G_2(\mathbf{k}) = -\mathcal{Q}_2 G_1^2(\mathbf{k})/a^2, \tag{34}$$

где введены две различные длины экранировки $l_{0,1} = a(2\pi\beta U_0 \mathcal{Q}_{0,1})^{-1/2}$. Тогда первая серия седловых уравнений следует из (9):

$$\begin{cases} \mathcal{G}_0 & \approx -\beta U_0 \ln(l_0/a) \approx \beta U_0 \ln(\beta U_0 \mathcal{Q}_0)/2, \\ \mathcal{G}_1 & = \beta U_0 \ln(l_0/l_1)/m = \beta U_0 \ln(\mathcal{Q}_1/\mathcal{Q}_0)/2m, \\ \mathcal{G}_2 & = \pi \mathcal{Q}_2 (\beta U_0 l_1/a)^2 = \beta U_0 \mathcal{Q}_2/2\mathcal{Q}_1. \end{cases} \tag{35}$$

Второй набор седловых уравнений, следующих из (8) с учетом $W \gg U_0$, может быть выражен (вывод приведен в дополнительном материале 3) через вспомогательную безразмерную функцию $f_{\mathrm{v}}(m, \mathcal{G}_1)$:

$$\begin{cases} \mathcal{Q}_0 & = \frac{\nu_0 T}{1-m} \partial f_{\mathrm{v}}/\partial \mathcal{G}_1, \\ \mathcal{Q}_1 & = \nu_0 T, \\ \mathcal{Q}_2 & = K(1-K) + \left(\frac{1}{m} - 1\right)\mathcal{Q}_0 - \frac{1}{m}\mathcal{Q}_1, \end{cases} \tag{36}$$

а сама функция определяется следующим образом:

$$f_{\mathrm{v}}(m, \mathcal{G}_1) = \frac{2}{m}\int dz \Big(\ln \Xi(z, m, \mathcal{G}_1) - - m \ln 2\cosh\frac{z}{2} - \frac{m^2 \mathcal{G}_1}{8}\Big), \tag{37}$$

$$\Xi(z, m, \mathcal{G}_1) = \int \frac{dy e^{-y^2/2\mathcal{G}_1}}{\sqrt{2\pi\mathcal{G}_1}} \left[2\cosh\frac{y-z}{2}\right]^m. \tag{38}$$

Последнее уравнение в (36) – тривиальное следствие того, что диагональные элементы фиксированы соотношением $\mathcal{Q}_{aa} = K(1-K)$; второе уравнение утверждает, что длина экранировки l_1 совпадает с таковой в реплично-симметричной фазе. Наконец, система уравнений замыкается, если добавить условие экстремума действия по m, которое, с учетом остальных седловых уравнений, может быть записано в следующей форме:

$$-\frac{6T_c}{mT}\left(1 - \frac{1}{1-m}\frac{\partial f_{\mathrm{v}}}{\partial \mathcal{G}_1}\right) + \mathcal{G}_1\frac{\partial f_{\mathrm{v}}}{\partial \mathcal{G}_1} - m\frac{\partial f_{\mathrm{v}}}{\partial m} = 0. \tag{39}$$

Отметим, что среди уравнений (35), (36), (39) в действительности нетривиальные – лишь уравнения на $(m, \mathcal{G}_1, \mathcal{Q}_0)$.

При низких температурах система уравнений (35), (36), (39) допускает (вывод этого утверждения содержится в дополнительном материале 3.1) следующее решение:

$$m \approx 1.09\,(T/T_c), \quad \mathcal{G}_1 \approx 61.0\,(T_c/T)^2, \tag{40}$$

$$\mathcal{Q}_0 \approx 1.43 \cdot 10^{-5}\,\nu_0 T. \tag{41}$$

5. Физические свойства низкотемпературной фазы. Как было показано ранее (ур. (12)), матрица $\hat{G}$ представляет собой фактически энергию взаимодействия двух внесенных в систему вихрей. Из теории спиновых стекол [21] известно, что нарушение репличной симметрии физически соответствует нарушению эргодичности и зависимость состояния системы от ее предыстории. В частности, для подобных возмущений, как правило, выделяют два различных протокола: так называемое "охлаждение в нулевом поле" (*Zero Field Cooling*, ZFC), что соответствует внесению в систему пары вихрей *после* перехода в стекольное состояние, и "охлаждение в поле" (*Field*

Cooling, FC), что соответствует внесению в системы пары вихрей *до* ее замерзания. В репличной технике это соответствует следующим двум функциям отклика:

$$U^{(\text{eff})}_{\text{ZFC}}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2) = \lim_{b\to a}\Big[U^{(\text{eff})}_{aa}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2) - U^{(\text{eff})}_{ab}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)\Big] = \\ = TG_0(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2), \quad (42)$$

$$U^{(\text{eff})}_{\text{FC}}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2) = \frac{1}{n}\sum_{ab} U^{(\text{eff})}_{ab}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2) = TG_1(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2). \quad (43)$$

Чрезвычайная малость (см. (41)) величины $\mathcal{Q}_0$ и соотношение (34) приводит к выводу об очень большой длине экранировки для ZFC-отклика в замерзшей фазе $l_0 \approx 260 l_1$ (напомним, l_1 фактически совпадает с длиной экранировки в высокотемпературной фазе). В почти любой экспериментальной ситуации такую величину l_0 можно считать бесконечной. Как следствие, при низких температурах $T \ll T_c$ фактически восстанавливается логарифмическое взаимодействие между вихрями, и эта фаза обладает конечной сверхтекучей плотностью:

$$\rho^{(\text{s})}_{\text{ZFC}} = \frac{T}{4\pi^2}\lim_{k\to 0} k^2 G_0(\mathbf{k}) \simeq \frac{U_0}{2\pi}. \quad (44)$$

Важной физической величиной является функция распределения $P(u)$ локального потенциала для отдельного вихря. Подробное вычисление функции распределения при низких температурах вынесено в дополнительный материал 2.2; приведем тут приближенный результат, работающий при низких температурах:

$$P\left(h \equiv \frac{u-\widetilde{\mu}}{T_c}\right) \approx \nu_0 \cdot \frac{1}{2}\text{erfc}\left(3.03 - 0.09|h|\right). \quad (45)$$

При низких температурах в этой величине возникает щель. Полуширина щели $\sim 30T_c = 2.5U_0$, а плотность состояний в щели проваливается хоть и не до нуля, но до значений, имеющих порядок $\sim 10^{-5}$. Именно такая малая плотность состояний и приводит к столь малому значению $\mathcal{Q}_0$ (ур. (41)), которая выражается через нее следующим образом:

$$\mathcal{Q}_0 = \int \frac{P(u)du}{\left(2\cosh\frac{\beta(u-\widetilde{\mu})}{2}\right)^2} \approx TP_0, \quad P_0 \equiv P(\widetilde{\mu}). \quad (46)$$

Последнее равенство учитывает то обстоятельство, что плотность состояний на масштабах $|u-\widetilde{\mu}| \sim T$ может считаться постоянной.

Сама низкотемпературная фаза в приближении 1-RSB оказывается неустойчивой – репликонная мода, отвечающая дальнейшему нарушению репличной симметрии, оказывается отрицательной. Однако, формулы (24)–(27) оказываются пригодными и для описания репликонной моды при низких температурах, только лишь с тем отличием, что длину экранировки l необходимо заменить на l_0, а значение ν_0 – на ее перенормированное значение P_0. Это связано с тем, что хотя функция распределения и имеет глубокий провал, но его характерный масштаб – порядка $30T_c$, и на интересующих нас масштабах $\sim T$ функция распределения с хорошей точностью может считаться константой. В частности, при $T \ll T_c$ величина $\tau \equiv T/T_c - 1 \approx -1$, и поэтому мода $q = 0$ действительно неустойчива. Однако, из-за того, что величина $l_0 = a/\sqrt{2\pi\beta U_0 \mathcal{Q}_0}$ содержит большой параметр ~ 250, фазовый объем неустойчивых мод с $q \lesssim 1/l_0$ оказывается очень мал. Поэтому естественно ожидать, что сделанное тут приближение описывает систему с хорошей точностью.

Энтропия в приближении 1-RSB при произвольной температуре может быть записана в следующем виде:

$$S = \nu_0 T\left[f_{\text{v}}(m,\mathcal{G}_1) + \frac{1}{2}m\frac{\partial f_{\text{v}}}{\partial m} - \mathcal{G}_1\frac{\partial f_{\text{v}}}{\partial \mathcal{G}_1} + \frac{\pi^2}{3}\right] - 3\beta T_c \mathcal{Q}_0. \quad (47)$$

При низких температурах поведение энтропии разобрано в дополнительном материале 2.3; сразу приведем результат. Энтропия при нулевой температуре хоть и получается отрицательная, но в действительности численно она очень мала (в меру малости плотности состояний):

$$S(T=0) = -3\beta T_c \mathcal{Q}_0 \approx -4.29\cdot 10^{-5}\nu_0 T_c \quad (48)$$

Фазовый переход замерзания вихревого стекла может быть рассмотрен также совсем иным образом, как задача о статистической механике частицы в логарифмически коррелированном случайном потенциале [23]. Действительно, хотя "затравочный" случайный потенциал коррелирован локально, но эффективный случайный потенциал, который чувствует отдельный вихрь, имеет вид:

$$u_{\text{eff}}(\mathbf{r}) = u(\mathbf{r}) + \sum_{\mathbf{r}'} J_{\mathbf{r}\mathbf{r}'}\delta n_{\mathbf{r}'}, \quad (49)$$

и его флуктуация на масштабах $l_0 \gg r \gg l_1$ может быть оценена (с использованием (34) и (40)) как:

$$\overline{\langle u_{\text{eff}}(\mathbf{r}) - u_{\text{eff}}(0)\rangle^2} \underset{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|\gg l_1}{=} \\ \underset{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|\gg l_1}{=} \frac{2(1-m)}{m}T^2(G_0(\mathbf{r}) - G_0(0)) \approx \\ \approx 11T_c^2 \ln\tfrac{r}{a}, \quad T \ll T_c. \quad (50)$$

Критерий замерзания [23], согласно которому система находится в замерзшем состоянии при $T < \sqrt{5.5T_c^2} \propto T_c$, подтверждает наш вывод о реализации стекольного состояния при $T \ll T_c$.

6. Заключение. Развитая теория применима (качественно) к экспериментальным результатам [2, 3], где исследовались очень сильно неупорядоченные сверхпроводящие пленки InO_x и MoGe. В работе [2] измерялась кинетическая индуктивность L_K пленки на низкой частоте в широком диапазоне магнитных полей и температур; показано, что граница существования сверхпроводящего состояния со сверхтекучей плотностью $\rho_s \propto 1/L_K > 0$ определяется условием, близким к критерию перехода Березинского-Костерлица-Таулеса, т.е. $\rho_s/T_c \approx \text{const}$. В работе [3] исследовался критический ток j_c пленок InO_x при $T \ll T_c$ и магнитных полях, близких к верхнему критическому полю. Оказалось, что зависимость $j_c(B)$ близка к "среднеполевому" результату $j_c(B) \propto (H_{c2} - B)^{3/2}$. В работе [3] были приведены качественные аргументы, объясняющие такое поведение. Главное, о чем говорят эксперименты [2, 3], – это наличие сверхтекучей плотности ρ_s и критического тока j_c в сильном магнитном поле, означающее, что плотная система вихрей в 2D системе находится в стекольном состоянии. Теории такого состояния ранее не существовало. В данной работе мы впервые предложили последовательный аналитический подход в описании такого стекла.

Мы использовали модельное предположение об очень сильном локальном беспорядке, $W \gg U_0$. Фактически в рассматриваемых системах в области слабых магнитных полей $B \ll H_{c2}$ величина беспорядка $W \sim 0.5U_0$. Снятие требования $W \gg U_0$ не повлияет на наши основные результаты для стекольной фазы. Это следует из большой величины (см.(45)) "щели" в функции распределения $P(h)$ локальных энергий пиннинга, имеющей полуширину $30T_c \approx 2.5U_0$. Кроме того (см. [7]), с приближением B к H_{c2} энергия пиннинга отдельных вихрей падает как $1 - B/H_{c2}$, в то время как энергия их взаимодействия - как $(1 - B/H_{c2})^2$, что еще увеличивает отношение W/U_0.

Формально говоря, полученное нами 1-RSB решение является неустойчивым, что указывает на необходимость развития теории с полной непрерывной схемой Паризи. Однако отличие результатов такой полной теории от развитой нами здесь ожидается крайне малым, на что указывает величина энтропии на узел $-S_0 \approx 10^{-5}$. Кроме того, эти отличия должны на самом деле описываться при помощи динамической теории стекла, так как флуктуации на масштабах порядка l_0 при $T \ll T_c$ не могут происходить термодинамически равновесным образом. Заметим наконец, что для случая общего положения, $K \neq \frac{1}{2}$, в теории низкотемпературного состояния ожидается появление дополнительного члена в свободной энергии, который может сделать 1-RSB решение полностью устойчивым. Исследование этих вопросов мы также оставляем на будущее.

Авторы хотели бы выразить благодарность В. Б. Гешкенбейну, А. С. Иоселевичу и Я. В. Федорову за плодотворные обсуждения.

Работа была поддержана грантом Российского научного фонда 20-12-00361, а также грантом Фонда развития теоретической физики "Базис".

1. B. Sacépe, M.V. Feigel'man, and T.M. Klapwijk, Nature Phys. **16**(7), 734 (2020); https://doi.org/10.1038/s41567-020-0905-x.
2. S. Misra, L. Urban, M. Kim, G. Sambandamurthy, and A. Yazdani, Phys. Rev. Lett. **110**, 037002 (2013).
3. B. Sacépé, J. Seidemann, F. Gay, K. Davenport, A. Rogachev, M. Ovadia, K. Michaeli, and M.V. Feigel'man, Nature Phys. **15**, 48 (2019).
4. M.V. Feigel'man, L.B. Ioffe, V.E. Kravtsov, and E. Cuevas, Ann. Phys. **325**, 1390 (2010).
5. А. А. Абрикосов, ЖЭТФ **32**, 1442 (1957).
6. А. И. Ларкин, ЖЭТФ **58**, 1466 (1970).
7. A. I. Larkin and Yu. N. Ovchinnikov, J. Low Temp. Phys. **34**, 409 (1979).
8. H. Brandt, J. Low Temp. Phys. **26**, 709 (1977).
9. G. Blatter, M.V. Feigel'man, V.B. Geshkenbein, A.I. Larkin, and V.M. Vinokur, Rev. Mod. Phys. **66**, 1125 (1994).
10. W.-K. Kwok, U. Welp, A. Glatz, A.E. Koshelev, K.J. Kihlstrom, and G.W. Crabtree, Rep. Prog. Phys. **79**, 116501 (2016).
11. R. Labusch, Cryst. Lattice Defects **1**, 1 (1969).
12. G. Blatter, V.B. Geshkenbein, and J.A.G. Koopmann, Phys. Rev. Lett. **92**, 067009 (2004).
13. M. Buchacek, R. Willa, V.B. Geshkenbein, and G. Blatter, Phys. Rev. B **98**, 094510 (2018).
14. A. L. Efros and B. I. Shklovskii, J. Phys. C **8**, L49 (1975).
15. A. L. Efros, J. Phys. C **9**, 2021 (1976).
16. U. C. Tauber and D. R. Nelson, Phys. Rev. B **52**, 16106 (1995).
17. А. И. Ларкин, Д. Е. Хмельницкий, ЖЭТФ **83**, 1140 (1982).
18. M. Müeller and L. B. Ioffe, Phys. Rev. Lett. **93**, 256403 (2004).
19. S. Pankov and V. Dobrosavljevic, Phys. Rev. Lett. **94**, 046402 (2005).
20. M. Müeller and S. Pankov, Phys. Rev. B **75**, 144201 (2007).
21. M. Mézard, G. Parisi, and M. A. Virasoro, *Spin Glass Theory and Beyond*, World Scientific, Singapore (1987).
22. D. Gross, I. Kanter, and H. Sompolinsky, Phys. Rev. Lett. **55**, 304 (1985).
23. D. Carpentier and P. Le Doussal, Phys. Rev. E **63**, 026110 (2001).