

# Процессы $\tau^- \rightarrow \pi^- \pi^0 \nu_\tau$ и $e^+ e^- \rightarrow \pi^+ \pi^-$ в киральной модели НИЛ с учетом взаимодействия пионов в конечном состоянии

М. К. Волков<sup>1)</sup>, А. Б. Арбузов, А. А. Пивоваров

Объединенный институт ядерных исследований, 141980 Дубна, Россия

Поступила в редакцию 2 сентября 2020 г.

После переработки 2 сентября 2020 г.

Принята к публикации 13 сентября 2020 г.

Рассмотрены процессы  $\tau^- \rightarrow \pi^- \pi^0 \nu_\tau$  и  $e^+ e^- \rightarrow \pi^+ \pi^-$  в киральной модели Намбу–Иона-Лазинио с учетом взаимодействия пионов в конечном состоянии с выходом за рамки  $1/N_c$  приближения. Учтен вклад петлевой поправки за счет обмена пионов  $\rho$ -мезоном, которая дает основной вклад в  $P$ -волновом канале. В результате получено удовлетворительное согласие с экспериментальными данными для обоих процессов.

DOI: 10.31857/S123456782020001X

**1. Введение.** Киральная модель Намбу–Иона-Лазинио (НИЛ) [1–4], а также ее расширенный вариант [5–7], учитывающий первые радиально возбужденные состояния мезонов, позволили описать многие распады  $\tau$ -лептонов и процессы рождения мезонов на встречных электрон-позитронных пучках при низких энергиях в удовлетворительном согласии с экспериментальными данными [8–14]. Однако оказалось, что описание в рамках модели НИЛ таких важных процессов, как распад  $\tau^- \rightarrow \pi^- \pi^0 \nu_\tau$  и рождение пары пионов в электрон-позитронной аннигиляции при низких энергиях не удается согласовать с известными экспериментальными данными с достаточной точностью. Мы считаем, это является следствием большого влияния взаимодействия пионов в конечном состоянии в данных процессах. Описать основной вклад взаимодействия пионов в конечном состоянии в  $P$ -волне можно за счет обмена вылетающих пионов  $\rho$ -мезоном. Данные диаграммы соответствуют более высокому порядку по  $1/N_c$ , чем тот порядок ( $1/\sqrt{N_c}$ ), в котором сформулирована модель НИЛ. Целью данной работы является исследование возможности рассмотреть такие вклады дополнительно к результатам, получаемым в стандартной модели НИЛ.

Процесс  $\tau^- \rightarrow \pi^- \pi^0 \nu_\tau$  является наиболее вероятной модой распада  $\tau$ -лептона, и его парциальная ширина измерена с высокой точностью:  $\text{Br}(\tau \rightarrow \pi \pi \nu_\tau) = (25.49 \pm 0.09)\%$  [15]. В теоретических работах согласие с экспериментом достигается обычно за счет использования феноменологической параметри-

зации формфактора пиона, которая фитируется по экспериментальным данным [16–19] без анализа соответствующей физической картины. Подобная ситуация имеет место и для процесса  $e^+ e^- \rightarrow \pi^+ \pi^-$ , адронный ток которого связан с тем, что присутствует в распаде  $\tau$ -лептона, преобразованием изоспина в рамках гипотезы сохранения векторного тока. Поэтому принципиально важно иметь согласованное теоретическое описание обоих процессов. Также в литературе обсуждается проблема согласования низкоэнергетических процессов электрон-позитронной аннигиляции в адроны и соответствующих мод распада  $\tau$ -лептонов, см. работу [20] и ссылки в ней. С другой стороны, точность экспериментальных результатов по изучению данных процессов постоянно повышается [21–23]. Важность детального понимания этих процессов обусловлена и тем, что они дают существенный вклад в определение адронной поляризации вакуума [24]. Отметим, что в процессе электрон-позитронной аннигиляции в пионы также важно адекватно описать смешивание  $\rho$ - и  $\omega$ -мезонов, которое чувствительно к разнице токовых масс  $u$ - и  $d$ -кварков.

Взаимодействие пионов в конечном состоянии исследовалось теоретически в целом ряде подходов. Наиболее общим является метод дисперсионных соотношений, в рамках которого успешно описаны взаимодействия в конечном состоянии легких пар мезонов  $\pi\pi$ ,  $\pi K$  и  $KK$  с учетом фазовых сдвигов [25]. Учет таких взаимодействий особенно важен для описания  $\pi\pi$ - и  $KK$ -рассеяния при малых энергиях. Рассматриваемый нами диапазон энергий также находится в области применимости киральной пертурба-

<sup>1)</sup>e-mail: volkov@theor.jinr.ru

тивной теории (ChPT – *Chiral Perturbation Theory*) [26, 27]. В частности, в рамках унитаризованной ChPT взаимодействия в конечном состоянии рассматривались с помощью метода инверсии амплитуд [28, 29]. Непосредственное использование названных методов в сочетании с моделью НИЛ невозможно в силу несогласованности соответствующих подходов. С другой стороны, учет мезонных петлевых поправок в рамках модели НИЛ уже применялся при описании ряда процессов [30, 31], где однако рассмотренные мезонные петли не выходили за рамки ведущего по  $1/N_c$  приближения модели.

Статья организована следующим образом. В разделе 2 приводится используемый нами лагранжиан стандартной модели НИЛ. В следующих двух разделах 3 и 4 рассматриваются процессы электрон-позитронной аннигиляции в два пиона и распад  $\tau$ -лептона, соответственно. Раздел 5 посвящен обсуждению результатов.

## 2. Лагранжиан стандартной модели НИЛ.

Фрагмент кварк-мезонного лагранжиана взаимодействия модели НИЛ, содержащего нужные нам вершины, имеет вид [3]:

$$\Delta\mathcal{L}_{int} = \bar{q} \left[ \frac{g_\rho}{2} \gamma^\mu (\tau_3 \rho_\mu^0 + \tau_0 \omega_\mu) + ig_\pi \gamma^5 \tau_3 \pi^0 + \frac{g_\rho}{2} \gamma^\mu \sum_{j=\pm} \tau_j \rho_\mu^j + ig_\pi \gamma^5 \sum_{j=\pm} \tau_j \pi^j \right] q, \quad (1)$$

где  $q$  и  $\bar{q}$  –  $SU(2)$  дублеты  $u$ - и  $d$ -кварковых полей с составляющими массами  $m_u \approx m_d = m = 280$  МэВ;  $\tau_3$  – матрица Паули;  $\tau_\pm$  – линейные комбинации матриц Паули;  $\tau_0$  – единичная матрица. Константы взаимодействия:

$$g_\rho = \left( \frac{2}{3} I_2 \right)^{-1/2}, \quad g_\pi = \left( \frac{4}{Z_\pi I_2} \right)^{-1/2}, \quad (2)$$

где

$$Z_\pi = \left[ 1 - 6 \frac{m^2}{M_{a_1}^2} \right]^{-1} \quad (3)$$

константа дополнительной перенормировки, возникающая при учете  $\pi - a_1$  переходов,  $M_{a_1} = 1230 \pm \pm 40$  МэВ [15] – масса аксиально векторного мезона. Интегралы, возникающие в результате перенормировки лагранжиана:

$$I_2 = -i \frac{N_c}{(2\pi)^4} \int \frac{\Theta(\Lambda^2 + k^2)}{(m^2 - k^2)^2} d^4k = \frac{N_c}{(4\pi)^2} \left[ \ln \left( \frac{\Lambda^2}{m^2} + 1 \right) - \left( 1 + \frac{m^2}{\Lambda^2} \right)^{-1} \right], \quad (4)$$

где  $\Lambda = 1250$  МэВ – параметр обрезания по импульсу кварков в петле,  $N_c = 3$  – число цветов.

**3. Процесс  $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-$ .** Диаграммы процесса  $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-$  без учета взаимодействия в конечном состоянии приведены на рис. 1–3.

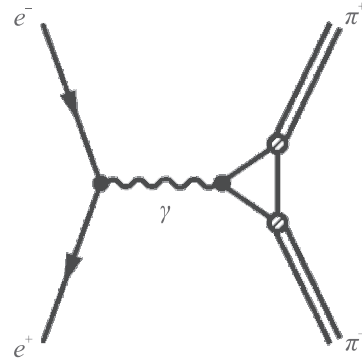


Рис. 1. Контактная диаграмма процесса  $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-$

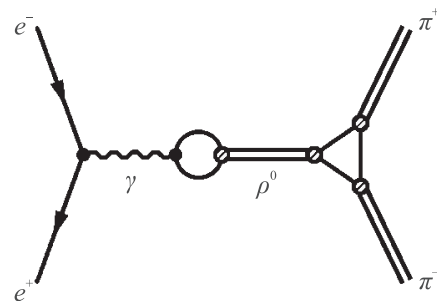


Рис. 2. Диаграмма процесса  $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-$  с промежуточным  $\rho$ -мезоном

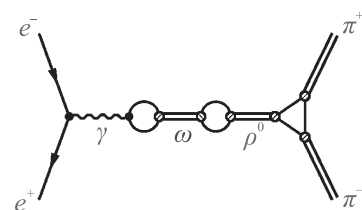


Рис. 3. Диаграмма процесса  $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-$  с промежуточным  $\omega$ -мезоном

В данном процессе играет роль только P-волна, а контактное взаимодействие четырех пионов через кварковый четырехугольник, а также взаимодействие пионов через скалярный мезон, относящиеся к S-волне, здесь вклада не дают. Взаимодействие пионов путем аннигиляции в  $\rho$ -мезон учтено в ширине распада в знаменателе пропагатора Брейта–Вигнера промежуточного  $\rho$ -мезона. Поэтому для учета взаимодействия пионов в конечном состоянии в данном

процессе достаточно учесть обмен  $\rho$ -мезоном. В результате возникает мезонный треугольник, см. рис. 4.

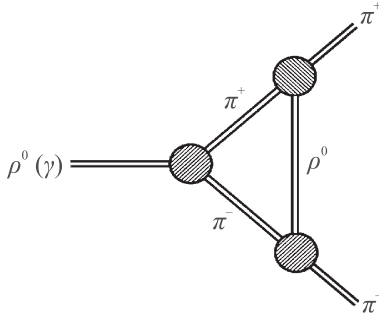


Рис. 4. Взаимодействие пионов в конечном состоянии в случае электрон-позитронной аннигиляции

Каждая вершина этого треугольника выражается через амплитуду распада  $\rho^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-$ , которую можно получить с помощью лагранжиана (1):

$$M(\rho^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-) = g_\rho e_\mu(q) (p_+ - p_-)^\mu, \quad (5)$$

где  $q$  – импульс распадающегося  $\rho$ -мезона,  $p_+, p_-$  – импульсы пионов,  $e_\mu(q)$  – поляризационный вектор распадающегося  $\rho$ -мезона.

Из данной амплитуды можно получить вершину мезонного лагранжиана, описывающую взаимодействие  $\rho$ -мезона с пионами:

$$\mathcal{L} = -ig_\rho \rho_\mu^0 (\pi^+ \partial^\mu \pi^- - \pi^- \partial^\mu \pi^+). \quad (6)$$

С помощью этих вершин можно описать треугольную мезонную петлю, приводящую к интегралу:

$$g_\rho^3 \int \frac{(k - 2p_-)^\lambda (k + 2p_+)^\nu (2k + p_+ - p_-)^\mu \left( g_{\nu\lambda} - \frac{k_\nu k_\lambda}{M_\rho^2} \right)}{[k^2 - M_\rho^2] [(k - p_-)^2 - M_\pi^2] [(k + p_+)^2 - M_\pi^2]} \times \frac{d^4 k}{(2\pi)^4}. \quad (7)$$

Если разложить этот интеграл по внешним импульсам и удержать только расходящиеся члены (по аналогии с методом, используемым в модели НИЛ), то получится выражение

$$ig_\rho^3 \left[ \frac{I_{1M}}{M_\rho^2} + \left( 1 + \frac{4M_\pi^2 - q^2}{2M_\rho^2} \right) I_{2M} \right] (p_+ - p_-)^\mu, \quad (8)$$

где  $q = p_+ + p_-$ ;  $I_{1M}$  и  $I_{2M}$  – квадратично и логарифмически расходящиеся интегралы, соответственно:

$$\begin{aligned} I_{2M} &= \frac{-i}{(2\pi)^4} \int \frac{\Theta(\Lambda_M^2 + k^2)}{(M_\rho^2 - k^2)(M_\pi^2 - k^2)} d^4 k = \\ &= \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{1}{M_\rho^2 - M_\pi^2} \times \\ &\times \left[ M_\rho^2 \ln \left( \frac{\Lambda_M^2}{M_\rho^2} + 1 \right) - M_\pi^2 \ln \left( \frac{\Lambda_M^2}{M_\pi^2} + 1 \right) \right], \\ I_{1M} &= \frac{-i}{(2\pi)^4} \int \frac{\Theta(\Lambda_M^2 + k^2)}{(M_\rho^2 - k^2)} d^4 k = \\ &= \frac{1}{(4\pi)^2} \left[ \Lambda_M^2 - M_\rho^2 \ln \left( \frac{\Lambda_M^2}{M_\rho^2} + 1 \right) \right], \end{aligned} \quad (9)$$

где  $\Lambda_M$  – параметр обрезания по импульсу мезонной петли.

Тогда амплитуда рассматриваемого процесса электрон-позитронной аннигиляции принимает вид:

$$\begin{aligned} M(e^+ e^- \rightarrow \pi\pi) &= -\frac{4\pi\alpha_{em}}{s} \left[ 1 + \frac{s}{M_\rho^2 - s - i\sqrt{s}\Gamma_\rho} + \right. \\ &+ \frac{s^2}{9} \frac{g_\rho^2 [I_2(u) - I_2(d)]}{[M_\rho^2 - s - i\sqrt{s}\Gamma_\rho] [M_\omega^2 - s - i\sqrt{s}\Gamma_\omega]} \left. \right] \times \\ &\times \left\{ 1 + g_\rho^2 \left[ \frac{I_{1M}}{M_\rho^2} + \left( 1 + \frac{4M_\pi^2 - s}{2M_\rho^2} \right) I_{2M} \right] \right\} \times \\ &\times L_\mu^{em} (p_+ - p_-)^\mu, \end{aligned} \quad (10)$$

где  $\alpha_{em} \approx 1/137$  – постоянная тонкой структуры,  $s = (p_+ + p_-)^2$ ,  $L_\mu^{em} = \bar{e}^- \gamma_\mu e^-$  – электромагнитный лептонный ток.

Третье слагаемое в первых квадратных скобках соответствует вкладу от промежуточного  $\omega$ -мезона, переходящего в  $\rho$ -мезон через кварковую петлю. Здесь в амплитуде возникает разность  $I_2(u) - I_2(d)$ , где  $I_2(u)$  и  $I_2(d)$  – интегралы вида (4) с  $u$ - и  $d$ -кварковыми массами, соответственно. В данном случае разницей масс этих кварков пренебрегать нельзя, и при вычислениях использовалось значение  $m_d - m_u = 4$  МэВ, полученное в рамках модели НИЛ при описании распада  $\omega \rightarrow \pi\pi$  и разницы масс заряженных и нейтральных пионов [3].

По экспериментально известной зависимости сечения данного процесса от энергии сталкивающихся лептонов можно зафиксировать параметр обрезания по импульсу мезонной петли  $\Lambda_M = 860$  МэВ. Зависимость, полученная при данном значении параметра обрезания, показана на рис. 5 в сравнении с экспериментальными данными [21]. Видно, что учет взаимодействий в конечном состоянии оказался количественно очень важным именно вблизи пика, соответствующего резонансу  $\rho$ -мезона.

**4. Процесс  $\tau^- \rightarrow \pi^- \pi^0 \nu_\tau$ .** Диаграммы Фейнмана процесса  $\tau^- \rightarrow \pi^- \pi^0 \nu_\tau$  без учета взаимодействия в конечном состоянии приведены на рис. 6, 7.

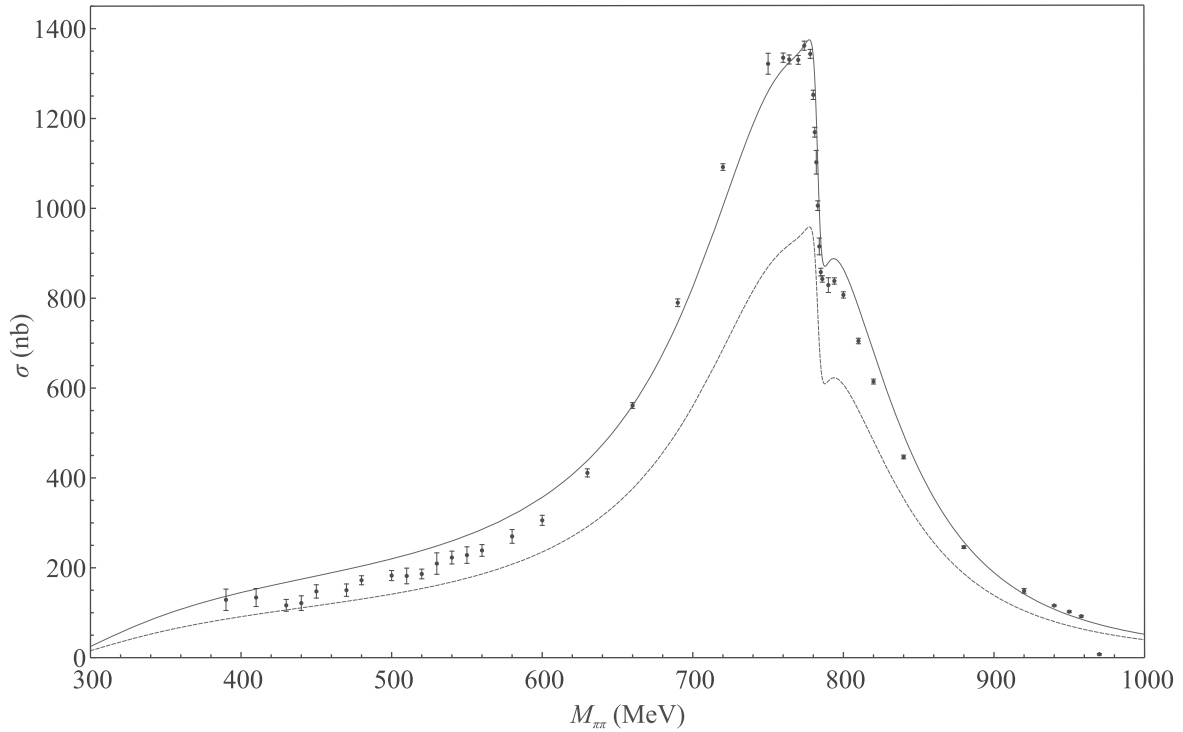


Рис. 5. (Цветной онлайн) Сечение процесса  $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-$  в зависимости от энергии в системе центра масс. Экспериментальные точки взяты из работы [21]. Пунктирная кривая получена без вклада взаимодействий в конечном состоянии, а сплошная с его учетом

Мезонный треугольник, необходимый для учета взаимодействия пионов в конечном состоянии, приведен на рис. 8.

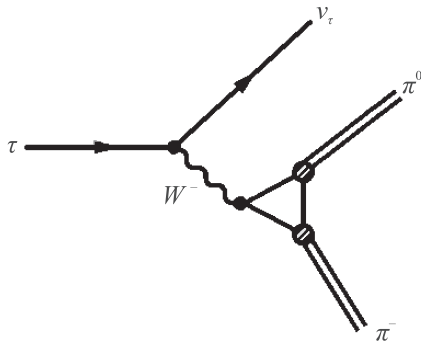


Рис. 6. Контактная диаграмма процесса  $\tau^- \rightarrow \pi^- \pi^0 \nu_\tau$

Этот треугольник приводит к интегралу того же вида, что и в случае процесса  $e^+e^-$ -аннигиляции, рассмотренного выше. Амплитуда рассматриваемого процесса распада  $\tau$ -лептона принимает вид:

$$M(\tau \rightarrow \pi\pi\nu) = -G_F V_{ud} \left[ 1 + \frac{s}{M_\rho^2 - s - i\sqrt{s}\Gamma_\rho} \right] \times \left\{ 1 + g_\rho^2 \left[ \frac{I_{1M}}{M_\rho^2} + \left( 1 + \frac{4M_\pi^2 - s}{2M_\rho^2} \right) I_{2M} \right] \right\} \times L_\mu^{\text{weak}} (p_- - p_0)^\mu, \quad (11)$$

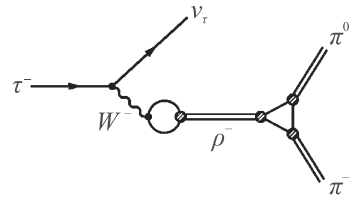


Рис. 7. Диаграмма процесса  $\tau^- \rightarrow \pi^- \pi^0 \nu_\tau$  с промежуточным  $\rho$ -мезоном

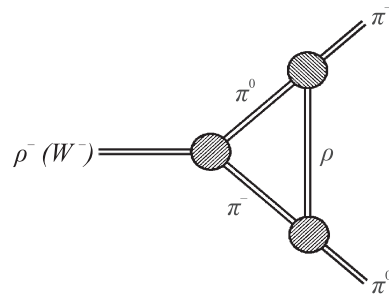


Рис. 8. Взаимодействие пионов во конечном состоянии в случае распада  $\tau$ -лептона

где  $G_F$  – константа Ферми,  $V_{ud}$  – элемент матрицы Кабиббо–Кобаяши–Маскавы,  $L_\mu^{\text{weak}} = \bar{\nu}_\tau \gamma_\mu (1 - \gamma^5) \tau^-$  – слабый лептонный ток. Первое

слагаемое в первых квадратных скобках соответствует контактному вкладу, т.е. вкладу диаграмм без перехода  $W$ -бозона в промежуточные мезоны. Второе слагаемое — вкладу с промежуточным  $\rho$ -мезоном. Первое слагаемое в фигурных скобках соответствует диаграмме без взаимодействия пионов в конечном состоянии.

В итоге для определенного в предыдущем разделе параметра обрезания мезонной петли находим парциальную ширину данного распада:

$$\text{Br}(\tau \rightarrow \pi\pi\nu) = (25.0 \pm 1.2) \%, \quad (12)$$

где теоретическая неопределенность  $\sim 5\%$  оценена по результатам сравнения предсказаний киральной  $U(2) \times U(2)$  модели НИЛ с экспериментальными данными по взаимодействию мезонов, состоящих только из легких кварков [3]. Теоретическая неопределенность связана с эффектами, нарушающими киральную симметрию, и ограниченностью ведущего по  $1/N_c$  приближения модели. Экспериментальное значение ширины этого распада [15]

$$\text{Br}(\tau \rightarrow \pi\pi\nu)_{\text{exp}} = (25.49 \pm 0.09) \%. \quad (13)$$

Без учета взаимодействия в конечном состоянии стандартная модель НИЛ предсказывала для этого распада парциальную ширину приблизительно 17%. Видно, что как и в случае электрон-позитронной аннигиляции в два пиона, учет обмена пионов  $\rho$ -мезоном позволил получить удовлетворительное согласие с экспериментальными данными и для рассматриваемого распада.

**5. Заключение.** Таким образом, мы показали, что в рассмотренных процессах учет взаимодействия в конечном состоянии играет очень важную роль. Последнее обусловлено тем, что в данных процессах пионы рождаются в  $P$ -волне, что дает им возможность обмениваться  $\rho$ -мезоном, константы взаимодействия с которым велики. Также большой вклад взаимодействия в конечном состоянии обусловлен относительной малостью энергии и близостью к порогу рождения пионов. Удовлетворительное согласие с экспериментальными данными для обоих случаев подтверждает применимость гипотезы сохранения векторного тока.

Адекватное описание взаимодействий мезонов в конечном состоянии невозможно в рамках стандартной модели НИЛ, так как она сформулирована в низшем порядке по  $1/N_c$ . Тогда как учет взаимодействия пионов в конечном состоянии требует выхода за рамки этого приближения, что и было сделано в настоящей работе. По известным эксперимен-

тальным данным для процесса  $e^+ e^- \rightarrow \pi^+ \pi^-$  было получено значение параметра обрезания мезонной петли, описывающей взаимодействие пионов в конечном состоянии. В результате удалось описать распад  $\tau^- \rightarrow \pi^- \pi^0 \nu_\tau$  в удовлетворительном согласии с экспериментом.

В данной работе мы ограничились рассмотрением области относительно малых инвариантных масс пары пионов вблизи пика  $\rho$ -мезона, в которой вклад взаимодействий в конечном состоянии оказался существенным. Понятно, что в процессе электрон-позитронной аннигиляции в два пиона при энергиях выше 1 ГэВ будет необходимо учесть и вклады возбужденных состояний мезонов, в первую очередь,  $\rho(1450)$ -мезона, что можно сделать в рамках расширенной модели НИЛ [5–7]. Однако в рассмотренной здесь области энергий мы эффективно включаем эти вклады в обсуждавшуюся выше оценку теоретической неопределенности стандартной модели НИЛ.

1. Y. Nambu and G. Jona-Lasinio, Phys. Rev. **122**, 345 (1961).
2. D. Ebert and M. K. Volkov, Z. Phys. C **16**, 205 (1983).
3. M. K. Volkov, Sov. J. Part. Nucl. **17**, 186 (1986).
4. D. Ebert and H. Reinhardt, Nucl. Phys. B **271**, 188 (1986).
5. M. K. Volkov and C. Weiss, Phys. Rev. D **56**, 221 (1997).
6. M. K. Volkov, Phys. Atom. Nucl. **60**, 1920 (1997).
7. M. K. Volkov, D. Ebert, and M. Nagy, Int. J. Mod. Phys. A **13**, 5443 (1998).
8. M. K. Volkov and A. B. Arbuzov, Phys. Part. Nucl. **47**, 489 (2016).
9. M. K. Volkov and A. B. Arbuzov, Phys.-Uspekhi **60**, 643 (2017).
10. M. K. Volkov and A. A. Pivovarov, JETP Lett. **108**, 347 (2018).
11. M. K. Volkov, A. A. Pivovarov, and K. Nurlan, Eur. Phys. J. A **55**, 165 (2019).
12. M. K. Volkov and A. A. Pivovarov, JETP Lett. **110**, 237 (2019).
13. M. K. Volkov, A. A. Pivovarov, and K. Nurlan, Nucl. Phys. A **1000**, 121810 (2020).
14. M. K. Volkov, A. A. Pivovarov, and K. Nurlan, Int. J. Mod. Phys. A **35**, 2050035 (2020).
15. M. Tanabashi, K. Hagiwara, K. Hikasa et al. (Particle Data Group), Phys. Rev. D **98**, 030001 (2018).
16. J. H. Kuhn and A. Santamaria, Z. Phys. C **48**, 445 (1990).
17. E. Bartos, S. Dubnicka, A. Z. Dubnickova, and H. Hayashii, Int. J. Mod. Phys. A **32**, 1750154 (2017).
18. J. A. Miranda and P. Roig, JHEP **11**, 038 (2018).

19. L. R. Dai, R. Pavao, S. Sakai, and E. Oset, *Eur. Phys. J. A* **55**, 20 (2019).
20. M. Benayoun, *EPJ Web Conf.* **118**, 01001 (2016).
21. M. N. Achasov, K. I. Beloborodov, A. V. Berdyugin et al. (Collaboration), *JETP* **101**(6), 1053 (2005).
22. S. Schael, R. Barate, R. Bruneliere et al. (ALEPH), *Phys. Rep.* **421**, 191 (2005).
23. M. Fujikawa, H. Hayashii, S. Eidelman et al. (Belle), *Phys. Rev. D* **78**, 072006 (2008).
24. S. Actis, A. Arbuzov, G. Balossini et al. (Working Group on Radiative Corrections and Monte Carlo Generators for Low Energies), *Eur. Phys. J. C* **66**, 585 (2010).
25. M. Dax, T. Isken, and B. Kubis, *Eur. Phys. J. C* **78**, 859 (2018).
26. S. Weinberg, *Physica A* **96**, 327 (1979).
27. J. Gasser and H. Leutwyler, *Annals Phys.* **158**, 142 (1984).
28. T. N. Truong, *Phys. Rev. Lett.* **67**, 2260 (1991).
29. A. G. Nicola, J. R. Pelaez, and G. Rios, *Phys. Rev. D* **77**, 056006 (2008).
30. D. Ebert, T. Feldmann, and M. K. Volkov, *Int. J. Mod. Phys. A* **12**, 4399 (1997).
31. M. K. Volkov, E. A. Kuraev, and Y. M. Bystritskiy, *Central Eur. J. Phys.* **8**, 580 (2010).