

## Универсальные колебательные свойства неупорядоченных систем с точки зрения теории случайных коррелированных матриц

Д. А. Колюх<sup>1)</sup>, Я. М. Бельтюков

Физико-технический институт им. А. Ф. Иоффе РАН, 194021 С.-Петербург, Россия

Поступила в редакцию 16 сентября 2020 г.

После переработки 16 сентября 2020 г.

Принята к публикации 21 сентября 2020 г.

Показано, что коррелированный ансамбль Вишарта может быть использован для изучения общих колебательных свойств устойчивых аморфных твердых тел, в которых энергия инвариантна относительно сдвига. С помощью теории случайных матриц найдены плотность колебательных состояний и динамический структурный фактор системы. Полученные результаты показывают наличие кроссовера Иоффе–Регеля между низкочастотными распространяющимися фононами и диффузонами на более высоких частотах. Приведенная плотность колебательных состояний демонстрирует бозонный пик, частота которого близка к частоте кроссовера Иоффе–Регеля.

DOI: 10.31857/S1234567820200094

Известно, что доминирующую часть колебательного спектра таких неупорядоченных систем, как аморфные диэлектрики (стекла), выше порога Иоффе–Регеля, но ниже порога локализации, занимают делокализованные колебания – *диффузоны* [1, 2]. Диффузоны распространяются посредством диффузионной передачи энергии от атома к атому. Несмотря на то, что диффузоны определяют теплопроводность стекол в широком диапазоне частот свыше 0.4 ТГц (20 К), их микроскопическая природа до сих пор остается не полностью изученной.

Другим универсальным колебательным свойством практически всех стекол является избыточная над дебаевской плотность колебательных состояний, известная как *бозонный пик*. Бозонный пик наблюдался в различных экспериментах: в комбинационном рассеянии света [3, 4], в рассеянии рентгеновских лучей [5], в неупругом нейтронном рассеянии [6], в дальней инфракрасной спектроскопии [7–9], при измерении теплоемкости аморфных тел [10–13]. Не так давно бозонный пик наблюдался в двумерных структурах [14–17]. Во многих работах отмечается корреляция между частотой бозонного пика  $\omega_b$  и частотой кроссовера Иоффе–Регеля  $\omega_{IT}$  – перехода между хорошо определенными колебаниями с большой длиной свободного пробега (фононами) и неупорядоченными колебаниями (диффузонами) [18–20]. Другими словами, бозонный пик появляется на границе фононной и диффузонной областей.

Теория бозонного пика и кроссовера Иоффе–Регеля способна пролить свет на природу колебаний в аморфных твердых телах. Существуют разные теоретические модели для описания этих свойств аморфных диэлектриков, такие как теория эффективной среды [21–25], теория мягких потенциалов [26–30], теория связанных мод [31]. Некоторые авторы связывают появление бозонного пика с сингулярностью ван-Хова поперечных акустических фононов [32–34]. Несмотря на большое число таких работ, общепринятая теория бозонного пика по-прежнему отсутствует. В данной работе в рамках модели случайных матриц мы показываем, что только два наиболее важных свойства аморфных твердых тел – механическая устойчивость и инвариантность потенциальной энергии относительно сдвига системы, достаточны для возникновения бозонного пика и кроссовера Иоффе–Регеля.

Колебания в аморфных телах определяются собственными векторами и числами динамической матрицы  $\hat{M}$ . Наличие беспорядка в аморфных системах приводит к случайному характеру матричных элементов  $M_{ij}$ . В связи с этим, теория случайных матриц может применяться для изучения колебательных свойств аморфных тел [35–38]. Теория случайных матриц широко применяется во многих областях науки и техники при анализе сложных систем, состоящих из большого числа степеней свободы [39–46]. Кроме этого, теория случайных матриц нашла применение и в гранулярных средах [47–49].

Различные ансамбли случайных матриц описывают неупорядоченные системы с разным свойства-

<sup>1)</sup>e-mail: conyuh.dmitrij@yandex.ru

ми симметрии [50]. Так, например, классические ансамбли случайных матриц описывают системы с различной симметрией по отношению к инверсии времени [51, 52]. Однако не каждый матричный ансамбль способен учесть особые корреляции между матричными элементами  $M_{ij}$  в аморфных телах. Рассматриваемый в данной работе ансамбль является коррелированным и учитывает только два наиболее важных свойства аморфных твердых тел: (i) система находится вблизи *устойчивого* положения равновесия и (ii) потенциальная энергия инвариантна относительно *сдвига* системы как целого.

*Коррелированный ансамбль Вишарта.* Механическая устойчивость аморфных тел соответствует положительно определенной динамической матрице  $\hat{M}$ . Любая положительно определенная матрица может быть представлена в виде  $\hat{M} = \hat{A}\hat{A}^T$ , и наоборот,  $\hat{A}\hat{A}^T$  является положительно определенной матрицей для любой (не обязательно квадратной) матрицы  $\hat{A}$  [53]. Исходя из этого, мы рассмотрим случайную матрицу  $\hat{A}$  размером  $N \times K$  для получения механически устойчивой системы с динамической матрицей в виде ансамбля Вишарта  $\hat{M} = \hat{A}\hat{A}^T$ . Каждый столбец матрицы  $\hat{A}$  можно интерпретировать как элементарную *связь* с потенциальной энергией в виде положительно определенной квадратичной формы [54]

$$U_k = \frac{1}{2} \left( \sum_i A_{ik} u_i \right)^2, \quad (1)$$

где  $u_i$  – смещение  $i$ -го атома из положения равновесия. Каждая строка матрицы  $\hat{A}$  соответствует некоторой степени свободы. Заметим, что каждая связь, соответствующая столбцу матрицы  $\hat{A}$ , описывает взаимодействие между несколькими степенями свободы. Так, например, связь, определяющая угол между тремя ближайшими атомами в аморфном кремнии, описывает взаимодействие девяти степеней свободы.

Разница между числом связей  $K$  и числом степеней свободы  $N$  системы играет ключевую роль в ее колебательных и механических свойствах. В механически стабильной системе с конечной жесткостью число связей должно быть больше числа степеней свободы, что известно как правило Максвелла. Для гранулярных сред было показано, что многие свойства (такие, как модуль упругости и частота кроссовера) зависят от параметра  $z - z_c \sim K - N$  [47, 49], где число упругих контактов между гранулами определяет число связей  $K$ .

Энергия связи  $U_k$  не должна зависеть от сдвига  $u_i \rightarrow u_i + \text{const}$ . Поэтому матрица  $\hat{A}$  должна удовлетворять *правилу сумм*  $\sum_i A_{ik} = 0$ . Это означает, что

матричные элементы  $A_{ik}$  *коррелированы*, что не было учтено ранее [47]. В простейшем случае будем считать, что аморфная система содержит статистически эквивалентные случайные связи. В этом случае парные корреляции между матричными элементами  $A_{ik}$  могут быть записаны как

$$\langle A_{ik} A_{jl} \rangle = \frac{1}{N} C_{ij} \delta_{kl}, \quad (2)$$

где  $\hat{C}$  – некоторая матрица корреляций. Можно показать, что матрица корреляций  $\hat{C}$  пропорциональна усредненной динамической матрице:  $\hat{C} = \frac{N}{K} \langle \hat{M} \rangle$ . Для простоты рассмотрим скалярную модель аморфного тела с простой кубической решеткой со случайными связями и единичной постоянной решетки  $a_0 = 1$ . В этом случае усредненная динамическая матрица  $\langle \hat{M} \rangle$  является матрицей, описывающей кристаллическую систему. Поэтому естественно предполагать, что матрица корреляций  $\hat{C}$  является регулярной матрицей, которая описывает простую кубическую решетку со взаимодействием соседних атомов. Недиagonальные элементы  $C_{ij} = -\Omega^2$ , если атомы с индексами  $i$  и  $j$  являются ближайшими соседями в решетке, и  $C_{ij} = 0$  в остальных случаях. Диагональные элементы  $C_{ii} = 6\Omega^2$ . Постоянная  $\Omega$  определяет характерную частоту колебаний системы. Собственные значения регулярной матрицы корреляций  $\hat{C}$  зависят от волнового вектора  $\mathbf{q}$ , что выражается в виде закона дисперсии

$$\omega_0^2(\mathbf{q}) = 4\Omega^2 \left( \sin^2 \frac{q_x}{2} + \sin^2 \frac{q_y}{2} + \sin^2 \frac{q_z}{2} \right). \quad (3)$$

Статистические свойства случайной матрицы  $\hat{M}$  связаны с известной матрицей корреляций  $\hat{C}$ . Для нахождения этих свойств мы рассмотрим следующие резольвенты:

$$\hat{G}(z) = \left\langle \frac{1}{z - \hat{M}} \right\rangle, \quad \hat{G}_0(Z) = \frac{1}{Z - \hat{C}}, \quad (4)$$

где  $z$  и  $Z$  – комплексные параметры. Усреднение проводится по разным реализациям случайной матрицы  $\hat{M}$ . В термодинамическом пределе  $N \rightarrow \infty$  существует фундаментальное соотношение между спектральными свойствами  $\hat{M}$  и  $\hat{C}$  [55]:

$$Z \hat{G}_0(Z) = z \hat{G}(z), \quad (5)$$

где комплексные параметры  $z$  и  $Z$  связаны конформным преобразованием  $Z(z)$  следующего вида:

$$zZ + \frac{Z^2}{N} \text{Tr} \hat{G}_0(Z) = z. \quad (6)$$

Параметр  $\varkappa = (K - N)/N$  определяет относительное превышение числа связей над числом степеней свободы, которое контролирует соотношение между жесткостью и беспорядком в системе. Например, в аморфном кремнии в модели Стиллинджера–Вебера на один атом приходится  $4/2 = 2$  связи, определяющих расстояние между атомами, и 6 связей, определяющих углы между связями аморфного кремния [56]. Поэтому мы можем оценить параметр как  $\varkappa = 5/3$ , что по порядку величины близко к 1. В аморфном  $\text{SiO}_2$  на каждый атом кремния приходится 9 степеней свободы. При этом число связей можно оценить как 12 (4 определяют расстояние Si-O, 6 определяют углы O-Si-O и  $4/2 = 2$  определяют углы Si-O-Si). В этом случае параметр  $\varkappa = 1/3$  (в реальности связь Si-O-Si имеет меньшую жесткость, в результате чего эффективные значения числа связей  $N$  и параметра  $\varkappa$  несколько меньше). Отличие в параметрах  $\varkappa$  хорошо коррелирует с формой плотности колебательных состояний, положением частоты бозонного пика и критерия Июффе–Регеля в аморфных Si и  $\text{SiO}_2$ . В модели гранулярных сред [49] параметр  $\varkappa$  определяется числом контактов между соседними гранулами и может меняться в широком диапазоне значений.

*Плотность колебательных состояний.* Для изучения плотности колебательных состояний  $g(\omega)$  мы рассмотрим нормированный след резольвенты  $\hat{G}(z)$ , являющийся преобразованием Стилтеса от  $g(\omega)$ :

$$F(z) = \frac{1}{N} \text{Tr} \hat{G}(z) = \int \frac{g(\omega)}{z - \omega^2} d\omega. \quad (7)$$

Для регулярной матрицы корреляций  $\hat{C}$  мы также можем посчитать преобразованием Стилтеса  $F_0(Z) = \frac{1}{N} \text{Tr} \hat{G}_0(Z)$ . Используя закон дисперсии для кубического кристалла (3), мы находим

$$F_0(Z) = \frac{1}{2\Omega^2} W_s \left( \frac{Z}{2\Omega^2} - 3 \right), \quad (8)$$

где  $W_s$  – третий интеграл Ватсона [57]. Из формулы (5) получается соотношение  $ZF_0(Z) = zF(z)$ . При этом плотность колебательных состояний может быть выражена в виде  $g(\omega) = \frac{2\omega}{\pi} \text{Im} F(\omega^2 - i0)$ . В итоге мы находим  $g(\omega)$  в следующем виде:

$$g(\omega) = \frac{2\omega}{\pi} \text{Im} \frac{1}{Z(\omega^2)}, \quad (9)$$

где комплексный параметр  $Z$  определяется вещественным параметром  $\omega^2$  с помощью следующего комплексного уравнения:

$$\varkappa Z + Z^2 F_0(Z) = \omega^2. \quad (10)$$

Это уравнение определяет некоторый контур на комплексной плоскости, известный как критический горизонт [58].

Уравнения (8)–(10) определяют плотность состояний  $g(\omega)$  в неявном виде, что может быть посчитано численно. Результат представлен на рис. 1. Случай

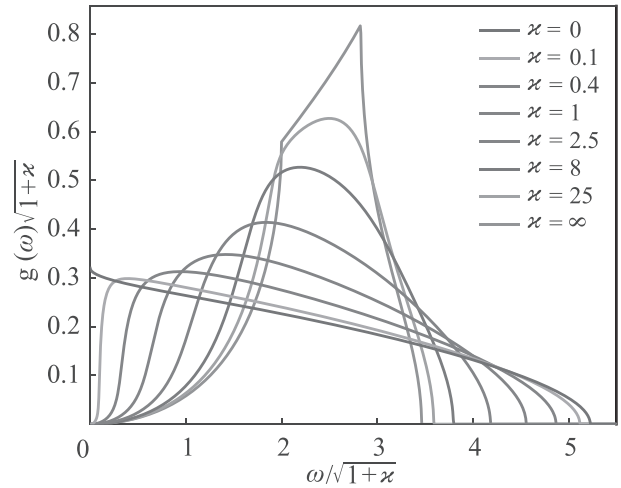


Рис. 1. (Цветной онлайн) Плотность колебательных состояний  $g(\omega)$  для различных значений параметра  $\varkappa$ , посчитанная с помощью уравнений (8)–(10)

$\varkappa = 0$  соответствует мягкой аморфной среде с нулевой макроскопической жесткостью. При увеличении  $\varkappa$  плотность колебательных состояний постепенно переходит к плотности состояний кристаллической системы ( $\varkappa = \infty$ ).

*Динамический структурный фактор.* Для анализа пространственной структуры колебательных мод мы рассчитали динамический структурный фактор, который определяет связь между частотой  $\omega$  и волновым вектором  $\mathbf{q}$  [34]. В скалярной модели динамический структурный фактор имеет вид  $S(\mathbf{q}, \omega) = (k_B T q^2 / m \omega^2) \mathcal{F}(\mathbf{q}, \omega)$ , где фурье-образ собственных мод определен как  $\mathcal{F}(\mathbf{q}, \omega) = \sum_n |\langle n | \mathbf{q} \rangle|^2 \delta(\omega - \omega_n)$ . Заметим, что динамический структурный фактор может быть записан с помощью резольвенты  $\hat{G}$ :

$$S(\mathbf{q}, \omega) = \frac{2k_B T q^2}{\pi m \omega} \text{Im} \langle \mathbf{q} | \hat{G}(\omega^2) | \mathbf{q} \rangle. \quad (11)$$

Тогда, используя соотношения (5) и  $\langle \mathbf{q} | \hat{G}_0(Z) | \mathbf{q} \rangle = 1/(Z - \omega_0^2(\mathbf{q}))$ , получаем динамический структурный фактор в форме затухающего гармонического осциллятора:

$$S(\mathbf{q}, \omega) = \frac{k_B T}{\pi m} \frac{2q^2 \Gamma(\mathbf{q}, \omega)}{(\omega^2 - q^2 E(\mathbf{q}, \omega))^2 + \omega^2 \Gamma^2(\mathbf{q}, \omega)}, \quad (12)$$

где модуль Юнга

$$E(\mathbf{q}, \omega) = \frac{\omega_0^2(\mathbf{q})}{q^2} \operatorname{Re} \frac{\omega^2}{Z(\omega^2)}, \quad (13)$$

и затухание

$$\Gamma(\mathbf{q}, \omega) = \omega_0^2(\mathbf{q}) \operatorname{Im} \frac{\omega}{Z(\omega^2)} = \frac{\pi}{2} \omega_0^2(\mathbf{q}) g(\omega). \quad (14)$$

На рисунке 2 показан нормированный на максимум по частоте фурье-образ собственных мод для

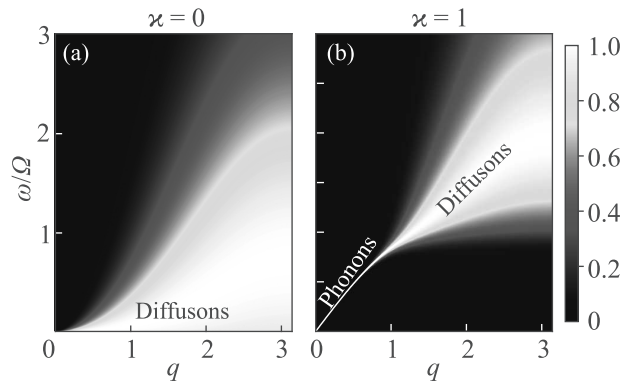


Рис. 2. (Цветной онлайн) Колебательные моды неупорядоченного тела в обратном пространстве. Цветом показан нормированный фурье-образ собственных мод  $\mathcal{F}(\mathbf{q}, \omega) / \max_{\omega} \mathcal{F}(\mathbf{q}, \omega)$  для  $\kappa = 0$  и  $\kappa = 1$

различных параметров  $\kappa$ . Такой рисунок наглядно отображает форму динамического структурного фактора и позволяет качественно определить связь частоты  $\omega$  и волнового вектора  $\mathbf{q}$ . В случае  $\kappa = 0$  однозначная связь между  $\omega$  и  $\mathbf{q}$  отсутствует, поэтому можно считать, что такой структурный фактор соответствует *диффузорам* [2, 37]. Для  $\kappa = 1$  в низкочастотной области хорошо проявляется линейная дисперсия  $\omega \sim \mathbf{q}$  с небольшим уширением из-за малого рассеяния плоских волн. Такие низкочастотные колебания распространяются как слабозатухающие *фононы*. Однако в доминирующем диапазоне частот структурный фактор сильно уширен. Это означает, что для  $\kappa \neq 0$  существует кроссовер между фононами и диффузорами, известный как кроссовер Иоффе–Регеля. Отметим, что при относительно высоких частотах имеет место локализация Андерсона, однако она оказывает влияние только на небольшую часть наиболее высокочастотных колебаний [2, 37].

*Критерий Иоффе–Регеля, фононы и диффузоры.* Для анализа кроссовера Иоффе–Регеля мы рассмотрим низкочастотную область  $\omega \ll \Omega$ . В этом случае мы можем использовать разложение  $F_0(Z)$  по малому аргументу. Для *любой* трехмерной системы с ли-

нейным законом дисперсии  $\omega_0(\mathbf{q}) = \Omega q$  при  $q \rightarrow 0$  это разложение имеет вид

$$F_0(Z) = -a^2 + \frac{\sqrt{-Z}}{4\pi\Omega^3} + O(Z). \quad (15)$$

В случае рассматриваемой кубической решетки  $a = \Omega^{-1} \sqrt{w_s/2}$ , где  $w_s \approx 0.505462$  – постоянная Ватсона [57]. Используя (15), мы находим критический горизонт  $Z(\omega)$  для  $\omega \ll \Omega$  в явном виде, используя метод итераций для решения (10):

$$\frac{1}{Z(\omega^2)} = \frac{\kappa}{2\omega^2} + \frac{1}{\omega} \sqrt{f(\omega) + \frac{i\omega/4\pi\Omega^3}{\sqrt{\kappa/2 + \omega\sqrt{f(\omega)}}}}, \quad (16)$$

где  $f(\omega) = \frac{\kappa^2}{4\omega^2} - a^2$ . Знак  $f(\omega)$  существенно влияет на поведение  $Z(\omega^2)$ . Соответствующая частота кроссовера  $\omega_c = \kappa/2a$  разделяет частотную область на две части.

Для  $\kappa \ll 1$  результат (16) можно упростить и получить плотность колебательных состояний для областей  $\omega < \omega_c$  и  $\omega > \omega_c$  отдельно:

$$g(\omega) = \frac{\omega}{4\pi^2\Omega^3 a^{3/2}} \sqrt{\frac{\omega_c - \sqrt{\omega_c^2 - \omega^2}}{\omega_c^2 - \omega^2}}, \quad \omega < \omega_c, \quad (17)$$

$$g(\omega) = \frac{2a}{\pi\omega} \sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}, \quad \omega > \omega_c. \quad (18)$$

Существует узкая область плавного перехода между (17) и (18), однако она мала по сравнению с  $\omega_c$  при  $\kappa \ll 1$ .

В низкочастотной области  $\omega \ll \omega_c$  плотность колебательных состояний принимает дебаевскую зависимость  $g(\omega) \propto \omega^2$ :

$$g_D(\omega) = \frac{\omega^2}{2\pi^2\Omega^3 \kappa^{3/2}}, \quad (19)$$

что соответствует статическому модулю Юнга  $E_0 = \Omega^2 \kappa$ . Для  $\kappa = 0$  модуль Юнга обращается в нуль, что соответствует предельно мягкой системе без распространения в ней фононов.

Рисунок 3 демонстрирует бозонный пик в приведенной плотности состояний  $g(\omega)/g_D(\omega)$  для различных значений параметра  $\kappa$ . Положение максимума  $g(\omega)/g_D(\omega)$  определяет частоту бозонного пика  $\omega_b$ , которая связана с частотой кроссовера  $\omega_c$ . При  $\kappa \ll 1$  данная связь имеет вид  $\omega_b = \sqrt{3}/2\omega_c$ . Как следствие, модуль Юнга  $E_0$  пропорционален частоте бозонного пика  $\omega_b$ . Эта корреляция наблюдалась ранее различными экспериментальными и теоретическими группами [13, 59]. Высота бозонного пика пропорциональна  $\kappa^{-1/2}$  и имеет расходимость в случае  $\kappa \rightarrow 0$ . Бозонный пик также наблюдался в двумерных системах с логарифмической расходимостью высоты бозонного пика [60].

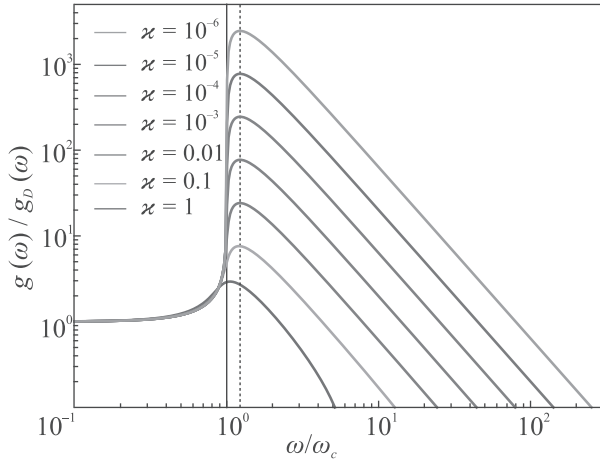


Рис. 3. (Цветной онлайн) Приведенная плотность состояний  $g(\omega)/g_D(\omega)$  для различных параметров системы  $\kappa$ , рассчитанная с помощью уравнений (8)–(10). Сплошной линией отмечена частота кроссовера  $\omega_c$ , пунктирной линией отмечена частота бозонного пика  $\omega_b = \sqrt{3/2}\omega_c$

Найденный динамический структурный фактор (12) определяется модулем Юнга  $E(\mathbf{q}, \omega)$  и затуханием  $\Gamma(\mathbf{q}, \omega)$ . В случае  $\kappa \ll 1$  и  $q \ll 1$  модуль Юнга можно разделить на две части, зависящих только от частоты:

$$E(\omega) = \frac{\Omega^2 \kappa}{2} \left( 1 + \sqrt{1 - \frac{\omega^2}{\omega_c^2}} \right), \quad \omega < \omega_c, \quad (20)$$

$$E(\omega) = \frac{\Omega^2 \kappa}{2} + \frac{1}{4\pi\Omega} \left( \frac{\omega}{2a} \right)^{3/2}, \quad \omega > \omega_c. \quad (21)$$

Для  $\omega < \omega_c$  мы находим дисперсию фононов, используя соотношение  $\omega^2/q^2 = E(\omega)$ :

$$\omega(q) = \Omega^2 a q \sqrt{2q_c^2 - q^2}, \quad (22)$$

где волновой вектор кроссовера  $q_c = \sqrt{\kappa/2\Omega^2 a^2}$  соответствует частоте кроссовера  $\omega_c$ . Для низкочастотных мод с  $q \ll q_c$  имеется линейная дисперсия  $\omega(q) = \sqrt{E_0}q$ .

Затухание  $\Gamma$  определяется плотностью колебательных состояний  $g(\omega)$  согласно уравнению (14). Используя дисперсионное соотношение для  $\omega < \omega_c$ , можно записать, что

$$\Gamma = \frac{q^4}{8\pi a} \frac{\sqrt{2q_c^2 - q^2}}{q_c^2 - q^2}. \quad (23)$$

Для низкочастотных мод с  $q \ll q_c$  затухание  $\Gamma(\mathbf{q}) \sim \sim q^4$ , что соответствует рэлеевскому рассеянию на беспорядке (рис. 4). В реальных аморфных телах может происходить дополнительное резонансное рассеяние фононов на квазилокальных колебаниях [30],

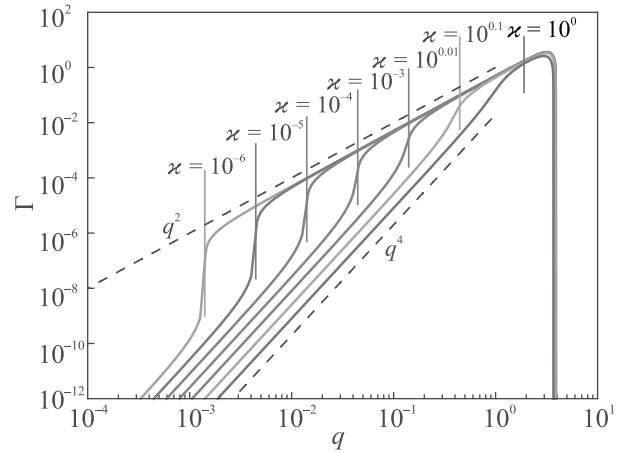


Рис. 4. (Цветной онлайн) Затухание  $\Gamma$  в зависимости от волнового вектора  $\mathbf{q}$  при различных значениях параметра  $\kappa$ , рассчитанное с помощью уравнений (8)–(10), (14). Пунктирной линией отмечено рэлеевское рассеяние  $\Gamma \propto q^4$  и диффузионный закон  $\Gamma \propto q^2$ . Вертикальными сплошными линиями отмечен волновой вектор кроссовера  $q_c$  для соответствующего значения параметра  $\kappa$

чья плотность состояний имеет вид  $g_{\text{qlv}} \sim \omega^4$ . Однако количество квазилокальных колебаний уменьшается с уменьшением скорости охлаждения системы [61], и это явление выходит за рамки общих предположений (i) и (ii), приведенных во введении. При этом мы можем предполагать, что в реальных аморфных телах могут возникать локальные аномально мягкие участки, чья статистика выходит за рамки рассмотренного приближения парных корреляций. Наличие таких участков будет приводить к появлению дополнительных низкочастотных (мягких) мод в области  $\omega < \omega_c$  и размытию ступеньки плотности колебательных состояний в области кроссовера.

Длина свободного пробега определяется групповой скоростью  $v_g = d\omega(q)/dq$  и затуханием  $\Gamma$  как

$$l = \frac{v_g}{\Gamma} = \frac{16\pi\Omega^2 a^2 (q_c^2 - q^2)^2}{q^4 (2q_c^2 - q^2)}. \quad (24)$$

В переходной области  $\omega \approx \omega_c$  длина свободного пробега  $l$  становится порядка длины волны  $\lambda = 2\pi/q$  (рис. 5). Это означает, что частота  $\omega_c$  определяет кроссовер Иоффе–Регеля, который можно записать как  $l/\lambda \approx 1/2$  [37].

Для анализа динамического структурного фактора в области частот  $\omega > \omega_c$  мы рассмотрим доминирующую часть этой области:  $\omega_c \ll \omega \ll \Omega$ . В этом

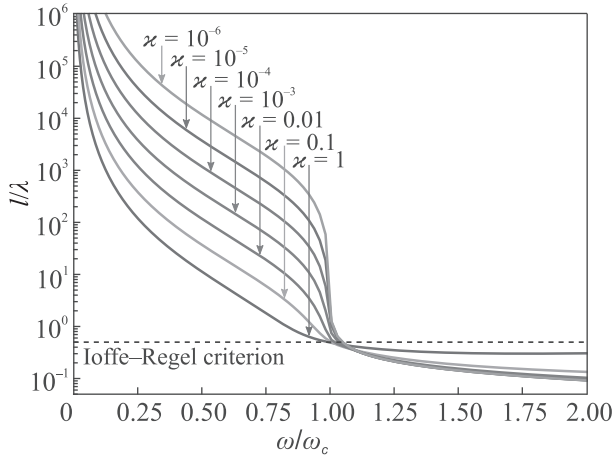


Рис. 5. (Цветной онлайн) Отношение длины свободного пробега  $l$  к длине волны  $\lambda$  как функция нормированной частоты  $\omega/\omega_c$  для различных значений параметра  $\varkappa$ . Горизонтальная пунктирная линия показывает критерий Иоффе–Регеля  $l \approx \lambda/2$

случае динамический структурный фактор (12) принимает диффузионный вид:

$$S(\mathbf{q}, \omega) = \frac{k_B T q^2}{\pi m \omega^2} \frac{2\Gamma(\mathbf{q}, \omega)}{\omega^2 + \Gamma^2(\mathbf{q}, \omega)}, \quad (25)$$

что соответствует понятию диффузонов, введенному в [1, 2]. В этом частотном диапазоне  $g(\omega) \approx 2a/\pi$ , и  $\Gamma = Dq^2$ , где  $D = \Omega^2 a$  – коэффициент диффузии. Ранее такая форма структурного фактора была получена численно [37].

Рисунок 4 показывает кроссовер между низкочастотным рэлеевским рассеянием  $\Gamma \propto q^4$  и диффузионным затуханием  $\Gamma \propto q^2$ . Эта квадратичная зависимость выше кроссовера Иоффе–Регеля отмечалась ранее в экспериментальных и теоретических работах [62–66].

*Изостатический случай.* При  $\varkappa = 0$  число степеней свободы  $N$  равно числу связей  $K$ , и макроскопическая жесткость системы равна нулю. В теории гранулярных сред этот случай известен как изостатический. При этом низкочастотная плотность колебательных состояний не подчиняется закону Дебая и отлична от нуля. Используя полученные результаты теории случайных матриц, мы нашли, что в изостатическом случае низкочастотная плотность колебательных состояний обладает особенностью

$$g_{\text{is}}(\omega) \simeq \frac{2a}{\pi} - \frac{1}{4\pi^2 \Omega^3} \sqrt{\frac{\omega}{2a^3}}. \quad (26)$$

Такой вид плотности колебательных состояний наблюдался численно в модели случайных матриц [37]

и в гранулярных средах [49, 67, 68]. Как показывает рассмотренная модель, эта зависимость связана с диффузионным характером колебаний в данном диапазоне частот. При этом динамический структурный фактор соответствует формуле (25).

Подводя итог, в данной работе мы показали, что теория случайных матриц может успешно применяться для изучения основных колебательных свойств аморфных тел. Учитывая только наиболее важные корреляции элементов случайной матрицы, обеспечивающих механическую устойчивость (i) и инвариантность относительно сдвига (ii), мы нашли плотность колебательных состояний и динамический структурный фактор системы. Мы показали наличие кроссовера Иоффе–Регеля между низкочастотными слабозатухающими фонами и диффузонами, лежащими в области более высоких частот. Бозонный пик естественным образом появляется вблизи кроссовера Иоффе–Регеля. Отметим, что полученные в приближении  $\varkappa \ll 1$ ,  $\omega \ll \Omega$  формулы (15)–(25) применимы для любой трехмерной системы, тогда как рисунки демонстрируют точные результаты, полученные для простой кубической решетки. Полученные формулы соответствуют масштабным соотношениям в свойствах поперечных колебаний гранулярных сред при  $\varkappa \sim z - z_c \sim \Delta\phi^{1/2}$  и  $\Omega \sim \Delta\phi^{(\alpha-2)/2}$  [49, 22, 59].

Мы благодарим Д. А. Паршина и В. И. Козуба за конструктивные дискуссии.

Эта работа выполнена при поддержке Гранта Президента Российской Федерации МК-3052.2019.2.

1. P. V. Allen and J. L. Feldman, Phys. Rev. B **48**, 12581 (1993).
2. B. Allen, J. L. Feldman, J. Fabian, and F. Wooten, Phil. Mag. B **79**, 1715 (1999).
3. V. K. Malinovsky and A. P. Sokolov, Solid State Commun. **57**, 757 (1986).
4. M. Kabeya, T. Mori, Y. Fujii, A. Koreeda, B. W. Lee, J.-H. Ko, and S. Kojima, Phys. Rev. B **94**, 224204 (2016).
5. P. Benassi, M. Krisch, C. Masciovecchio, V. Mazzacurati, G. Monaco, G. Ruocco, F. Sette, and R. Verbeni, Phys. Rev. Lett. **77**, 3835 (1996).
6. A. Wischniewski, U. Buchenau, A. J. Dianoux, W. A. Kamitakahara, and J. L. Zarestky, Phil. Mag. B **77**, 579 (1998).
7. K. Matsuishi, S. Onari, and T. Arai, Jpn. J. Appl. Phys. **25**, 1144 (1986).
8. K. W. Hutt, W. A. Phillips, and R. J. Butcher, J. Phys. Condens. Matter **1**, 4767 (1989).
9. T. Ohsaka and T. Ihara, Phys. Rev. B **50**, 9569 (1994).

10. R. C. Zeller and R. O. Pohl, *Phys. Rev. B* **4**, 2029 (1971).
11. W. A. Phillips, *Amorphous Solids: Low-Temperature Properties*, Springer, Berlin (1981).
12. G. K. White, S. J. Collocott, and J. S. Cook, *Phys. Rev. B* **29**, 4778 (1984).
13. S. Kojima, Y. Matsuda, M. Kodama, H. Kawaji, and T. Atake, *Chin. J. Phys.* **49**, 414 (2011).
14. W. Steurer, A. Apfalter, M. Koch, W. E. Ernst, B. Holst, E. Søndergård, and J. R. Manson, *Phys. Rev. Lett.* **99**, 035503 (2007).
15. W. Steurer, A. Apfalter, M. Koch, W. E. Ernst, E. Søndergård, J. R. Manson, and B. Holst, *Phys. Rev. B* **78**, 045427 (2008).
16. L. Zhang, J. Zheng, Y. Wang, L. Zhang, Z. Jin, L. Hong, Y. Wang, and J. Zhang, *Nat. Commun.* **8**, 67 (2017).
17. Y. Wang, L. Hong, Y. Wang, W. Schirmacher, and J. Zhang, *Phys. Rev. B* **98**, 174207 (2018).
18. B. Rufflé, G. Guimbretière, E. Courtens, R. Vacher, and G. Monaco, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 045502 (2006).
19. B. Rufflé, D. A. Parshin, E. Courtens, and R. Vacher, *Phys. Rev. Lett.* **100**, 015501 (2008).
20. H. Shintani and H. Tanaka, *Nature Mater.* **7**, 870 (2008).
21. W. Schirmacher, G. Ruocco, and T. Scopigno, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 025501 (2007).
22. M. Wyart, *EPL* **89**, 64001 (2010).
23. A. Marruzzo, W. Schirmacher, A. Fratallocchi, and G. Ruocco, *Sci. Rep.* **3**, 1407 (2013).
24. E. DeGiuli, A. Laversanne-Finot, G. Diring, E. Lerner, and M. Wyart, *Soft Matter* **10**, 5628 (2014).
25. E. DeGiuli, E. Lerner, and M. Wyart, *J. Chem. Phys.* **142**, 164503 (2015).
26. V. L. Gurevich, D. A. Parshin, and H. R. Schober, *Phys. Rev. B* **67**, 094203 (2003).
27. D. A. Parshin, H. R. Schober, and V. L. Gurevich, *Phys. Rev. B* **76**, 064206 (2007).
28. В. Г. Карпов, М. И. Клиггер, Ф. Н. Игнатъев, *ЖЭТФ* **84**, 760 (1983).
29. U. Buchenau, Yu. M. Galperin, V. L. Gurevich, and H. R. Schober, *Phys. Rev. B* **43**, 5039 (1991).
30. U. Buchenau, Yu. M. Galperin, V. L. Gurevich, D. A. Parshin, M. A. Ramos, and H. R. Schober, *Phys. Rev. B* **46**, 2798 (1992).
31. W. Götze and M. R. Mayr, *Phys. Rev. E* **61**, 587 (2000).
32. S. N. Taraskin, Y. L. Loh, G. Natarajan, and S. R. Elliott, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 1255 (2001).
33. A. I. Chumakov, G. Monaco, A. Monaco et al. (Collaboration), *Phys. Rev. Lett.* **106**, 225501 (2011).
34. H. Shintani and H. Tanaka, *Nature Mater.* **7**, 870 (2008).
35. T. S. Grigera, V. Martin-Mayor, G. Parisi, and P. Verrocchio, *J. Phys.: Condens. Matter* **14**, 2167 (2002).
36. M. L. Manning and A. J. Liu, *EPL* **109**, 36002 (2015).
37. Y. M. Beltukov, V. I. Kozub, and D. A. Parshin, *Phys. Rev. B* **87**, 134203 (2013).
38. M. Baggioli, R. Milkus, and A. Zaccone, *Phys. Rev. E* **100**, 062131 (2019).
39. R. Speicher and C. Vargas, *Random Matrices: Theory and Applications* **1**, 1150008 (2012).
40. L. Laloux, P. Cizeau, M. Potters, and J.-P. Bouchaud, *Int. J. Theor. Appl. Finance* **3**, 391 (2000).
41. K. Rajan and L. F. Abbott, *Phys. Rev. Lett.* **97**, 188104 (2006).
42. J. Harnad, *Random Matrices, Random Processes and Integrable Systems*, Springer, N.Y. (2011).
43. A. M. Tulino and S. Verdu, *Found. Trends Commun. Inf. Theory* **1**, 1 (2004).
44. K. E. Wage, *J. Acoust. Soc. Am.* **138**, 1840 (2015).
45. H. Meyer and J. C. Angles d'Auriac, *Phys. Rev. E* **55**, 6608 (1997).
46. N. A. Olekhno and Y. M. Beltukov, *Phys. Rev. E* **97**, 050101(R) (2018).
47. Я. М. Бельтюков, *Письма в ЖЭТФ* **101**, 377 (2015).
48. A. J. Liu and S. R. Nagel, *Annu. Rev. Condens. Matter Phys.* **1**, 347 (2010).
49. C. S. O'Hern, L. E. Silbert, A. J. Liu, and S. R. Nagel, *Phys. Rev. E* **68**, 011306 (2003).
50. F. Evers and A. D. Mirlin, *Rev. Mod. Phys.* **80**, 1355 (2008).
51. F. J. Dyson, *J. Math. Phys.* **3**, 140 (1962).
52. F. J. Dyson, *J. Math. Phys.* **3**, 1199 (1962).
53. R. Bhatia, *Positive Definite Matrices*, Princeton University Press, Princeton (2007).
54. Я. М. Бельтюков, Д. А. Паршин, *Письма в ЖЭТФ* **104**, 570 (2016).
55. Z. Burda, A. Görlich, A. Jarosz, and J. Jurkiewicz, *Physica A* **343**, 295 (2004).
56. F. H. Stillinger and T. A. Weber, *Phys. Rev. B* **31**, 5262 (1985).
57. I. J. Zucker, *J. Stat. Phys.* **145**, 591 (2011).
58. Z. Burda, A. Görlich, J. Jurkiewicz, and B. Waclaw, *Eur. Phys. J. B* **49**, 319 (2006).
59. V. Vitelli, N. Xu, M. Wyart, A. J. Liu, and S. R. Nagel, *Phys. Rev. E* **81**, 021301 (2010).
60. Д. А. Коноух, Я. М. Бельтюков, *ФТТ* **62**, 603 (2020).
61. C. Rainone, E. Bouchbinder, and E. Lerner, *PNAS* **117**, 5228 (2020).
62. F. Sette, M. H. Krisch, C. Masciovecchio, G. Ruocco, and G. Monaco, *Science* **280**, 1550 (1998).
63. G. Ruocco and F. Sette, *J. Phys.: Condens. Matter* **13**, 9141 (2001).
64. J. K. Christie, S. N. Taraskin, and S. R. Elliott, *J. Non-Cryst. Solids* **353**, 2272 (2007).
65. G. Monaco and S. Mossa, *PNAS* **106**, 16907 (2009).
66. H. Mizuno and A. Ikeda, *Phys. Rev. E* **98**, 062612 (2018).
67. M. Wyart, L. E. Silbert, S. R. Nagel, and T. A. Witten, *Phys. Rev. E* **72**, 051306 (2005).
68. O. Narayan and H. Mathur, arXiv:2006.16497.