Письма в ЖЭТФ, том 112, вып. 6, с. 388 – 393

Зеркальные пары орбифолдов квинтики

А. Белавин[+×∘1)], *Б. Еремин*[+*×∘]

[+]*Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау, 142432 Черноголовка, Россия*

[*]*Сколковский институт науки и технологий, 143026 Москва, Россия*

[×]*Московский физико-технический институт, 141700 Долгопрудный, Россия*

[∘]*Институт проблем передачи информации им. А. А. Харкевича, 127994 Москва, Россия*

Поступила в редакцию 3 сентября 2020 г.
После переработки 3 сентября 2020 г.
Принята к публикации 3 сентября 2020 г.

В этой работе мы сравниваем две конструкции построения зеркальных пар многообразий Калаби–Яу на примере орбифолдов Квинтики $\mathcal{Q}$. Первая – конструкция Берглунда–Хубша–Кравитца (БХК) состоит в следующем. Мы рассматриваем фактор X гиперповерхности $\mathcal{Q}$ по некоторой подгруппе H' максимально допустимой группы SL. Тогда зеркальное многообразие Y определяется как фактор по дополнительной подгруппе ${H'}^T$. Вторая – конструкция Батырева определяет по данным полинома W_X, задающего Калаби–Яу X, торическое многообразие T, содержащее зеркало Y как гиперповерхность, задаваемую нулями полинома W_Y. Сам полином W_Y мы находим в явном виде. По виду W_Y мы находим его группу симметрии и проверяем, что она совпадает с предсказанной конструкцией БХК.

DOI: 10.31857/S1234567820180111

Многообразия Калаби–Яу возникают при компактификации 6 из 10 измерений в теории суперструн [1], которая является способом объединить Стандартную модель и Квантовую гравитацию. Эффективная теория определяется в терминах так называемой Специальной геометрии, которая возникает на пространстве модулей [2] многообразий Калаби–Яу и их зеркал. Мы проводим изучение зеркальных пар на примере трех случаев орбифолдов квинтики. Мы рассматриваем многообразия Калаби–Яу, определяемые как гиперповерхности во взвешенном проективном пространстве

$$\mathbb{P}^4_{(k_1,k_2,k_3,k_4,k_5)} = \Big\{(x_1,\dots,x_5)\in\mathbb{C}^5\backslash\{0\}\;\Big|\; x_i\sim\lambda^{k_i}x_i\Big\}. \tag{1}$$

Пусть M – матрица степеней квазиоднородного полинома $W_M(x) := \sum_{i=1}^5\prod_{j=1}^5 x_j^{M_{ij}}$, т.е.

$$W_M(\lambda^{k_i}x) = \lambda^d W_M(x), \tag{2}$$

который задает гиперповерхность уравнением $W_M(x) = 0$. Матрица M – обратима и имеет тип Ферма, цепь, или петля [3], что вместе с равенством

$$d = \sum_i^5 k_i \tag{3}$$

является условием того, что гиперповерхность является многообразием Калаби–Яу.

Полное семейство Калаби–Яу X_M получается при деформации исходного полинома W_M допустимыми мономами

$$W(x,\varphi) = W_M(x) + \sum_{l=1}^h \varphi_l \prod_{i=1}^5 x_i^{S_{li}}. \tag{4}$$

Параметры φ_l являются модулями комплексной структуры многообразия X_M.

Заметим, что из (1) и (3) следует, что если взять

$$\lambda = \omega, \quad \omega^d = 1, \tag{5}$$

то полином $W_M(x)$ инвариантен относительно группы преобразований Q_M, которая действует как

$$x_i \mapsto \omega^{k_i} x_i. \tag{6}$$

Группа Q_M называется группой квантовой симметрии. У полинома W_M может быть большая группа симметрии, назовем ее $\mathrm{Aut}(M)$, $Q_M\subset\mathrm{Aut}(M)$, а ее порядок равен [3]

$$|\mathrm{Aut}(M)| = \det M. \tag{7}$$

Группа $\mathrm{Aut}(M)$ порождена генераторами $q(M)_i$, $i = 1,\dots,5$, которые действуют на каждой координате x_j как

$$q_i(M): x_j \mapsto e^{2\pi i B_{ji}} x_j, \tag{8}$$

1) e-mail: sashabelavin@gmail.com

где матрица B является обратной к M.

Генератором квантовой группы Q_M является произведение $\prod_{i=1}^5 q_i(M)$, которое действует на x_i как в (6). В группе $\mathrm{Aut}(M)$ есть подгруппы, которые сохраняют голоморфную, неизчезающую на X_M 3-форму Ω или, что эквавалентно, сохраняет $\prod_{i=1}^5 x_i$. Такие подгруппы называются допустимыми. Пусть $SL(M)$ обозначает максимальную допустимую подгруппу.

Имеет место цепочка вложений $Q_M \subseteq SL(M) \subseteq \subseteq \mathrm{Aut}(M)$.

Теперь мы можем определить орбифолд в X_M следующим образом. Выберем в $SL(M)$ некоторую подгруппу $H(M)$, которая включает (или равна) Q_M. Затем образуем из нее факторгруппу по Q_M

$$H'(M) := H(M)/Q_M. \tag{9}$$

Тогда по определению орбифолд:

$$Z(M,H) := X_M/H'(M). \tag{10}$$

Аналогичное построение мы можем сделать для матрицы M^T и получить четыре группы $Q_{M^T} \subseteq \subseteq H(M^T) \subseteq SL(M^T) \subseteq \mathrm{Aut}(M^T)$, где $H(M^T)$ – некоторая подгруппа $SL(M^T)$, а также орбифолд $Z(M^T, H^T)$.

Теперь встает вопрос: можно ли выбрать эти группы, и если можно, то как, чтобы $Z(M,H)$ и $Z(M^T, H^T)$ были зеркалами друг друга.

Конструкция Берглунда–Хубша–Кравитца (БХК) [4, 5] состоит в следующем. Пусть группа $H(M)$ оставляет инвариантными мономы

$$e_l(x) = \prod_{i=1}^5 x_i^{S_{li}} \tag{11}$$

для определенного подбора S_{li}. Такие мономы в сумме с $W_M(x)$ задают орбифолд $Z(M,H)$. Тогда по определению генераторами группы $H(M^T)$ являются

$$q(l) := \prod_{i=1}^5 q_i(M^T)^{S_{li}}, \tag{12}$$

где S_{li} как в (11), а генераторы группы $SL(M^T)$ определены действием на x_j

$$q_i(H^T) : x_j \mapsto e^{2\pi i B_{ij}} x_j. \tag{13}$$

Из (13) следует, что генераторы группы $H(M^T)$ действуют на координатах как

$$q(l) : x_j \mapsto e^{2\pi i B_{ij} S_{li}} x_j. \tag{14}$$

Определим теперь мономы как $e_m^T := \prod_{i=1}^5 z_i^{R_{mi}}$ из требования их инвариантности относительно этого действия группы $H(M^T)$.

Это требование удобно записать как

$$\langle l, m \rangle := B_{ij} S_{li} R_{mj} \in \mathbb{Z}. \tag{15}$$

Отметим, что ниже в этой статье речь будет идти об орбифолдах Квинтики, для которой $B_{ij} = \delta_{ij}/5$. В этом случае (15) переходит в условия

$$\sum_i S_{li} R_{mi} = 0 \ (\mathrm{mod}\ 5). \tag{16}$$

Гипотеза БХК предполагает,что полином W_{M^T} в сумме с суперпозицией e_m^T определяет зеркальный орбифолд $Z(M^T, H^T)$.

А теорема Киодо–Руана [6] утверждает зеркальную симметрию орбифолдов $Z(M,H)$ и $Z(M^T, H^T)$ на уровне когомологий.

В простейшем случае мы можем взять $H(M) = = Q_M$. Тогда орбифолд является исходным Калаби–Яу X_M, т.е. $Z(M, Q_M) = X_M$. Тогда зеркальным многообразием Калаби–Яу, обозначим его Y_M, является орбифолд по группе $SL'(M^T) := SL(M^T)/Q_{M^T}$.

$$Y_M \equiv Z(M^T, SL^T) = X_{M^T}/SL'(M^T). \tag{17}$$

Вторым подходом построения зеркальных пар Калаби–Яу является конструкция Батырева [7, 8]. Согласно этой конструкции, зеркало Y к исходному орбифолду X задается как гиперповерхность в торическом многообразии. Для начала опишем построение самого торического многообразия по X. Запишем полином, задающий семейство X_M в виде

$$W_X(x,\varphi) = \sum_{i=1}^5 \prod_{j=1}^5 x_j^{M_{ij}} + \sum_{l=1}^{h_X} \varphi_l \prod_{j=1}^5 x_j^{S_{jl}} = \\ = \sum_{a=1}^{5+h_X} C_a(\varphi) \prod_{j=1}^5 x_j^{V_{aj}}. \tag{18}$$

Показатели степеней мономов исходного полинома (18), задающего орбифолд X, являются векторами в решетке $\mathbb{Z}^5$, а именно $(\mathbf{V}_a)_j = V_{aj}$. Их также можно представить в виде матрицы $V^T = (M^T \mid S^T)$. В силу квазиоднородности, имеет место соотношение $\sum_{j=1}^5 V_{aj} k_j = d$. Поэтому вектора $(\mathbf{V}_a)_j$ лежат в четырехмерной решетке $\mathbb{Z}^4$ и образуют многогранник Батырева [8]. С другой стороны, те же вектора $\mathbf{V}_a$ являются ребрами веера [7], который определяет торическое многообразие T. Поскольку $h_X + 5$ векторов $\mathbf{V}_a$ лежат в четырехмерном пространстве, они должны удовлетворять h_X линейным соотношениям

$$\sum_{a=1}^{h_X+5} Q_{la} \mathbf{V}_a = 0, \quad l = 1, \ldots, h_X. \tag{19}$$

Эти соотношения определяют веса действия абелевой группы $(\mathbb{C}^*)^{h_X}$ в $\mathbb{C}^{h_X+4}$

$$y_a \to \lambda^{Q_{la}} y_a, \quad a = 1, \ldots, h_X + 4, \quad l = 1, \ldots, h_X, \tag{20}$$

задающее торическое многообразие

$$T := \frac{\left(\mathbb{C}^{h_X+4} - Z\right)}{\left(\mathbb{C}^*\right)^{h_X}}, \tag{21}$$

где множество Z является инвариантным относительно этого действия [7].

Следующим шагом будет построение гиперповерхности в T.

Зеркальное Калаби–Яу Y задается как нули некоторого квази-однородного полинома [9–11] $W_Y(y_1, \ldots, y_{h_X+4})$, т.е.

$$Y := \left\{(y_1, \ldots, y_{h_X+4}) \in T \;\middle|\; W_Y(y) = 0\right\}. \tag{22}$$

Мы находим явный вид полинома W_Y из условий однородности:

$$\begin{aligned} &W_Y(\lambda^{Q_{l1}} y_1, \ldots, \lambda^{Q_{l,h_X+4}} y_{h_X+4}) = \\ &= \lambda^d W_Y(y_1, \ldots, y_{h_X+4}), \quad i = 1, \ldots, h_X. \end{aligned} \tag{23}$$

Запишем многочлен W_Y в виде суммы некоторых мономов $L_i(y)$, которые мы найдем позднее

$$W_Y(y) = \sum_{i=1}^{h_Y+5} \tilde{C}_i(\psi) L_i(y), \quad L_i(y) = \prod_{a=1}^{h_X+4} y_a^{n_a^i}. \tag{24}$$

Из (23) и (24) получим системы уравнений на показатели степеней n_a (здесь мы опустили индекс i для краткости)

$$\sum_{a=1}^{h_X+4} Q_{la} n_a = d, \quad l = 1, \ldots, h_X. \tag{25}$$

Заметим, что всегда мы знаем шесть решений системы (25). Поскольку

$$\sum_{i=1}^{5} V_{ai} k_i = d, \quad \sum_{a=1}^{h_X+5} Q_{la} V_{ai} = 0, \quad Q_{h_X, h_X+5} = -d, \tag{26}$$

то эти $5+1$ решения (25) имеют вид

$$n_a^i = V_{ai}, \quad i = 1, \ldots, 5, \tag{27}$$

$$n_a^6 = 1, \tag{28}$$

где $a = 1, \ldots, h_X + 4$.

Полином W_Y состоит всего из $h_Y + 5$ инвариантных мономов, и их степени находятся из решений (25) наложением дополнительных условий неотрицательности степеней $n_a^i \geqslant 0$. Здесь $h_Y := h_{21}^Y$ – число Ходжа многообразия Калаби–Яу Y. Таким образом, нужно решать систему

$$\begin{gathered} \sum_{a=1}^{h_X+4} Q_{la} n_a = d, \; n_a \geqslant 0, \\ l = 1, \ldots, h_X, \; a = 1, \ldots, h_X + 4. \end{gathered} \tag{29}$$

Используя симметрию действия тора, можно сделать замену на инвариантные относительно $(\mathbb{C}^*)^{h_X}$ (проективные) координаты

$$z_j = \prod_{a=1}^{h_X+4} y_a^{V_{aj}/5}. \tag{30}$$

Тем самым мы сводим торическое многообразие к проективному пространству $\mathbb{P}^4$. В координатах z_j полином W_Y имеет вид

$$W_Y(z) = \sum_{i=1}^{5} \prod_{j=1}^{5} x_j^{M_{ji}} + \sum_{m=1}^{h_Y} \psi_m e_m^T(z). \tag{31}$$

Мы видим, что зеркало Y определяется транспонированной матрицей M^T.

По виду деформаций $e_m^T(z)$ пространства комплексных модулей многообразия Y мы находим группу симметрии полинома W_Y и можем проверить, совпадает ли она с группой H^T, получаемой процедурой Кравитца.

Ниже мы рассмотрим применение этих двух конструкций к орбифолдам Квинтики. Полное семейство в этом случае задается уравнением в проективном пространстве

$$\begin{aligned} &\mathcal{Q} = \Bigg\{(x_1, \ldots, x_5) \in \\ &\in \mathbb{P}^4 \;\Bigg|\; W_{\mathcal{Q}}(x, \varphi) := W_0(x) + \sum_{s=1}^{101} \varphi_l e_l(x) = 0\Bigg\}, \end{aligned} \tag{32}$$

где

$$W_0(x) := x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 + x_4^5 + x_5^5, \;\; e_l = \prod_{i=1}^{5} x_i^{S_{li}}, \; 0 \leq S_{li} \leq 3, \tag{33}$$

а φ_l – модули комплексной структуры многообразия $\mathcal{Q}$.

В случае Квинтики матрица степеней диагональна и равна $M = 5I$, где I – единичная. А также $W_M = W_{M^T} \equiv W_0$. Исходный полином $W_0(x)$ имеет группу квантовой симметрии $Q_{5I} = \mathbb{Z}_5[1,1,1,1,1]$. Полная группа симметрии молинома есть $\mathrm{Aut}(5I) = \mathbb{Z}_5^5$ с генераторами, действующими как $q_i(5I)$:

$x_i \mapsto e^{2\pi i/d}x_i$. А группа, сохраняющая произведение $\prod_{i=1}^5 x_i$, есть

$$SL(5I) = \mathbb{Z}_5^4 = \mathbb{Z}_5[1,0,0,0,4] \oplus \mathbb{Z}_5[0,1,0,0,4] \oplus \oplus \mathbb{Z}_5[0,0,1,0,4] \oplus \mathbb{Z}_5[0,0,0,1,4]. \quad (34)$$

Группу $SL(5I)$ иногда называют макисмально допустимой группой полинома W_0. Она содержит диагональ $Q_{5I} = \mathbb{Z}_5[1,1,1,1,1]$, а факторгруппа равна

$$SL'(5I) := SL(5I)/Q_{5I} = \mathbb{Z}_5[0,1,0,0,4] \oplus \oplus \mathbb{Z}_5[0,0,1,0,4] \oplus \mathbb{Z}_5[0,0,0,1,4]. \quad (35)$$

Мы будем работать с орбифолдами Квинтики $X = \mathcal{Q}/H'$, которые задаются уравнением в $\mathbb{P}^4$

$$W_X(x,\varphi) := x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 + x_4^5 + x_5^5 + \sum_{l=1}^{h_X} \varphi_l e_l(x) = 0. \quad (36)$$

Здесь $h_X := h_{21}^X$ – число Ходжа. Мономы e_l являются инвариантными относительно группы H. Согласно процедуре, описанной выше, мы будем строить зеркальный орбифолд Калаби–Яу

$$Y := \mathcal{Q}/H'^T, \quad (37)$$

или в терминах исходного полинома

$$W_Y(z,\varphi) := z_1^5 + z_2^5 + z_3^5 + z_4^5 + z_5^5 + \sum_{m=1}^{h_Y} \psi_m e_m^T(z) = 0. \quad (38)$$

Мономы $e_m^T(z)$, в свою очередь, инвариантны относительно группы H^T.

Перейдем непосредственно к вычислению на примере трех орбифолдов.

Пример 1. В качестве первого примера рассмотрим орбифолд [12]

$$X = \frac{\mathcal{Q}}{\mathbb{Z}_5[0,1,1,4,4]}, \quad h_X = 17, \quad (39)$$

который задается нулями полинома

$$W_X(x) = x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 + x_4^5 + x_5^5 + \sum_{l=1}^{17} \varphi_l e_l(x) = \sum_{a=1}^{22} C_a \prod_{j=1}^{5} x_j^{V_{aj}}, \quad (40)$$

где $e_l(x) := \prod_{i=1}^5 x_i^{S_{li}}$ инвариантны относительно действия $H = \mathbb{Z}_5[1,1,1,1,1] \oplus \mathbb{Z}_5[0,1,1,4,4]$. Они равны:

$$\begin{gathered} e_1 = x_2^3x_3^2,\ e_2 = x_2^2x_3^3,\ e_3 = x_4^2x_5^3, \\ e_4 = x_4^3x_5^2,\ e_5 = x_1^3x_2x_4,\ e_6 = x_1^3x_3x_4, \\ e_7 = x_1^3x_3x_5,\ e_8 = x_1^3x_2x_5,\ e_9 = x_1x_2^2x_4^2, \\ e_{10} = x_1x_3^2x_5^2,\ e_{11} = x_1x_3^2x_4^2,\ e_{12} = x_1x_2^2x_5^2, \\ e_{13} = x_1x_2x_3x_4^2,\ e_{14} = x_1x_2x_3x_5^2, \\ e_{15} = x_1x_2^2x_4x_5,\ e_{16} = x_1x_3^2x_4x_5, \\ e_{17} = x_1x_2x_3x_4x_5. \end{gathered} \quad (41)$$

Согласно конструкции БХК зеркальное Калаби–Яу строится как орбифолд $Y = \mathcal{Q}/H'^T$. Группа H^T определяется генераторами $q(l) = \prod_{i=1}^5 q_i(5I)^{S_{li}}$, где S_{li} – суть степени мономов $e_l(x)$ в (41), а $q_i(5I)$ порождают группы $\mathbb{Z}_5[1,0,0,0,0], \ldots, \mathbb{Z}_5[0,0,0,0,1]$. Иначе говоря, группа H'^T порождена аддитивными группами $\mathbb{Z}_5[S_{l1}, S_{l2}, S_{l3}, S_{l4}, S_{l5}]$ по модулю действия $\mathbb{Z}_5[1,1,1,1,1]$. Оказывается, что в данном случае у группы H'^T два генератора, и она равна

$$H'^T = \mathbb{Z}_5[0,1,4,0,0] \oplus \mathbb{Z}_5[0,0,0,1,4]. \quad (42)$$

Альтернативно получить явный вид мономов $e_m(z) = \prod_{i=1}^5 z_i^{R_{mi}}$ в (44) можно, решая уравнения (16), т.е.

$$\sum_i S_{li}R_{mi} = 0 \ (\mathrm{mod}\ 5). \quad (43)$$

Решения уравнений (43) дают нам степени мономов. Они равны

$$\begin{gathered} e_1^T(z) = z_1z_2^2z_3^2,\ e_2^T(z) = z_1z_4^2z_5^2, \\ e_3^T(z) = z_1^3z_4z_5,\ e_4^T(z) = z_1^3z_2z_3, \\ e_5^T(z) = z_1z_2z_3z_4z_5. \end{gathered} \quad (44)$$

Тогда семейство зеркального орбифолда

$$Y = \frac{\mathcal{Q}}{\mathbb{Z}_5[0,1,4,0,0] \oplus \mathbb{Z}_5[0,0,0,1,4]}, \quad h_Y = 5 \quad (45)$$

определяется как решения

$$W_Y(z) = z_1^5 + z_2^5 + z_3^5 + z_4^5 + z_5^5 + \sum_{m=1}^{5} \psi_m e_m^T(z) = 0. \quad (46)$$

Применим теперь подход Батырева. Перепишем полином W_X в виде

$$W_X(x,\varphi) = \sum_{a=1}^{22} C_a(\varphi) \prod_{j=1}^{5} x_j^{V_{aj}}. \quad (47)$$

По векторам $\mathbf{V}_a$ мы находим веса действия тора. Запишем их в виде матриц

$$(V)_{aj} := V = \begin{pmatrix} 5I_{5\times5} \\ S \end{pmatrix},$$
$$(Q)_{la} := Q = \begin{pmatrix} S & | -5I_{17\times17} \end{pmatrix}, \tag{48}$$

где $S \in \mathrm{Mat}(\mathbb{Z})_{17\times5}$ определяется из (40). Используя данные Q_{la}, определим торическое многообразие

$$T = \frac{\mathbb{C}^{21} - Z}{\mathbb{C}^{*17}}, \tag{49}$$

а также определим полином, задающий зеркальный орбифолд Y

$$W_Y(y) = \sum_{i=1}^{h_Y+5} \tilde{C}_i \prod_{a=1}^{21} y_a^{n_a^i}. \tag{50}$$

Накладывая необходимые условия (23), получим систему уравнений:

$$\sum_{a=1}^{21} Q_{la} n_a = 5, \quad n_b \geqslant 0, \quad b = 1, \ldots, 21. \tag{51}$$

Решая уравнения (51), получаем наборы n_a и делаем замену координат в T, сводя его к $\mathbb{P}^4$. Получим полином, задающий орбифолд Y

$$W_Y(z) = z_1^5 + z_2^5 + z_3^5 + z_4^5 + z_5^5 + \sum_{m=1}^{5} \psi_m e_m^T(z), \tag{52}$$

где мономы $e_m^T(z)$ как в (44).

Таким образом результаты вычисления по двум конструкциям совпадают.

Пример 2. Следующий пример орбифолда

$$X = \frac{Q}{\mathbb{Z}_5[0,1,2,3,4]}, \quad h_X = 21. \tag{53}$$

Калаби–Яу X определяются нулями полинома

$$W_X(x) = x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 + x_4^5 + x_5^5 + \sum_{l=1}^{21} \varphi_l e_l(x) =$$
$$= \sum_{a=1}^{26} C_a \prod_{j=1}^{5} x_j^{V_{aj}}, \tag{54}$$

деформации полинома $e_l(x)$ инвариантны относительно группы $H = \mathbb{Z}_5[1,1,1,1,1] \oplus \mathbb{Z}_5[0,1,2,3,4]$:

$$\begin{gathered} e_1 = x_1^3x_3x_4, \ e_2 = x_1^3x_2x_5, \ e_3 = x_1^2x_2x_3^2, \\ e_4 = x_1^2x_2^2x_4, \ e_5 = x_1^2x_3x_5^2, \ e_6 = x_1^2x_4^2x_5, \\ e_7 = x_1x_2x_4^3, \ e_8 = x_1x_2^2x_5^2, \ e_9 = x_1x_4x_5^3, \\ e_{10} = x_1x_3^3x_5, \ e_{11} = x_1x_2^3x_3, \ e_{12} = x_1x_3^2x_4^2, \\ e_{13} = x_3^2x_4x_5^2, \ e_{14} = x_2x_3^3x_4, \ e_{15} = x_2x_3x_5^3, \\ e_{16} = x_2x_4^2x_5^2, \ e_{17} = x_2^2x_3x_4^2, \ e_{18} = x_2^2x_3^2x_5, \\ e_{19} = x_2^3x_4x_5, \ e_{20} = x_3x_4^3x_5, \\ e_{21} = x_1x_2x_3x_4x_5. \end{gathered} \tag{55}$$

Аналогично, как и в прошлом случае, конструкция БХК дает нам зеркальный орбифолд $Y = \mathcal{Q}/H'^T$, где

$$H'^T = \mathbb{Z}_5[0,1,3,1,0] \oplus \mathbb{Z}_5[0,1,1,0,3]. \tag{56}$$

А единственный моном, инвариантный относительно H^T есть $\prod_i z_i$. Тогда зеркальный орбифолд Калаби–Яу

$$Y = \frac{Q}{\mathbb{Z}_5[0,1,3,1,0] \oplus \mathbb{Z}_5[0,1,1,0,3]}, \quad h_Y = 1 \tag{57}$$

задается нулями полинома

$$W_Y(z) = z_1^5 + z_2^5 + z_3^5 + z_4^5 + z_5^5 + \psi z_1z_2z_3z_4z_5. \tag{58}$$

Перейдем к конструкции Батырева. Аналогично определяются набор векторов $\mathbf{V}_a$, $a = 1, \ldots, 26$, и целые числа Q_{la}, $l = 1, \ldots, 21$. Зеркало Y задается нулями полинома W_Y в торическом многообразии

$$T = \frac{\mathbb{C}^{25} - Z}{\mathbb{C}^{*21}}. \tag{59}$$

Накладывая аналогичные ограничения на степени мономов полинома W_Y, а также делая замену на проективные координаты, получаем его явный вид, который совпадает с (58).

Пример 3. Рассмотрим теперь орбифолд

$$X = \frac{Q}{\mathbb{Z}_5[0,0,0,1,4]}, \quad h_X = 25. \tag{60}$$

Полное семейство орбифолда Калаби–Яу X задается уравнением

$$W_X = x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 + x_4^5 + x_5^5 + \sum_{l=1}^{25} \varphi_l e_l(x) =$$
$$= \sum_{a=1}^{30} C_a \prod_{j=1}^{5} x_j^{V_{aj}}, \tag{61}$$

где мономы e_l инвариантны относительно $H = \mathbb{Z}_5[1,1,1,1,1] \oplus \mathbb{Z}_5[0,0,0,1,4]$:

$$\begin{gathered}
e_1 = x_1^3x_2^2,\ e_2 = x_1^3x_3^2,\ e_3 = x_2^3x_3^2,\\
e_4 = x_1^2x_2^3,\ e_5 = x_1^2x_3^3,\ e_6 = x_2^2x_3^3,\\
e_7 = x_1^3x_2x_3,\ e_8 = x_1x_2^3x_3,\ e_9 = x_1x_2x_3^3,\\
e_{10} = x_1^2x_2^2x_3,\ e_{11} = x_1^2x_2x_3^2,\ e_{12} = x_1x_2^2x_3^2,\\
e_{13} = x_1^3x_4x_5,\ e_{14} = x_2^3x_4x_5,\ e_{15} = x_3^3x_4x_5,\\
e_{16} = x_1^2x_2x_4x_5,\ e_{17} = x_1^2x_3x_4x_5,\\
e_{18} = x_2^2x_3x_4x_5,\ e_{19} = x_1x_2^2x_4x_5,\\
e_{20} = x_1x_3^2x_4x_5,\ e_{21} = x_2x_3^2x_4x_5,\\
e_{22} = x_1x_4^2x_5^2,\ e_{23} = x_2x_4^2x_5^2,\\
e_{24} = x_3x_4^2x_5^2,\ e_{25} = x_1x_2x_3x_4x_5.
\end{gathered} \tag{62}$$

Отметим, что в оригинальной статье Грина и Плессера [12] полное число Ходжа

$$h_X^{\mathrm{Full}} = h_X + h_X^{\mathrm{Laurent}} = 49. \tag{63}$$

Таким образом, есть еще 24 лорановских мономов среди деформаций исходного полинома W_0:

$$\begin{gathered}
g_1 = x_1^{-1}x_2x_3^3x_4x_5,\ g_2 = x_1x_2^{-1}x_3^3x_4x_5,\\
g_3 = x_1^3x_2x_3^{-1}x_4x_5,\ g_4 = x_1^{-1}x_2^2x_3^2x_4x_5,\\
g_5 = x_1^2x_2^{-1}x_3^2x_4x_5,\ g_6 = x_1^2x_2^2x_3^{-1}x_4x_5,\\
g_7 = x_1^{-1}x_2^3x_3x_4x_5,\ g_8 = x_1x_2^3x_3^{-1}x_4x_5,\\
g_9 = x_1^3x_2^{-1}x_3x_4x_5,\ g_{10} = x_1^{-1}x_3^2x_4^2x_5^2,\\
g_{11} = x_2^{-1}x_3^2x_4^2x_5^2,\ g_{12} = x_1^2x_3^{-1}x_4^2x_5^2,\\
g_{13} = x_1^{-1}x_2x_3x_4^2x_5^2,\ g_{14} = x_1x_2^{-1}x_3x_4^2x_5^2,\\
g_{15} = x_1x_2x_3^{-1}x_4^2x_5^2,\ g_{16} = x_1^{-1}x_2^2x_4^2x_5^2,\\
g_{17} = x_2^2x_3^{-1}x_4^2x_5^2,\ g_{18} = x_1^2x_2^{-1}x_4^2x_5^2,\\
g_{19} = x_1^{-1}x_4^3x_5^3,\ g_{20} = x_2^{-1}x_4^3x_5^3,\\
g_{21} = x_3^{-1}x_4^3x_5^3,\ g_{22} = x_1^{-1}x_2^3x_3^3,\\
g_{23} = x_1^3x_2^{-1}x_3^3,\ g_{24} = x_1^3x_2^3x_3^{-1}.
\end{gathered} \tag{64}$$

По конструкции БХК зеркальное Калаби–Яу есть

$$Y = \frac{Q}{\mathbb{Z}_5[0,1,4,0,0] \oplus \mathbb{Z}_5[0,3,0,1,1]}, \quad h_Y = 5, \tag{65}$$

и задается нулями полинома

$$W_Y = \sum_{j=1}^{5} z_j^5 + \psi_1 z_4^2 z_5^3 + \psi_2 z_4^3 z_5^2 + \psi_3 z_1 z_2 z_3 z_5^2 + \\ + \psi_4 z_1 z_2 z_3 z_4^2 + \psi_5 z_1 z_2 z_3 z_4 z_5. \tag{66}$$

При конструкции Батырева зеркальный орбифолд реализуется как гиперповерхность в торическом многообразии

$$T = \frac{\mathbb{C}^{29} - Z}{\mathbb{C}^{*25}}. \tag{67}$$

Аналогичные приведенным выше вычисления дают явный вид полинома в проективных координатах, который совпадает с (66).

Также вычисления дают два дополнительных монома $z_4 z_5^4$ и $z_4^4 z_5$, но они лежат в ядре кольца Милнора $\mathbb{C}[z_1,\dots,z_5]/\frac{\partial W_0}{\partial z_i}$. Результаты построения по двум конструкциям совпадают.

Таким образом, мы показали совпадение результатов двух конструкций построения зеркальных пар для случая орбифолдов Квинтики. Интересно понять связь этих конструкций в общем случае.

Авторы выражают благодарность А. Литвинову за полезные обсуждения.

Работа была выполнена в Институте теоретической физики им. Л. Д. Ландау. Исследования А. Белавина выполнены в рамках госзадания # 0033-2019-0004.

Работа Б. Еремина поддержана грантом Российского научного фонда под номером 18-12-00439.

1. P. Candelas, G. T. Horowitz, A. Strominger, and E. Witten, Nucl. Phys. B **258**, 46 (1985); doi:10.1016/0550-3213(85)90602-9.
2. A. Strominger, Commun. Math. Phys. **133**, 163 (1990); doi:10.1007/BF02096559.
3. M. Kreuzer, Phys. Lett. B **328**, 312 (1994); doi: 10.1016/0370-2693(94)91485-0; arXiv:hep-th/9402114 [hep-th].
4. P. Berglund and T. Hubsch, AMS/IP Stud. Adv. Math. **9**, 327,(1998); doi:10.1016/0550-3213(93)90250-S; arXiv:hep-th/9201014 [hep-th].
5. M. Krawitz, arXiv: 0906.0796.
6. A. Chiodo and Y. Ruan arXiv: 0908.0908.
7. K. Hori, S. Katz, A. Klemm, R. Pandharipande, R. Thomas, C. Vafa, R. Vakil, and E. Zaslow, *Mirror symmetry*, Published by the American Mathematical Society, Providence, RI, for the Clay Mathematics Institute, Cambridge, MA, Printed in the United States of America (2003), p. 101.
8. V. V. Batyrev, J. Alg. Geom. **3**, 493 (1994); arXiv: alg-geom/9310003 [math.AG].
9. K. Aleshkin, A. Belavin, and A. Litvinov, doi: 10.1088/1742-5468/ab081a; arXiv:1812.00478 [hep-th].
10. K. Aleshkin and A. Belavin, Pis'ma v ZhETF **110**(11), 727 (2019); arXiv:1911.11678 [hep-th].
11. A. Belavin and B. Eremin, Theor. Math. Phys. **201**(2), 1606 (2019); doi:10.1134/S0040577919110060; arXiv:1907.11102 [hep-th].
12. B. R. Greene and M. R. Plesser, Nucl. Phys. B **338**, 15 (1990); doi:10.1016/0550-3213(90)90622-K.