Письма в ЖЭТФ, том 112, вып. 5, с. 291 – 296

О вычислении специальной геометрии для Калаби–Яу типа "петля" и двух конструкциях зеркального многообразия

А. А. Артемьев[+*1)], И. В. Кочергин[+*1)]

[+]Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау, 141701 Черноголовка, Россия

[*] Московский физико-технический институт, 142432 Долгопрудный, Россия

Поступила в редакцию 12 августа 2020 г.
После переработки 12 августа 2020 г.
Принята к публикации 12 августа 2020 г.

Вычислены кэлеровы потенциалы на пространстве модулей комплексных структур для двух многообразий Калаби–Яу, заданных как гиперповерхности во взвешенных проективных пространствах. Найдены зеркальные образы этих многообразий в соответствии с конструкциями Батырева и Берглунда–Хубша, показана их эквивалентность.

DOI: 10.31857/S1234567820170012

Компактификация теории суперструн является одним из возможных способов объединить Стандартную модель и квантовую гравитацию. Известно, что в этом подходе из феноменологических соображений требуется компактификация 6 дополнительных измерений на многообразие Калаби–Яу; низкоэнергетическая теория тогда определяется его специальной кэлеровой геометрией [1]. Важным инструментом в задаче о ее вычислении является гипотеза о существовании зеркальной симметрии: она позволяет провести непрямое вычисление потенциала на пространстве кэлеровых модулей, для которого не существует явных формул. Зеркальным семейством Калаби–Яу к данному называют такое, у которого пространство модулей комплексных структур совпадает с пространством кэлеровых модулей исходного и наоборот.

Доступным для изучения классом многообразий Калаби–Яу являются гиперповерхности во взвешенных проективных пространствах; классификация таких Калаби–Яу приведена в [2]. Для примеров из этого класса уже было получено много результатов (см., например, работы [3–5]). Наша работа имеет целью продолжение исследований в этом направлении; мы вычисляем специальную геометрию для двух примеров из не рассматриваемого ранее типа "петля" (типа 16 согласно классификации [2]), а также строим для этих примеров зеркальные семейства двумя способами и показываем их эквивалентность.

Приведем краткое описание метода вычисления кэлерова потенциала на пространстве модулей комплексных структур Калаби–Яу, заданного нулями многочлена во взвешенном проективном пространстве, развитый в серии работ Алешкина, Белавина, начиная с [6].

Рассматривается взвешенное проективное пространство $\mathbb{P}_{k_1,k_2,k_3,k_4,k_5}$ – фактор $\mathbb{C}^5/\{0\}$ по действию $\mathbb{C}^*$, определенному как

$$\mathbb{C}^5 \ni (x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \xrightarrow{\lambda\in\mathbb{C}^*} \xrightarrow{\lambda\in\mathbb{C}^*} (\lambda^{k_1}x_1,\lambda^{k_2}x_2,\lambda^{k_3}x_3,\lambda^{k_4}x_4,\lambda^{k_5}x_5). \quad (1)$$

Нас интересует гиперповерхность, заданная в нем нулями некоторого невырожденного полинома

$$0 = W_0(x) = \sum_{a=1}^{5}\prod_{i=1}^{5} x_i^{M_{ai}} \quad (2)$$

с условиями $\sum_i k_i M_{ai} = d = \sum_i k_i \ \forall a$. Первое равенство – условие квазиоднородности; второе условие необходимо, чтобы заданная поверхность была многообразием Калаби–Яу. Известно, что деформациям комплексной структуры этого многообразия отвечает добавление к W_0 линейной комбинации мономов той же степени квазиоднородности d:

$$W(x,\phi) = W_0(x) + \sum_{i=1}^{h}\phi_i e_i(x). \quad (3)$$

Нужно исключить из множества всех таких мономов те, которые могут быть сгенерированы заменой координат в исходном полиноме, т.е. мономы, пропорциональные элементам из $\langle \frac{\partial W_0}{\partial x_i}\rangle$. В большинстве случаев мономиальными деформациями пространство моду-

[1)]e-mail: artemev.aa@phystech.edu; kochergin.iv@phystech.edu лей комплексных структур (локально) исчерпывается (это всегда так для многообразий, заданных полиномом типа петля).

Определим группу “квантовых симметрий“ $\mathcal{Q} = \mathbb{Z}_d$ полинома W_0. Ее действие на проективные координаты совпадает с указанным в (1) действием $\mathbb{C}^*$ для параметра $\lambda : \lambda^d = 1$. Тогда рассмотрим так называемое “киральное кольцо” полиномов:

$$R^{\mathcal{Q}} = \frac{\mathbb{C}[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]^{\mathcal{Q}}}{\langle \partial W_0/\partial x_i \rangle}. \tag{4}$$

Базис в нем задают мономы E_μ, инвариантные под действием “квантовых симметрий” (т.е. степени, кратной d). Это кольцо – конечномерное линейное пространство: после фактора по $\langle \partial W_0/\partial x_i \rangle$ степени квазиоднородности его базисных элементов не больше $3d$. По степеням естественно ввести градуировку: $R^{\mathcal{Q}} = R^0 \oplus R^d \oplus R^{2d} \oplus R^{3d}$; тогда размерности компонент фиксированной градуировки равны $\dim R^{0,d,2d,3d} = (1, h, h, 1)$. Введем также спаривание η (билинейный функционал) на этом кольце, матрица которого в базисе E_μ, $\mu = 1, \ldots, 2h+2$

$$\eta(e_\mu, e_\nu) \equiv \eta_{\mu\nu} = \mathrm{Res}\, \frac{E_\mu E_\nu}{\prod\limits_{i=1}^{5} \partial_i W_0}. \tag{5}$$

В $\mathbb{C}^5$ можно определить $\mathcal{Q}$-инвариантные когомологии $(H_{D\pm})_{\mathcal{Q}}$ оператора $D_\pm = d \pm dW_0 \wedge$. Тогда группа $(H^5_{D\pm})_{\mathcal{Q}}$ изоморфна R^Q как линейное пространство; базис в ней – формы вида $E_\mu(x)\, d^5x$. К ним определяются дуальные гомологии $H_5(\mathbb{C}^5, \mathrm{Re}\, W_0 \to \pm\infty)_{\mathcal{Q}}$, такие, что невырождено спаривание с помощью “осциллирующих интегралов”: для $L_a^\pm \in H_5(\mathbb{C}^5, \mathrm{Re}\, W_0 \to \pm\infty)$ оно задается формулой

$$\langle E_\mu d^5x,\, L_a^\pm \rangle = \int\limits_{L_a^\pm} E_\mu e^{\mp W_0(x)}\, d^5x. \tag{6}$$

Между $H_5(\mathbb{C}^5, \mathrm{Re}\, W_0 \to \pm\infty)_{\mathcal{Q}}$ и $H_3(X, \mathbb{R})$, где X – многообразие Калаби–Яу, заданное нулями полинома $W(x, \phi)$, можно построить изоморфизм. Используя его свойства и заданные ранее определения, интересующий нас кэлеров потенциал записывается в удобном для вычислений виде

$$e^{-K_c(X)} = \sigma_\mu^+ \eta_{\mu\lambda} \mathcal{M}_{\lambda\nu} \overline{\sigma_\nu^-}; \tag{7}$$

$$\sigma_\mu^\pm = \int\limits_{\Gamma_\mu^\pm} e^{\mp W(x,\phi)},\ \mathcal{M} = T^{-1}\overline{T},\ T_{a\mu}^\pm = \int\limits_{L_a^\pm} e_\mu e^{\mp W_0}\, d^5x; \tag{8}$$

$$\Gamma_\mu^\pm :\ \int\limits_{\Gamma_\mu^\pm} e^{\mp W_0(x)} e_\nu\, d^5x = \delta_{\mu\nu}. \tag{9}$$

Важно, что циклы $L_a^\pm$ нужно брать вещественными; матрица $\mathcal{M}$ не зависит от их выбора. Перейдем к рассмотрению исследуемых примеров. Рассмотрим взвешенное проективное пространство $\mathbb{P}_{9,26,11,23,20}$ и полином

$$0 = W_0 = x_1^7 x_2 + x_2^3 x_3 + x_3^6 x_4 + x_4^3 x_5 + x_5^4 x_1,$$

$$M = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Его степень квазиоднородности $d = 89$. Пространство модулей его комплексных структур определяется мономиальными деформациями, удовлетворяющими описанным ранее условиям. Таких мономов всего $h = 7$ и их показатели степеней удобно записать в матрицу S

$$e_l = \prod_{j=1}^{5} x_j^{S_{lj}},\ S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{11}$$

В киральном кольце образуют базис $E_1 = 1$, h мономов $E_{l+1} \equiv e_l$ степени d, а также следующие мономы степеней $2d$ и $3d$ (всего $2h + 2 = 16$ мономов E_α):

$$E_{h+1+i} = (e_1^2,\, e_1e_2,\, e_1e_4,\, e_1e_5,\, e_1e_6,\, e_1e_7,\, e_4^2);$$
$$E_{16} = e_1e_2e_7. \tag{12}$$

Можно найти матрицу спаривания η, как в (5); в нашем базисе с точностью до перестановок базисных элементов она единичная антидиагональная.

Рассмотрим в $\mathbb{C}_5$ относительные гомологии $H_5(\mathbb{C}_5,\ \mathrm{Re}\ (W_0) \to \infty)_Q$. Выберем в них базис Γ_μ, дуальный к формам $E_\alpha(x)\, d^5x$ относительно осциллирующих интегралов, согласно (9). Из (8) кэлеров потенциал выражается через величины

$$\sigma_\beta^+(\phi) = \int\limits_{\Gamma_\beta} e^{-W(x,\phi)} = \sum_{m_1, m_2, \ldots, m_h = 0}^{\infty} (-1)^{\sum m_l} \times$$
$$\times \prod_{l=1}^{h} \frac{\phi_l^{m_l}}{m_l!} \int\limits_{\Gamma_\beta} d^5x \prod_{l=1}^{h} e_l^{m_l} e^{-W_0(x)} \tag{13}$$

и аналогичные ряды с другими знаками. Можно эффективно понижать степень подынтегрального выражения, пользуясь тем, что для любой 4-формы Ω

$$\int\limits_{\Gamma_\mu} e^{-W_0}\,(d\Omega - dW_0\wedge\Omega) = \int\limits_{\Gamma_\mu} d(\Omega e^{-W_0}) = 0. \qquad (14)$$

Используя эти соотношения, можно получить пять элементарных соотношений для понижения степеней. Обозначая

$$f_\beta(\mathbf{b}\equiv(b_1,b_2,b_3,b_4,b_5)) = \int\limits_{\Gamma_\beta} d^5x\, e^{-W_0} x_1^{b_1}\dots x_5^{b_5},$$

а также i строку матрицы M как $M_{i\bullet}$, эти пять соотношений можно компактно записать в виде

$$f_\beta(\mathbf{b}) = f_\beta(\mathbf{b}-M_{i\bullet})\cdot B_i(\mathbf{b}),\ i=1,\dots,5 \qquad (15)$$

$$B_i = b_j(M^{-1})_{ji} - \frac{A_i}{17};\ B = \mathbf{b}\cdot(M^{-1}) - \frac{\mathbf{A}}{17}, \quad \mathbf{A} = (15,12,15,12,14). \qquad (16)$$

Если мы имеем произведение мономов вида $\prod\limits_{l=1}^{h} e_l^{m_l}$, то соответствующая ему строка показателей степеней x

$$\mathbf{b}[\mathbf{m}\equiv(m_1,\dots,m_7)] = \mathbf{m}\cdot S. \qquad (17)$$

Соответствующие такому $\mathbf{b}$ коэффициенты B

$$B(\mathbf{b}[\mathbf{m}]) = \mathbf{m}\cdot(SM^{-1}) - \frac{\mathbf{A}}{17}. \qquad (18)$$

Для дальнейшего введем обозначения для элементов строки B как функций от набора целых чисел $\mathbf{m}$; в данном случае она имеет вид

$$B(\mathbf{b}[\mathbf{m}]) \equiv \frac{1}{17}\begin{pmatrix}\nu & \rho & \nu & \rho & \mu\end{pmatrix}(\mathbf{m}). \qquad (19)$$

Теперь мы хотим переписать общие соотношения (15) так, чтобы они позволили понижать числа m в произведениях такого типа. Такие соотношения приходится искать подбором; они приведены ниже:

$$f_\beta\,(\mathbf{b}[\mathbf{m}]) = \frac{\mu(\mathbf{m})}{17} f_\beta(\mathbf{b}[\mathbf{m}+F_{j\bullet}]) = = \begin{cases}\frac{\nu^2(\mathbf{m})}{17^2} f_\beta(\mathbf{b}[\mathbf{m}+F_{6\bullet}])\\ \frac{\rho^2(\mathbf{m})}{17^2} f_\beta(\mathbf{b}[\mathbf{m}+F_{7\bullet}])\end{cases},\ j=1,\dots,5, \qquad (20)$$

$$F = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1\\ -1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (21)$$

Редукция по первым 5 формулам понижает μ на 17, а другие два числа (ν и ρ) не меняет; аналогичное верно для других двух способов понижения степени. Таким образом, остаток по модулю 17 у всех трех чисел не меняется в результате такого понижения. Любое из чисел $\mathfrak{m} = \mu \bmod 17$, $\mathfrak{n} = \nu \bmod 17$, $\mathfrak{r} = \rho \bmod 17$ однозначно определяет моном из кирального кольца, к которому мы придем в конце процедуры; можно перенумеровать мономы, например, числом $\beta = \mathfrak{m} \in [1,16]$, тогда $\mathfrak{n}[\beta] = \frac{2\mathfrak{m}}{3}$; $\mathfrak{r}[\beta] = \frac{5\mathfrak{m}}{3}$. Итак, мы приходим к выражению

$$\sigma_\beta^+(\phi) = \sum_{\substack{m_1,\dots,m_h=0\\ \mathfrak{m}(\mathbf{m})=\beta}}^{\infty} (-1)^{\sum m_l}\left(\prod_l \frac{\phi_l^{m_l}}{m_l!}\right)\times \times \frac{\Gamma(\frac{\mu(\mathbf{m})}{17}+1)}{\Gamma(\frac{\mathfrak{m}(\mathbf{m})}{17})}\frac{\Gamma^2(\frac{\nu(\mathbf{m})}{17}+1)}{\Gamma^2(\frac{\mathfrak{n}(\mathbf{m})}{17})}\frac{\Gamma^2(\frac{\rho(\mathbf{m})}{17}+1)}{\Gamma^2(\frac{\mathfrak{r}(\mathbf{m})}{17})}. \qquad (22)$$

Как можно проверить, σ_β^- отличаются фактором $(-1)^{|\beta|}$, где $|\beta|$ – градуировка соответствующего монома в киральном кольце ($|\beta| = 0,1,2,3$). Теперь мы должны выбрать базис из вещественных циклов L_a и вычислить матрицу перехода T от Γ к L; из дуальности Γ и E следует, что она дается выражением

$$T_{a\beta} = \int\limits_{L_a} E_\beta\, e^{-W_0} d^5x. \qquad (23)$$

Сделаем сперва замену переменных

$$x_i = \prod_{j=1}^{5} y_j^{17(M^{-1})_{ij}}, \qquad (24)$$

при которой W_0 перейдет в $W_0(x(y)) = \sum y_i^{17}$, а все мономы $E_\alpha(x)$ – в мономы по y с целыми степенями.

Определим одномерный цикл в виде "уголка" условиями (с произвольно заданной ориентацией)

$$C[y,\varphi] = \{\mathrm{Arg}\ y = \varphi \text{ or } \mathrm{Arg}\ y = \varphi + \frac{2\pi}{17}\}. \qquad (25)$$

Тогда набор из 16 базисных циклов L_a можно выбрать в виде циклов Лефшеца

$$L_a = C[y_1, \frac{2\pi a}{17}] \times \prod_{i=2}^{5} C[y_i, 0],\ a = 1,\dots,16. \qquad (26)$$

Очевидно, что они удовлетворяют условию $\mathrm{Re}\ W_0 \to \to \infty$, $y\to\infty$. Теперь можно вычислить матрицу T для таких циклов, матрицу $\mathcal{M} = T^{-1}\overline{T}$ и, наконец, матрицу $(\eta\mathcal{M})$ – она оказывается диагональной:

$$(\eta\mathcal{M})_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}\cdot\gamma(\mathfrak{m}[\mu]/17)\gamma^2(\mathfrak{n}[\mu]/17)\gamma^2(\mathfrak{r}[\mu]/17),$$

$$\gamma(x) = \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(1-x)}. \tag{27}$$

Мы получаем итоговый ответ (здесь σ_β заданы формулой (22))

$$e^{-K_c(\phi)} = \\ = \sum_{\mu=1}^{16} (-1)^{|\mu|} \gamma\left(\frac{\mu}{17}\right) \gamma^2\left(\frac{\mathfrak{n}[\mu]}{17}\right) \gamma^2\left(\frac{\mathfrak{r}[\mu]}{17}\right) \cdot |\sigma_\mu(\phi)|^2. \tag{28}$$

Второй пример многообразия того же типа задан взвешенным проективным пространством $\mathbb{P}_{25,16,31,36,83}$ и уравнением

$$0 = W_0(x) = x_1^7 x_2 + x_2^{10} x_3 + x_3^5 x_4 + x_4^3 x_5 + x_5^2 x_1 = 0,$$

$$M = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \tag{29}$$

В тех же обозначениях, что для первого примера, соответствующие ему данные: $d = 191, h = 4$,

$$e_l = \prod_{j=1}^{5} x_j^{S_{lj}}, \; S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{30}$$

Базис в киральном кольце

$$E_\alpha = \left(1, e_1, e_2, e_3, e_1e_3, e_4, e_1e_4, \frac{e_1e_3e_4}{e_2}, e_3e_4, e_1e_3e_4\right). \tag{31}$$

Элементы вектор-строки появляющихся при понижении коэффициентов мы обозначим как

$$B(\mathbf{b}[\mathbf{m}]) = \mathbf{m}\cdot(SM^{-1}) - \frac{\mathbf{A}}{11} \equiv \frac{1}{11}\begin{pmatrix}\mu & \mu & \nu & \lambda & \kappa\end{pmatrix}(\mathbf{m}),$$

$$\mathbf{m} = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 & m_3 & m_4 \end{pmatrix}, \; \mathbf{A} = (10, 10, 9, 8, 7). \tag{32}$$

4 соотношения для понижения степеней в терминах чисел m имеют вид

$$f_\alpha(\mathbf{b}[\mathbf{m}]) = \frac{\mu^2(\mathbf{m})}{11^2} f_\alpha(\mathbf{b}[\mathbf{m} + F_{1\bullet}]) = \\ = \begin{cases} \frac{\nu(\mathbf{m})}{11} f_\alpha(\mathbf{b}[\mathbf{m} + F_{2\bullet}]) \\ \frac{\lambda(\mathbf{m})}{11} f_\alpha(\mathbf{b}[\mathbf{m} + F_{3\bullet}]) \\ \frac{\kappa(\mathbf{m})}{11} f_\alpha(\mathbf{b}[\mathbf{m} + F_{4\bullet}]) \end{cases} \tag{33}$$

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{34}$$

Мономы из кирального кольца теперь однозначно задаются любым из чисел

$$\mathfrak{m}(m) = \mu(\mathbf{m}) \mod 11, \; \mathfrak{n}(\mathbf{m}) = \nu(\mathbf{m}) \mod 11, \\ \mathfrak{l}(\mathbf{m}) = \lambda(\mathbf{m}) \mod 11, \; \mathfrak{k}(\mathbf{m}) = \kappa(\mathbf{m}) \mod 11. \tag{35}$$

Занумеровав их, например, числом $\mathfrak{m} = \alpha$, получаем формулу для периодов

$$\sigma_\alpha^+ = \sum_{\substack{m_1,\ldots,m_h=0 \\ \mathfrak{m}(\mathbf{m})=\alpha}}^{\infty} (-1)^{\sum m_a} \left(\prod_a \frac{\phi_a^{m_a}}{m_a!}\right) \frac{\Gamma^2\left(\frac{\mu(\mathbf{m})}{11}+1\right)}{\Gamma^2\left(\frac{\mathfrak{m}(\mathbf{m})}{11}\right)} \times \\ \times \frac{\Gamma\left(\frac{\nu(\mathbf{m})}{11}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{\mathfrak{n}(\mathbf{m})}{11}\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{\lambda(\mathbf{m})}{11}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{\mathfrak{l}(\mathbf{m})}{11}\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{\kappa(\mathbf{m})}{11}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{\mathfrak{k}(\mathbf{m})}{11}\right)}. \tag{36}$$

Для нахождения матрицы $\mathcal{M}$ мы делаем аналогичную (24) замену $x_i = \prod y_j^{11(M^{-1})_{ij}}$; она обладает теми же свойствами, что раньше. Базис из циклов L_a выбирается аналогичным (25) образом, только теперь C – "угол" раствора $\frac{2\pi}{11}$. Вычислив матрицу $\mathcal{M}$, получаем ответ для кэлерова потенциала

$$e^{-K_c(\phi)} = \sum_{\beta=1}^{10} (-1)^{|\beta|} \gamma^2\left(\frac{\beta}{11}\right) \times \\ \times \gamma\left(\frac{\mathfrak{n}[\beta]}{11}\right) \gamma\left(\frac{\mathfrak{l}[\beta]}{11}\right) \gamma\left(\frac{\mathfrak{k}[\beta]}{11}\right) |\sigma_\beta|^2. \tag{37}$$

Для дальнейшего опишем две конструкции построения зеркального многообразия для Калаби–Яу-гиперповерхностей во взвешенном проективном пространстве.

Первая из них приведена в [2]. Она описывает зеркальное семейство как орбифолд в другом взвешенном проективном пространстве. Имея 5×5 матрицу коэффициентов M, для построения зеркального многообразия нужно:

1. построить полином W' с матрицей показателей $M' = M^T$;
2. найти набор весов k_i' таких, что полином W' квазиоднороден по отношению к ним со степенью $d' = \sum k_i'$; они задают новое взвешенное проективное пространство;
3. определить многообразие X', заданное как гиперповерхность в этом проективном пространстве нулями W';
4. найти полную группу фазовых симметрий A полинома W' и группу его "геометрических

симметрий" G' как фактор A по группе $\mathcal{Q}' = \mathbb{Z}_{d'}$ "квантовых" симметрий полинома W': $G' = A/\mathcal{Q}'$, аналогично определить группу геометрических симметрий G полинома W;

5. при несовпадении G' и $\mathcal{Q}$ взять орбифолд многообразия X' по некоторой дискретной группе H так, чтобы для фактор-многообразия выполнялось $\mathcal{Q}'' = \mathcal{Q}' \times H = G$ и $G'' = G'/H = \mathcal{Q}$.

Вторая – конструкция Батырева – описывает зеркальное многообразие как подмногообразие в торическом, заданное критическими точками некоторого полинома. Она описана и использована, например, в [4]. Торическим называют многообразие вида $(\mathbb{C}^N - Z)/(\mathbb{C}^*)^h$, где действие $(\mathbb{C}^*)^h$ на проективные координаты y_a, $a = 1, \ldots, N$ определяется "матрицей зарядов" Q:

$$y_a \to \prod_{l=1}^{h} \lambda_l^{Q_{la}} y_a, \quad \lambda_l \in \mathbb{C}^*, \tag{38}$$

а Z является инвариантным относительно этого действия множеством. Набор весов Q_{la} в нашем случае определяется следующим образом: показатели степеней входящих в состав полинома мономов вместе с его деформациями задают набор из $h+5$ пятимерных векторов v_a; их координаты задаются матрицей

$$v_{ia} = \left(M^T | S^T\right), \; i = 1, \ldots, 5, \; a = 1, \ldots, h+5. \tag{39}$$

Тогда матрица Q определяется при поиске интегрального базиса из h целочисленных линейных соотношений на эти вектора вида $\sum\limits_{a=1}^{h+5} Q_{la} v_{ia} = 0$. Соотношения задают интегральный базис, если любое целочисленное соотношение на v может быть представлено суммой с целыми коэффициентами соотношений $Q_{l\bullet}$.

В следующей части мы покажем соответствие этих двух конструкций явным построением для наших примеров полиномов, задающих подмногообразие в торическом. Сначала приведем ответ, дающийся конструкцией Берглунда–Хубша; в обоих случаях, как легко проверить, орбифолда брать не нужно и зеркальное многообразие определяется как (для 1 и 2 примеров соответственно)

$$1: \mathbb{P}_{5,2,3,5,2}, \; 0 = V_0 = y_1^3 y_2 + \\ + y_2^7 y_3 + y_3^4 y_4 + y_4^3 y_5 + y_5^6 y_1, \; d_M = 17; \tag{40}$$

$$2: \mathbb{P}_{1,1,2,3,4}, \; 0 = V_0 = y_5 y_1^7 + \\ + y_1 y_2^{10} + y_2 y_3^5 + y_3 y_4^3 + y_4 y_5^2, \; d_M = 11. \tag{41}$$

Выпишем интегральный базис целочисленных соотношений Q для двух наших примеров:

$$1: \; Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$2: \; Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{42}$$

Полином, определяющий своими критическими точками подмногообразие в торическом, должен быть инвариантным при действии $(\mathbb{C}^*)^h$, т.е. быть линейной комбинацией мономов $U(y) = \sum f_j(y)$ таких, что

$$f_j = \prod_{a=1}^{h+5} y_a^{P_{aj}}, \; \sum_{a=1}^{h+5} Q_{la} P_{aj} = 0 \;\; \forall j, l. \tag{43}$$

Выберем 5 таких мономов так, чтобы P_{aj} для $a = 1, \ldots, 5$ совпадали с элементами матрицы M_{aj}. Тогда из условия (43) однозначно восстанавливается P_{aj} для $a = 6, \ldots, h+5$ из решения системы линейных уравнений. Из построения матрицы Q следует, что в обоих случаях $P_{aj} = S_{a-5,j}$, $a = 6, \ldots, h+5$. Рассмотрим теперь симметрии торического многообразия с генераторами (для 1 и 2 примеров соответственно)

$$1: \; \mathfrak{Q} = 5Q_1 - 7Q_2 + Q_3 - 2Q_4 - 2Q_6 - 5Q_7; \\ 2: \; \mathfrak{Q} = Q_1 + 2Q_2 + 3Q_3 + 4Q_4. \tag{44}$$

Эта симметрия тривиально действует на проективные координаты y_a для $a > 6$, а ее действие на первые 5 совпадает с действием $\mathbb{C}^*$ на проективные координаты в соответствующем взвешенном проективном пространстве; скажем, в 1 примере

$$\mathfrak{Q}: \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_6 \end{pmatrix} \to \\ \to \begin{pmatrix} y_1\lambda^2 & y_2\lambda^5 & y_3\lambda^2 & y_4\lambda^5 & y_5\lambda^3 & y_6\lambda^{-17} \end{pmatrix}. \tag{45}$$

Используя остальные $h-1$ независимых симметрий, можно тривиализовать зависимость от $h-1$ переменной y_a, $a > 6$, обратив их в единицу. После этого для обоих примеров полином $U(y)$ приобретает вид

$$U(y) = y_6 V_0(y_1, \ldots, y_5). \tag{46}$$

Его критические точки определяются условиями $V_0 = 0$ и $y_6 = 0$ (в силу невырожденности W_0). Второе условие, с учетом действия $\mathfrak{Q}$-симметрии, определяет взвешенное проективное пространство, совпадающее с полученным из конструкции Берглунда–Хубша, а первое – нужную гиперповерхность в нем. Мы показали, что конструкции согласованы только в одной точке пространства модулей; но таким же образом можно убедиться, что все семейство с различными комплексными структурами, заданное полиномом с деформациями $V(\psi) = V_0 + \sum \psi_k e_k$, "вкладывается" в торическое многообразие по Батыреву.

Таким образом, основным результатом данной работы является вычисление кэлерова потенциала на пространстве комплексных модулей для двух семейств Калаби–Яу-гиперповерхностей во взвешенном проективном пространстве из не рассматриваемого ранее типа; также построены и описаны двумя способами зеркальные к ним семейства и показана эквивалентность этих двух способов. Полученные нами выражения имеют простую структуру, до определенной степени унифицируемы и позволяют предположить общий вид ответа. Более подробное исследование этого вопроса вместе с проверкой зеркальной версии JKLMR-гипотезы (см. [7]) с использованием полученных результатов мы оставляем для дальнейшей работы.

Мы благодарны А. Белавину и М. Белаковскому за полезные обсуждения.

Работа была проведена при поддержке гранта Российского научного фонда # 18-12-00439.

1. P. Candelas, G. T. Horowitz, A. Strominger, and E. Witten, Nucl. Phys. B **258**, 46 (1985); DOI: https://doi.org/10.1016/0550-3213(85)90602-9.
2. P. Berglund and T. Hübsch, Nucl. Phys. B **393**, 393(1–2), 377 (1993); DOI: 10.1016/0550-3213(93)90250-s; arXiv: hep-th/9201014 [hep-th].
3. K. Aleshkin and A. Belavin, JETP Lett. **108**(10), 705 (2018); DOI: 10.1134/s0021364018220010; aXiv: 1806.02772 [hep-th].
4. K. Aleshkin, A. Belavin, and A. Litvinov, J. Stat. Mech.: Theory Exp. **2019**(3), 034003 (2019); DOI: 10.1088/1742-5468/ab081a; arXiv: 1812.00478 [hep-th].
5. A. A. Belavin and B. A. Eremin, Theor. Math. Phys. **201**(2), 1606 (2019); DOI: 10.1134/s0040577919110060; arXiv: 1907.11102 [hep-th].
6. K. Aleshkin and A. Belavin, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical **51**(5), 055403 (2018); DOI: 10.1088/1751-8121/aa9e7a; arXiv: 1706.05342 [hep-th].
7. H. Jockers, V. Kumar, J. M. Lapan, D. R. Morrison, and M. Romo, Commun. Math. Phys. **325**, 1139 (2014); DOI: 10.1007/s00220-013-1874-z; arXiv: 1208.6244.