

# Ляпуновская экспонента в задаче Уитни со случайной накачкой

Н. А. Степанов<sup>+\*×1)</sup>, М. А. Скворцов<sup>+\*1)</sup>

<sup>+</sup>Сколковский институт науки и технологий, 121205 Москва, Россия

<sup>\*</sup>Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН, 142432 Черногоровка, Россия

<sup>×</sup>Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики”, 101000 Москва, Россия

Поступила в редакцию 20 августа 2020 г.

После переработки 20 августа 2020 г.

Принята к публикации 20 августа 2020 г.

Мы рассматриваем статистические свойства непадающей траектории в задаче Уитни о перевернутом маятнике, возбуждаемом внешней силой. В случае, когда внешняя сила является белым шумом, мгновенная функция распределения угла маятника и его скорости на бесконечном временном интервале была найдена в нашей недавней работе с помощью трансфер-матричного анализа суперсимметричной теории поля. В настоящей публикации мы обобщаем наш подход на случай конечных временных интервалов и многоточечных корреляционных функций. С помощью развитого формализма вычислена ляпуновская экспонента, определяющая скорость затухания корреляций на непадающей траектории.

DOI: 10.31857/S1234567820180093

1. Балансирование перевернутого маятника, находящегося под действием заданной зависящей от времени горизонтальной силы  $f(t)$ , – это знаменитая математическая задача, сформулированная Курантом и Роббинсом в книге “Что такое математика?” (первое издание в 1941 г.) [1], где ее авторство было приписано Уитни. Используя довольно общие математические аргументы, основанные на теореме о среднем значении, они показали, что для любой силы  $f(t)$ , действующей на конечном временном интервале  $[0, T]$ , можно так выбрать начальное положение маятника в верхней полуплоскости, что он будет оставаться в верхней полуплоскости на протяжении дальнейшей эволюции при всех  $t \in [0, T]$ . Существование *непадающей траектории* (НПТ) в задаче Уитни было предметом непрерывающихся дебатов в математической литературе [2, 3], в результате которых исходные аргументы Куранта и Роббинса были критически проанализированы и уточнены. Свежий интерес к задаче о перевернутом маятнике связан с именем Арнольда, с точки зрения которого в 2002 г. эта задача еще ждала строгого решения [4]. В 2014 г. Полехин представил доказательство существования НПТ, используя топологический принцип Важевского [5]. Эта работа вызвала ряд публикаций, обобщивших его подход и предложивших новые топологические методы [6–8]. Хорошие обзоры истории задачи Уитни можно найти в статьях [8, 9].

В недавней работе нами была разработана теория статистического описания *никогда не падающей траектории* (ННПТ) перевернутого маятника под действием случайной силы [10]. Никогда не падающая траектория может быть рассмотрена как предел непадающих траекторий в задаче Уитни при стремлении длины  $T$  временного интервала к бесконечности. Концепция ННПТ проиллюстрирована на рис. 1, где построены численные решения краевой задачи для уравнения маятника (угол  $\theta$  отсчитывается от вертикали)

$$\ddot{\theta} = \omega^2 \sin \theta + f(t) \cos \theta \quad (1)$$

с различными начальными  $\theta(0) = \theta_1$  и конечными  $\theta(T) = \theta_2$  значениями и достаточно быстро меняющейся силой  $f(t)$ . Для любых  $\theta_{1,2}$  в полосе  $-\pi/2 < \theta_{1,2} < \pi/2$  непадающее решение ( $-\pi/2 < \theta(T) < \pi/2$ ) этой краевой задачи существует и единственно [10]. По мере того, как  $\theta_1$  и  $\theta_2$  пробегает все возможные значения в полосе, множество соответствующих НПТ образуют пучок, показанный цветом на рис. 1. Этот пучок сужается при отходе от края, становясь экспоненциально тонким в середине интервала при больших  $T$ . В пределе  $T \rightarrow \infty$ , когда маятник нужно балансировать на всей действительной оси, пучок НПТ для задачи Уитни, определенной на конечном интервале, становится бесконечно тонким и определяет единственную *никогда не падающую траекторию*, являющуюся функционалом заданной силы  $f(t)$ .

<sup>1)</sup>e-mail: stepanov@itp.ac.ru; skvor@itp.ac.ru

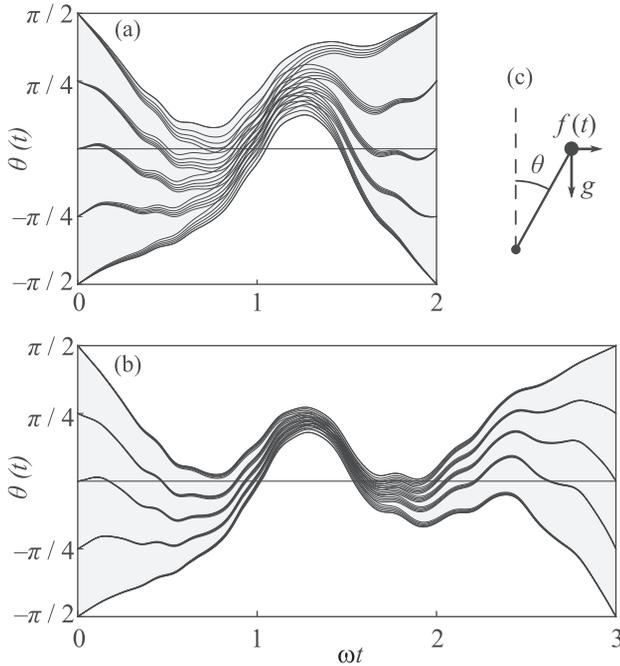


Рис. 1. (Цветной онлайн) Примеры непадающих траекторий для уравнения движения маятника (1), рассматриваемого на двух временных интервалах: (а) –  $T = 2/\omega$  и (б) –  $T = 3/\omega$ . Для любого выбора  $\theta_1$  и  $\theta_2$  в верхней полуплоскости ( $|\theta| < \pi/2$ ) существует единственное непадающее решение, удовлетворяющее граничным условиям  $\theta(0) = \theta_1$  и  $\theta(T) = \theta_2$ . На графиках потроено по 25 таких траекторий с  $\theta_{1,2} = (-1, -0.5, 0, 0.5, 1) \times \pi/2$ . В обоих случаях возбуждающая сила выбрана в виде  $f(t) = 4 \sum_{n=1}^{40} \cos(k\omega t + k^4)$ . (с) – Перевернутый маятник под действием горизонтальной силы

Статистические свойства НПТ в случае, когда возбуждающая сила представляет собой гауссов белый шум с коррелятором

$$\langle f(t)f(t') \rangle = 2\alpha\delta(t - t'), \quad (2)$$

были изучены нами в работе [10], где мы вычислили одновременную функцию распределения  $P(\theta, p)$  угла  $\theta$  и его скорости  $p = \dot{\theta}$ . Наш подход основан на суперсимметричной теоретико-полевой формулировке стохастической динамики, предложенной в работах Паризи и Сурла [11–13], которая позволяет провести усреднение по случайной силе в самом начале вычислений. Существенно, что для рассматриваемой задачи метод Паризи–Сурла свободен от проблемы знака фермионного детерминанта в силу единственности НПТ. Используя идею сведения одномерного функционального интеграла к эффективной квантовой механике [14], нам удалось выразить функцию распределения  $P(\theta, p)$  через нулевую моду трансфер-

матричного гамильтониана, который сводится к оператору Фоккера–Планка с особым видом граничных условий, обеспечивающих невыход траекторий из полосы.

В настоящей публикации мы развиваем идеи, заложенные в работе [10], и рассматриваем круг вопросов, связанных с ляпуновской экспонентой для НПТ. Ляпуновская экспонента определяет как закон сходимости НПТ на конечном временном интервале к ННПТ на бесконечном временном интервале (см. рис. 1), так и затухание разновременных корреляторов на ННПТ. С технической точки зрения, наш результат состоит в описании всего спектра трансферматричного гамильтониана, в то время как в работе [10] была исследована только его нулевая мода. На этом языке ляпуновская экспонента определяется энергией первого возбужденного состояния. Развита теория позволяет вычислять любые корреляционные функции на НПТ на бесконечном, полубесконечном и конечных интервалах.

Мы показываем, что ляпуновская экспонента в задаче Уитни с накачкой в виде белого шума (2) может быть записана в виде

$$\lambda = \omega g(\alpha/\omega^3), \quad (3)$$

где функция  $g(x)$  имеет следующие асимптотики:

$$g(x) = \begin{cases} 1 + \frac{3}{8}x - \frac{525}{1024}x^2 + \dots, & x \ll 1; \\ 0.66x^{1/3} + 0.26 + 0.30x^{-1/3} \dots, & x \gg 1. \end{cases} \quad (4)$$

В отсутствие накачки ( $\alpha = 0$ ) ляпуновская экспонента  $\lambda = \omega$  определяется экспоненциальной неустойчивостью траекторий вблизи верхнего положения маятника. При слабой накачке ( $\alpha/\omega^3 \ll 1$ ) типичный угол НПТ имеет порядок  $\theta \sim (\alpha/\omega^3)^{1/2}$  [10], и нелинейность уравнения (1) приводит к увеличению ляпуновской экспоненты, которая может быть разложена в асимптотический ряд по степеням малого параметра  $\alpha/\omega^3$ . Наконец, при сильной накачке ( $\alpha/\omega^3 \gg 1$ ) ляпуновская экспонента выходит на предельное значение  $\lambda \approx 0.66\alpha^{1/3}$ . Найденная численно зависимость ляпуновской экспоненты от параметра  $\alpha/\omega^3$  показана на рис. 2.

**2.** Согласно подходу, развитому в работе [10], статистические свойства НПТ выражаются через двухкомпонентную “волновую функцию”  $\hat{\Psi}(\theta, p) = (\Psi, \Phi)^T$ , чья эволюция дается уравнением Шредингера во мнимом времени с соответствующим трансфер-матричным гамильтонианом:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \Psi \\ \Phi \end{pmatrix} = -\mathcal{H} \begin{pmatrix} \Psi \\ \Phi \end{pmatrix}, \quad \mathcal{H} = \begin{pmatrix} L & -1 \\ V_2 & L \end{pmatrix}, \quad (5)$$

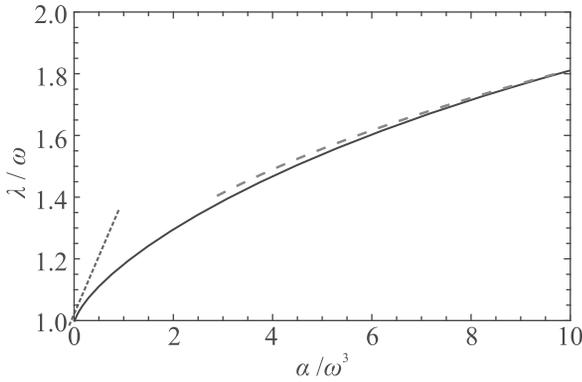


Рис. 2. (Цветной онлайн) Зависимость ляпуновской экспоненты для НПТ от силы накачки, измеряемой параметром  $\alpha/\omega^3$ . Пунктиром показана линейная часть асимптотики при малых  $\alpha$ , а штриховой линией – первые три члена разложения (4) на больших  $x$

где  $L$  – оператор Фоккера–Планка для задачи Крамера [15]:

$$L = p\partial_\theta + \omega^2 \sin \theta \partial_p - \alpha \cos^2 \theta \partial_p^2, \quad (6)$$

а потенциал  $V_2$  имеет вид:

$$V_2 = -\omega^2 \cos \theta - \alpha \sin 2\theta \partial_p. \quad (7)$$

В работе [10] мы исследовали одноточечную корреляционную функцию ННПТ на бесконечном временном интервале, которая определяется нулевой модой  $\hat{\Psi}_0$  гамильтониана  $\mathcal{H}$ . Нахождение нулевой моды значительно упрощается благодаря наличию симметрии Бекки–Руэ–Стора–Тютинга (БРСТ) действия стохастической динамики в представлении Паризи и Сурла [13], что позволяет выразить обе компоненты  $\hat{\Psi}(\theta, p)$  через скалярный суперпотенциал  $\psi(\theta, p)$  посредством

$$\Psi = \partial_p \psi, \quad \Phi = -\partial_\theta \psi. \quad (8)$$

При этом временная эволюция суперпотенциала  $\psi$  определяется оператором Фоккера–Планка  $L$ :

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -L\psi. \quad (9)$$

Однако редукция (8) не работает ни для вычисления разновременных корреляционных функций ННПТ, ни для описания статистики НПТ на интервалах с краем. В первом случае БРСТ симметрия нарушается операторами физически наблюдаемых величин, действующих одинаково на  $\Psi$  и  $\Phi$  компоненты волновой функции, а во втором – БРСТ-несимметричным начальным условием на краю интервала (см. уравнение (10) ниже). В обоих случаях для описания ста-

стистики НПТ необходимо работать с двухкомпонентной волновой функцией  $(\Psi, \Phi)$  и понимать свойства гамильтониана  $\mathcal{H}$ .

Обсудим, как выглядит начальное условие для волновой функции на краю интервала. Для обеспечения единственности НПТ необходимо зафиксировать значение  $\theta$  на краю. (Вообще говоря, можно задавать значение  $\dot{\theta}$  или даже линейную комбинацию  $\theta$  и  $\dot{\theta}$ , но для простоты будем считать, что фиксирован угол.) По построению, волновая функция  $\hat{\Psi}$  тесно связана со статистической суммой суперсимметричного функционального интеграла [10]. На краю интервала она не может содержать грассмановых переменных, что приводит к занулению компоненты  $\Phi$ . Таким образом, волновая функция на краю интервала, где зафиксировано значение  $\theta = \theta_0$ , имеет вид

$$\hat{\Psi}_{\theta_0}^{(b)} = \begin{pmatrix} \omega^{-1} \delta(\theta - \theta_0) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Рассмотрим краевую задачу на интервале  $[T_L, T_R]$  с граничными условиями  $\theta(T_L) = \theta_L$  и  $\theta(T_R) = \theta_R$ . Суть сведения функционального интеграла Паризи–Сурла к квантовой механике (5) заключается в том, что корреляционная функция  $\langle O_1(t_1)O_2(t_2)\dots \rangle$  физических величин  $O_i$  в моменты времени  $t_i$  ( $t_1 < t_2 < \dots$ ) может быть представлена как матричный элемент

$$\langle \hat{\Psi}_{\theta_R}^{(b)} | \dots O_2(t_2) e^{-\mathcal{H}(t_2-t_1)} O_1(t_1) e^{-\mathcal{H}(t_1-t_L)} | \hat{\Psi}_{\theta_L}^{(b)} \rangle, \quad (11)$$

где скалярное произведение двух волновых функций определено как [10]

$$\langle \hat{\Psi} | \hat{\Psi}' \rangle = \int d\theta dp [\Psi(\theta, p)\Phi'(\theta, -p) + \Phi(\theta, p)\Psi'(\theta, -p)]. \quad (12)$$

В работе [10] мы изучали одновременную совместную функцию распределения  $P(\theta, p)$  угла и скорости для ННПТ, которая соответствует оператору  $O = \delta(\theta - \theta_0)\delta(p - p_0)$ . Заменяя  $\hat{\Psi}_{L,R}$  на нулевую моду и используя уравнение (8), можно выразить  $P(\theta, p)$  через скобку Пуассона от суперпотенциала  $\psi$ :

$$P(\theta, p) = \{ \psi(\theta, p), \psi(\theta, -p) \}_{\theta, p}. \quad (13)$$

Гамильтониан  $\mathcal{H}$  в уравнении (5), равно как и оператор Фоккера–Планка (6), является неэрмитовым. Такие операторы, вообще говоря, могут не иметь полной системы собственных функций. Известно, однако, что в присутствии вязкости оператор Фоккера–Планка может быть приведен к диагональному виду [15], что позволяет построить систему биортогональных собственных функций и работать с ними практически как с собственными функциями эрмитового

оператора [16]. В нашем случае вязкость отсутствует, поэтому следует ожидать, что операторы  $\mathcal{H}$  и  $L$  приводятся к нормальной жордановой форме. Следствием этого является не простое экспоненциальное затухание корреляторов при  $t \rightarrow \infty$ , а появление дополнительных степеней времени (как это видно, например, в выражении (30)).

**3.** Для иллюстрации развитого подхода остановимся подробно на случае *слабого шума* ( $\alpha/\omega^3 \ll 1$ ), когда жорданова структура операторов  $\mathcal{H}$  и  $L$  может быть исследована аналитически. Начнем с оператора Фоккера–Планка. В рассматриваемом пределе отклонение маятника от вертикали мало ( $\theta \ll 1$ ), и оператор (6) может быть заменен на

$$L = p\partial_\theta + \omega^2\theta\partial_p - \alpha\partial_p^2. \quad (14)$$

Нулевая мода этого оператора, отвечающая ННПТ, имеет вид [10]

$$\psi_0(\theta, p) = \text{erf}(z)/2, \quad (15)$$

где мы ввели “голоморфную” и “антиголоморфную” координаты, отличающиеся знаком импульса:

$$z = \kappa(p - \omega\theta), \quad \bar{z} = -\kappa(p + \omega\theta), \quad (16)$$

где  $\kappa = \sqrt{\omega/2\alpha}$ . Спектр оператора (14) может быть найден с помощью тождества  $[L, \partial_z] = \omega\partial_z$ , что позволяет получать собственные функции, последовательно дифференцируя нулевую моду по  $z$ . Таким образом находим собственную функцию  $n$ -го возбужденного состояния ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) с энергией  $\epsilon_n = n\omega$ :

$$\psi_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} H_{n-1}(z) e^{-z^2}, \quad (17)$$

где  $H_n(z) = (-1)^n e^{z^2} d^n e^{-z^2} / dz^n$  – полиномы Эрмита (в физическом определении). Однако построенные таким образом функции  $\psi_n(\theta, p)$  зависят только от разности  $p - \omega\theta$  (не содержат  $\bar{z}$ ) и, следовательно, не образуют полного базиса. Данное обстоятельство связано с тем, что неэрмитов оператор (6) приводится к жордановой нормальной форме, и помимо собственных имеет ряд присоединенных функций, отвечающих тому же самому собственному числу  $\epsilon_n$ . Легко убедиться, что собственная функция  $\psi_n$  имеет  $n-1$  присоединенных функций, которых мы выберем в виде

$$\psi_{n,k} = \frac{(-1)^k}{2^k k! \sqrt{\pi}} H_k(\bar{z}) H_{n-k-1}(z) e^{-z^2}, \quad (18)$$

где индекс  $k$  пробегает значения от 1 до  $n-1$ . Вместе с  $\psi_{n,0} = \psi_n$  они образуют базис жордановой клетки размерности  $n$ , отвечающей энергии  $\epsilon_n = n\omega$ :

$$L\psi_{n,k} = \epsilon_n \psi_{n,k} + \omega \psi_{n,k-1} \quad (19)$$

(чтобы оборвать цепочку на собственной функции  $\psi_{n,0}$ , положим  $\psi_{n,-1} = 0$ ).

Построенная система функций является полной. Произвольная функция может быть разложена по базису  $\psi_{n,k}$ , используя соотношения ортогональности

$$\langle \psi_{n,k} | \psi_{n',k'} \rangle_z = (-1)^{n-1} \delta_{n,n'} \delta_{k+k'+1,n}, \quad (20)$$

где скалярное произведение  $\langle \cdot | \cdot \rangle_z$  определено как

$$\langle \psi | \psi' \rangle_z = \int dz d\bar{z} \psi(\bar{z}, z) \psi'(z, \bar{z}), \quad (21)$$

так что перестановка аргументов в одной из функций согласована со сменой знака  $p$  в уравнении (12). Отметим, что меры интегрирования в уравнениях (12) и (21) связаны посредством  $dz d\bar{z} = 2\omega\kappa^2 d\theta dp$ .

При эволюции волновой функции  $\psi_{n,k}$  под действием оператора  $L$  к ней подмешиваются другие состояния жордановой клетки, отвечающие той же энергии, что приводит к появлению степеней  $t$  на фоне экспоненциального затухания:

$$e^{-Lt} \psi_{n,k} = e^{-n\omega t} \sum_{m=0}^k \frac{(-\omega t)^m}{m!} \psi_{n,k-m}. \quad (22)$$

Перейдем теперь к изучению спектральных свойств гамильтониана  $\mathcal{H}$  в уравнении (5). В рассматриваемом случае слабого шума уравнение (7) дает  $V_2 = -\omega^2$ , что разбивает пространство состояний  $\mathcal{H}$  на четный и нечетный сектора с волновыми функциями  $\hat{\Psi}_{e,o} = (\Psi, \pm\omega\Psi)^T$ , которые эволюционируют независимо с гамильтонианами  $\mathcal{H}_{e,o} = L \mp \omega$ . Таким образом, построенная выше система собственных и присоединенных функций оператора  $L$  позволяет полностью описать эволюцию дублета  $\hat{\Psi}$  под действием гамильтониана  $\mathcal{H}$ .

Найдем, как в пределе  $\alpha/\omega^3 \ll 1$  происходит эволюция волновой функции (10) при удалении от границы. Раскладывая ее на четную и нечетную компоненту, получаем

$$e^{-\mathcal{H}t} \hat{\Psi}_{\theta_0}^{(b)} = \begin{pmatrix} \omega^{-1} \cosh \omega t \\ \sinh \omega t \end{pmatrix} e^{-Lt} \delta(\theta - \theta_0). \quad (23)$$

Для вычисления эволюции дельта функции, разложим ее по базису  $\psi_{n,k}$ :

$$\delta(\theta - \theta_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n-1} c_{n,k} \psi_{n,k}. \quad (24)$$

Коэффициенты  $c_{n,k}$  находятся с помощью соотношений ортогональности (20) и свойства полиномов Эрмита

$$H_n(x+y) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (2y)^{n-k} H_k(x), \quad (25)$$

следующего из разложения в ряд Тейлора, и даются формулой

$$c_{n,k} = (-1)^{n-1} 2\kappa\omega \frac{(2\kappa\omega\theta_0)^{n-2k-1}}{(n-2k-1)!}. \quad (26)$$

Эволюция дельта функции в уравнении (23) находится из разложения (24) и соотношений (22). Память о границе забывается за характерное время  $\omega^{-1}$  (обратная ляпуновская экспонента). За это время теряется различие между двумя компонентами волновой функции  $\hat{\Psi}$ , и обе они выходят на значение, определяемое состоянием  $\psi_{1,0}$ , отвечающим минимальной энергии  $\epsilon_1 = \omega$ :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-Ht} \hat{\Psi}_{\theta_0}^{(b)} = \hat{\Psi}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ \omega \end{pmatrix} \kappa \psi_{1,0}, \quad (27)$$

что и есть нулевая мода уравнения (5) в пределе  $\alpha/\omega^3 \ll 1$ .

4. Покажем, как построенная спектральная теория операторов  $\mathcal{H}$  и  $L$  позволяет систематически вычислять различные корреляционные функции НПТ в случае слабого шума. Результаты данного раздела могут быть получены и напрямую, используя явное выражение для НТП через  $f(t)$  с последующим усреднением по гауссовому белому шуму (2) [10], однако их вывод с помощью трансфер-матричного формализма представляется методически важным, так как иллюстрирует общую схему и позволяет убедиться в ее работоспособности.

Начнем рассмотрение с вычисления парного коррелятора углов для ННПТ на всей действительной оси. Подставляя в общую формулу (11) нулевую моду в виде (27) и учитывая, что в результате остается только четный сектор теории, искомым коррелятор можно выразить через скалярное произведение (21) в  $z$ -представлении следующим образом:

$$\langle \theta(0)\theta(t) \rangle = \langle \psi_{1,0} | \theta e^{-(L-\omega)t} \theta | \psi_{1,0} \rangle_z. \quad (28)$$

С помощью уравнений (16) и (18) можно выразить  $\theta\psi_{1,0}$  через функции  $\psi_{2,0}$  и  $\psi_{2,1}$ . Используя закон эволюции (22), находим

$$e^{-(L-\omega)t} \theta \psi_{1,0} = e^{-\omega t} \frac{\psi_{2,1} - (1/2 + \omega t)\psi_{2,0}}{2\kappa\omega}. \quad (29)$$

Считая матричный элемент (28) как перекрытие между состояниями  $e^{-(L-\omega)t} \theta \psi_{1,0}$  и  $\theta \psi_{1,0}$  с помощью соотношений (20), находим искомым парный коррелятор:

$$\langle \theta(0)\theta(t) \rangle = \langle \theta^2 \rangle (1 + \omega t) e^{-\omega t}, \quad (30)$$

где, как получено в работе [10],

$$\langle \theta^2 \rangle = \alpha/2\omega^3. \quad (31)$$

Появление на фоне  $e^{-\omega t}$  линейно растущего со временем вклада связано с возбуждением состояний  $\psi_{2,0}$  и  $\psi_{2,1}$ , отвечающих жорданову блоку размерности 2.

Аналогичным образом можно вычислить и более сложные корреляторы ННПТ. Например,

$$\langle \theta^2(0)\theta^2(t) \rangle = \langle \theta^2 \rangle^2 [1 + 2(1 + \omega t)^2 e^{-2\omega t}]. \quad (32)$$

Формально, здесь оператор  $\theta^2$ , примененный к  $\psi_{1,0}$ , возбуждает жорданов триплет  $\psi_{3,0}$ ,  $\psi_{3,1}$ ,  $\psi_{3,2}$ , что приводит к появлению членов вплоть до  $t^2$  на фоне экспоненциального убывания. Структура же коррелятора (32) связана с гауссовой статистикой  $\theta$  на ННПТ [10], позволяющей выразить его через парный коррелятор (30) с помощью теоремы Вика. Обобщение развитого формализма на многоточечные корреляторы также не представляет труда.

В качестве следующего примера рассмотрим вычисление среднего значения угла  $\langle \theta(t) \rangle_{\theta_0}$  для НПТ на полубесконечном временном интервале  $t > 0$  с граничным условием  $\theta(0) = \theta_0$ . Согласно уравнению (11), средний угол дается матричным элементом  $\langle \theta(t) \rangle_{\theta_0} = \langle \hat{\Psi}_0 | \theta e^{-\mathcal{H}t} | \hat{\Psi}_{\theta_0}^{(b)} \rangle$ . Проще всего его вычислить, свернув найденное выше выражение (29) с волновой функцией на границе (10). Интегрируя по импульсу, видим, что вклад от  $\psi_{2,0} = 2ze^{-z^2}/\sqrt{\pi}$  исчезает в силу нечетности по  $z$ , и получаем простое экспоненциальное убывание

$$\langle \theta(t) \rangle_{\theta_0} = \theta_0 e^{-\omega t}. \quad (33)$$

Этот же ответ можно получить и другим способом, посчитав матричный элемент  $\theta$  между нулевой модой  $\psi_{1,0}$  и проэволюционированной граничной волновой функцией (23). Такие матричные элементы отличны от нуля только с жордановым дублетом  $\psi_{2,0}$  и  $\psi_{2,1}$ . Однако, согласно (26),  $\psi_{2,1}$  не входит в разложение дельта функции, а  $\psi_{2,0}$  является собственной и не генерирует при эволюции линейного члена. В результате, мы снова приходим к выражению (33).

Сравнение выражений (30) и (33) показывает, что, несмотря на наличие дополнительного множителя  $\omega t$  в уравнении (30), ляпуновская экспонента может быть стандартным образом определена из асимптотического поведения как одного, так и другого коррелятора на больших временах:

$$\lambda = - \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\partial \ln \langle \theta(0)\theta(t) \rangle}{\partial t} = - \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\partial \ln \langle \theta(t) \rangle_{\theta_0}}{\partial t}. \quad (34)$$

5. Остановимся теперь на вопросе о вычислении ляпуновской экспоненты для НПТ при произвольных значениях параметра  $\alpha/\omega^3$ . Ляпуновская экспонента, определяющая затухание корреляций на больших

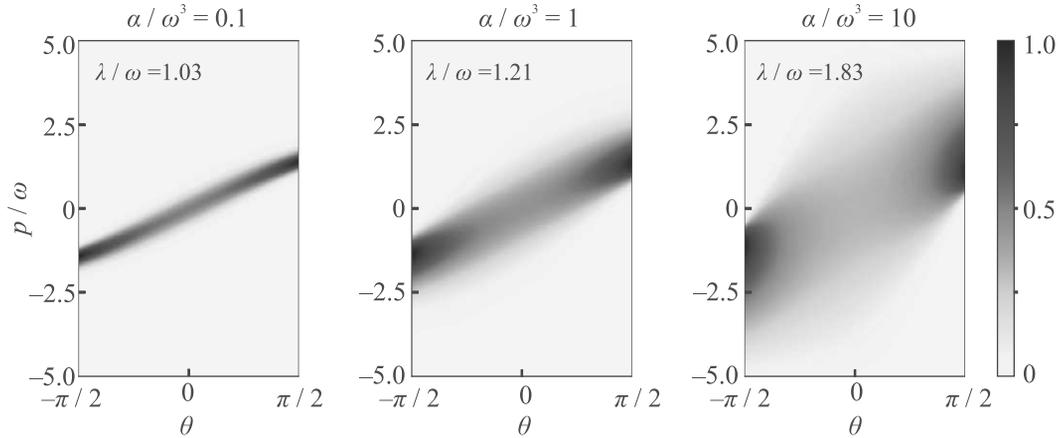


Рис. 3. (Цветной онлайн) Первое возбужденное состояние  $\psi_1(\theta, p)$  оператора (6) при трех значениях параметра  $\alpha/\omega^3 = 0.1, 1, 10$ . Волновая функция нормирована на максимальное значение

временах, определяется энергией первого возбужденного состояния. Как мы показали выше, в случае слабой накачки  $\lambda = \omega$ . При увеличении параметра  $\alpha/\omega^3$  ангармонизм маятника приводит к отклонению  $\lambda$  от  $\omega$ .

При малом значении параметра  $\alpha/\omega^3 \ll 1$  нелинейные члены в уравнении (6) могут быть учтены по теории возмущений, что позволяет получить как поправку к собственной функции  $\psi_n$ , которая становится зависящей и от “антиголоморфной” координаты  $\bar{z}$ , так и поправку к собственному значению  $\epsilon_n$ . Особенно просто данная процедура выглядит для первого возбужденного состояния, которое не вырождено и не имеет присоединенных собственных функций. Для этого представим собственную функцию и соответствующую энергию как ряды по степеням малого параметра  $x = \alpha/\omega^3$ :

$$\begin{aligned} \psi_1 &= [1 + h_1(z, \bar{z})x + h_2(z, \bar{z})x^2 + \dots]e^{-z^2}, \\ \epsilon_1 &= \omega(1 + \gamma_1 x + \gamma_2 x^2 + \dots), \end{aligned}$$

где  $h_m(z, \bar{z})$  – полином степени не выше  $4m$ . Подставляя эти выражения в уравнение  $L\psi_1 = \epsilon_1\psi_1$  и последовательно разрешая в каждом порядке по  $x$ , можно вычислить несколько первых полиномов  $h_m(z, \bar{z})$  и коэффициентов  $\gamma_m$ . Результат для  $\epsilon_1$ , определяющий ляпуновскую экспоненту, приведен в уравнении (4).

Отметим, что аналогичный подход позволяет найти поправки и к нулевой моде (15) суперпотенциала  $\psi_0$  по степеням  $\alpha/\omega^3$ . Как и следовало ожидать, ее энергия остается нулевой в силу суперсимметрии теории. Найденные поправки позволяют получить аналитическое разложение для одноточечной статистики ННПТ, численно изученной в работе [10].

В частности, они позволяют уточнить формулу (31) для  $\langle\theta^2\rangle$ :

$$\langle\theta^2\rangle = \frac{x}{2} - \frac{13}{16}x^2 + \frac{26989}{12288}x^3 + \dots, \quad (35)$$

а также описать негауссовость функции распределения  $P(\theta)$ , характеризующейся четвертым кумулянтном  $\langle\langle\theta^4\rangle\rangle = \langle\theta^4\rangle - 3\langle\theta^2\rangle^2$ :

$$\langle\langle\theta^4\rangle\rangle = -\frac{241}{256}x^3 + \frac{64725}{8192}x^4 + \dots \quad (36)$$

Отметим, что отличие от нормального распределения, измеряемое куртозисом  $\langle\langle\theta^4\rangle\rangle/\langle\theta^2\rangle^2$ , возникает лишь в первом порядке по  $x = \alpha/\omega^3$ . Отрицательное значение  $\langle\langle\theta^4\rangle\rangle$  отвечает подавлению хвостов  $P(\theta)$  за счет конечности интервала  $(-\pi/2, \pi/2)$ .

В случае произвольной силы шума возбужденные состояния оператора (6) могут быть построены только численно. Для определения ляпуновской экспоненты  $\lambda = \epsilon_1$  необходимо найти первое возбужденное состояние, решив уравнение  $L\psi = \epsilon_1\psi$  с граничными условиями

$$\psi(\pi/2, p < 0) = \psi(\theta, -\infty) = 0, \quad (37a)$$

$$\psi(-\pi/2, p > 0) = \psi(\theta, \infty) = 0. \quad (37b)$$

Данные граничные условия схожи с граничными условиями для нулевой моды суперпотенциала, выведенными в работе [10]. Единственное отличие заключается в том, что в той части границы, где волновая функция задана, ее значение равно нулю, а не  $\pm 1/2$ .

Результаты численного определения первого возбужденного состояния для различных значений параметра  $\alpha/\omega^3$  представлены на рис. 3. При малом  $\alpha/\omega^3$  функция  $\psi_1(\theta, p)$  близка к гауссиане  $\psi_{1,0}(z)$ ,

слегка увеличиваясь вблизи  $\theta = \pm\pi/2$ . По мере увеличения  $\alpha/\omega^3$  максимумы  $\psi_1(\theta, p)$  вблизи краев интервала становятся более выраженными, так что при  $\alpha/\omega^3 \rightarrow \infty$  первая мода имеет два горба, локализованных вблизи краев. Энергия первой моды, определяющая ляпуновскую экспоненту, как функция параметра  $\alpha/\omega^3$  построена на рис. 2. При малых  $\alpha/\omega^3$  численный счет согласуется с выражением (4), полученным с помощью теории возмущений, вплоть до значений  $\alpha/\omega^3 \approx 0.25$ . При больших  $\alpha/\omega^3$  ляпуновская экспонента в единицах  $\omega$  раскладывается по степеням  $(\alpha/\omega^3)^{-1/3}$  с ведущим членом  $\lambda \approx 0.66 \alpha^{1/3}$ .

В заключение отметим, что развитая нами теория является обобщением суперсимметричного подхода, предложенного в работе [10], на случай непадающих траекторий, рассматриваемых на конечных временных интервалах, и многоточечных корреляционных функций. Построенная классификация возбужденных состояний трансфер-матричного гамильтониана завершает построение теории статистических свойств непадающих траекторий в задаче Уитни со случайной короткопериодной накачкой. Предложенный формализм позволяет находить произвольные корреляционные функции на непадающей траектории путем решения уравнений в частных производных типа Фоккера–Планка со специфическими граничными условиями.

Авторы благодарны А. В. Хвалюку, И. В. Побойко за помощь с численным счетом.

Данная работа поддержана грантом Российского научного фонда # 20-12-00361.

1. R. Courant and H. Robbins, *What is Mathematics?: an elementary approach to ideas and methods*, Oxford University Press, N.Y. (1996).
2. A. Broman, *Nordisk Matematisk Tidskrift* **6**, 78 (1958).
3. T. Poston, *Manifold* **18**, 6 (1976).
4. V. Arnold, *What is mathematics?*, MCCME, Moscow (2002) (in Russian).
5. И. Ю. Полехин, *Нелинейная динам.* **10**, 465 (2014); arXiv:1407.4787.
6. O. Zubelevich, *Appl. Math. (Warsaw)* **42**, 159 (2015).
7. S. V. Bolotin and V. V. Kozlov, *Izv. Math.* **79**, 894 (2015).
8. R. Srzednicki, *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S* **12**, 2127 (2019).
9. A. Shen, arXiv:1907.01598 (in Russian).
10. N. A. Stepanov and M. A. Skvortsov, arXiv:2006.13819.
11. G. Parisi and N. Sourlas, *Phys. Rev. Lett.* **43**, 744 (1979).
12. G. Parisi and N. Sourlas, *Nucl. Phys. B* **206**, 321 (1982).
13. J. Zinn-Justin, *Quantum Field Theory and Critical Phenomena*, Clarendon Press, Oxford (2015), ch. 16.
14. K. B. Efetov and A. I. Larkin, *ZhETF* **85**, 764 (1983) [*Sov. Phys. JETP* **58**, 444 (1983)].
15. H. Risken, *The Fokker-Planck Equation: Methods of Solution and Applications*, Springer, Berlin (1996).
16. G. E. Shilov, *Linear Algebra*, Dover, N.Y. (1977).