

Вихревые нити на массивах связанных осцилляторов в режиме нелинейного резонанса

В. П. Рубан¹⁾

Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН, 142432 Черноголовка, Россия

Поступила в редакцию 16 сентября 2020 г.

После переработки 23 сентября 2020 г.

Принята к публикации 23 сентября 2020 г.

Численное моделирование указывает на возможность долговременного существования вихревых структур в виде квантованных нитей на массивах связанных слабодиссипативных нелинейных осцилляторов в пределах трехмерной конечной области под резонансным внешним воздействием, приложенным на границе области. Качественно выяснены диапазоны параметров системы и внешнего сигнала, благоприятные для формирования модуляционно устойчивого квазиоднородного энергетического фона – решающего фактора для реализации данного явления.

DOI: 10.31857/S1234567820200100

Как известно, квантованные вихри являются характерными для нелинейных комплексных волновых полей когерентными структурами – при условии согласования знаков дисперсии и нелинейности [1–7]. Например, уравнение Гросса–Питаевского (дефокусирующее нелинейное уравнение Шредингера с внешним потенциалом) описывает вихри в захваченных Бозе-конденсатах холодных атомов. Эти объекты стали предметом интенсивных исследований (см., в частности, [8–17]).

В последние десятилетия в связи с развитием технологии метаматериалов (в широком смысле этого слова) когерентные структуры изучаются не только в сплошных средах, но и в (квази-) дискретных системах (дискретные солитоны и бризеры, вихри и вихревые солитоны на решетках; см. [18–30] и ссылки там).

Надо отметить, что собственно вихри как дальнедействующие объекты на модуляционно устойчивом фоне составили лишь малую долю в этих исследованиях по сравнению с локализованными структурами, характерными для модуляционно неустойчивых дискретных систем. В частности, традиционные вихри в рамках дискретного нелинейного уравнения Шредингера (ДНУШ) рассматривались в работах [24, 27, 28], а вихри на решетках осцилляторов моделировались численно в недавних работах [29, 30].

При этом в ходе численных экспериментов выяснилось, что диссипация должна быть чрезвычайно мала (требуемая добротность осцилляторов $Q \gtrsim 10^4$), чтобы в автономной дискретной системе

можно было успеть пронаблюдать динамику взаимодействующих вихревых структур до того, как система перейдет в линейный режим.

Встает проблема: как ослабить столь непомерное требование высокой добротности? Возможное ее решение – поддерживать энергетический фон системы за счет монохроматической по времени накачки. Чтобы внешнее воздействие не слишком изменяло динамические свойства решетки, накачку следует приложить только к тем узлам, которые находятся на границе системы. А чтобы вихрям было “выгодно” сформироваться и затем продолжить существование внутри массива – начальные фазы вынуждающих сигналов сделать плавно меняющимися от одного граничного узла к другому. Такой рецепт полностью оправдал себя в работе [30], где моделировались двумерные массивы нелинейных электрических колебательных контуров, объединенных емкостными связями в единую сеть, как показано на рис. 1. Слабодиссипативные вихревые структуры в такой модели наблюдались численно в течение многих тысяч периодов колебаний. Энергетический фон при этом был квазиоднородным в пространстве, поскольку осцилляторы находились в режиме нелинейного резонанса (на его верхней ветви), когда амплитуда колебаний в большей степени определяется частотой внешнего периодического воздействия, и в значительно меньшей степени – его амплитудой. Однако, благоприятные для вихрей параметрические области остались неопределенными.

В данной работе делается следующий естественный и важный шаг в изучении подобных систем – путем массивированных численных экспериментов вы-

¹⁾e-mail: ruban@itp.ac.ru

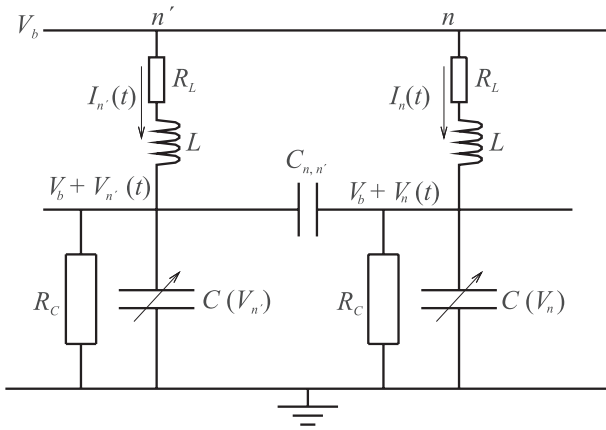


Рис. 1. Идеализированная электрическая схема, соответствующая уравнениям (4)–(5). Показан лишь фрагмент полной сети (две ячейки и связь между ними)

ясняются диапазоны параметров, в пределах которых внешнее воздействие приводит к формированию устойчивого фона и зарождению вихрей, причем уже в трехмерном массиве. Надо сказать, что это первые результаты такого рода. Насколько известно автору, ранее о долгоживущих вихревых нитях на решетках осцилляторов в режиме нелинейного резонанса в научных публикациях не сообщалось.

Чтобы пояснить суть задачи, удобно сначала рассмотреть ДНУШ как более простую модель. Слабодиссипативное ДНУШ с монохроматической накачкой имеет вид (см., например, [31, 32]),

$$i(\dot{A}_n + \gamma A_n) = (-\delta + g|A_n|^2)A_n + \frac{1}{2} \sum_{n'} c_{n,n'}(A_n - A_{n'}) + f_n, \quad (1)$$

где $A_n(t)$ – неизвестные комплекснозначные функции на узлах $n = (n_1, n_2, n_3)$ трехмерной решетки, γ – малый темп линейного затухания, δ – отстройка частоты накачки от линейного резонанса, g – нелинейный коэффициент, $c_{n,n'}$ – (действительная) матрица связей (обычно между ближайшими соседями), f_n – комплексные амплитуды внешнего воздействия.

Хорошо известно, что имеется родственное отношение между ДНУШ и различными системами связанных нелинейных осцилляторов (см., например, [28, 29]), поскольку многие осцилляторные системы в слабонелинейном пределе сводятся к ДНУШ для комплексных огибающих $A_n(t)$ канонических комплексных переменных $a_n = \sqrt{S_n} \exp(i\Theta_n) = A_n(t) \exp(-i[\omega_0 + \delta]t)$, где S_n и Θ_n – переменные действие-угол для отдельно взятого осциллятора, а ω_0 – частота колебаний в пределе малых амплитуд. Фаза Θ при обходе по замкнутому контуру, состав-

ленному из переходов между соседними узлами, может относительно небольшими изменениями набирать приращение, кратное 2π , образуя тем самым дискретный квантованный вихрь. Что характерно, переменная S при этом не обязана обращаться в нуль ни на одном из узлов в коре вихря. Таково принципиальное отличие дискретных вихрей от непрерывных.

Будет ли система способна поддерживать вихри, зависит от соотношения знаков g и $c_{n,n'}$. В простейшем случае одинаковых взаимодействий между ближайшими соседями на правильной решетке, знаки должны совпадать. Но одного этого условия оказывается мало, чтобы в системе в течение длительного времени существовали вихревые структуры. Предположим, что у нас имеется конечная система, составленная из осцилляторов на кубической решетке в пределах некоторой трехмерной области \mathcal{D} . Пусть для простоты все ненулевые параметры f_n имеют одинаковую амплитуду f , но различные фазы φ_n . Даже без учета формы области, набора параметров φ_n и амплитуды f , мы имеем два существенных коэффициента: γ/δ и c/δ (коэффициент g/δ в рамках ДНУШ можно обратить в единицу изменением масштаба переменной A). Возникающая с течением времени картина в сильной мере зависит от этих чисел. Важно еще заметить, что в исходных полностью нелинейных уравнениях движения осцилляторов параметр δ и аналоги параметров γ и c важны каждый по отдельности, поскольку там могут иметь место параметрические резонансы, не учитываемые уравнением (1) и разрушающие квазиоднородный энергетический фон. Фактически это нелинейные волновые процессы типа $p \rightarrow 2$, где p – число распадающихся волн с нулевым квазиимпульсом. Появление таких резонансов при увеличении параметра связи c и соответствующие неустойчивые моды определяются спецификой системы. Например, для схемы на рис. 1 свойства основных параметрических резонансов будут существенно разными в зависимости от типа используемых нелинейных емкостей. Для решетки Клейна–Гордона

$$\ddot{q}_n + 2\gamma\dot{q}_n + q + q^3 + \sum_{n'} c_{n,n'}(q_n - q_{n'}) = F_n \cos([1 + \delta]t + \varphi_n)$$

ответ будет отличаться еще сильнее из-за качественно иного закона дисперсии линейных возмущений.

Понятно, что пройти достаточно подробно диапазоны всех параметров в численных симуляциях – дело тяжелое. Поэтому на первом этапе исследований имеет смысл зафиксировать, например, форму области, фазы φ_n и отстройку частоты δ . Остаются

ся параметры γ , c и f . Для каждого из них следует взять несколько значений. Таким образом, для получения более-менее ясной картины необходимо провести несколько десятков численных экспериментов. Собственно говоря, такая работа и была проделана автором, но не в рамках ДНУШ, а в рамках электрической модели, представленной на рис. 1. Тем самым данное исследование находится в русле моделирования базовых нелинейных явлений на примере электрических сетей [33–46]. Но представленные здесь качественные результаты выходят за рамки конкретной модели, поскольку аналогичные вихревые структуры были отмечены автором и на решетке Клейна–Гордона.

Итак, рассмотрим электрическую схему, составленную из нелинейных колебательных контуров с емкостными связями между ними, как показано на рис. 1. Связь между этой схемой и уравнением (1) обсуждалась в недавней работе автора [29]. Состояние системы описывается напряжениями $V_n(t)$, а также токами $I_n(t)$ через катушки индуктивности L . Нелинейными элементами здесь являются емкости $C(V_n)$. В данной работе использовались два типа функциональной зависимости емкости от напряжения. Первая имеет вид

$$C(V_n) = C_0(1 + V_n^2/V_*^2), \quad (2)$$

с некоторым параметром V_* . Такая симметричная зависимость характерна для конденсаторов с диэлектрическими пленками [47, 48]. Другая зависимость свойственна варакторным диодам, которые (при наличии обратного напряжения смещения V_b и в параллельном соединении с обычным конденсатором) приближенно описываются подгоночной формулой (см., например, [49])

$$C(V_n) = C_0 \left[\mu + (1 - \mu)/(1 + V_n/V_*)^\nu \right], \quad (3)$$

где $0 < \mu < 1$ учитывает параллельно подключенный простой конденсатор, а подгоночный параметр диода ν зависит от технологии изготовления и обычно лежит в диапазоне $0.3 \lesssim \nu \lesssim 6.0$. Конкретно здесь брались значения $\mu = 0.5$, $\nu = 2$.

Разумеется, формулы (2) и (3), да и саму схему на рис. 1 не следует воспринимать слишком буквально, поскольку трехмерный массив должен содержать настолько большое число узлов, что вряд ли он может быть собран из обычных радиотехнических элементов. Это было бы слишком громоздко и дорого. Скорее можно думать о некоей миниатюрной трехмерной структуре с электрическими свойствам, близкими к нашей идеализированной схеме.

Запасенная электростатическая энергия на конденсаторе (дополнительная по сравнению с состоянием $V_n = 0$) есть $W(V_n) = \int_0^{V_n} C(u)udu$.

Диссипативные элементы схемы – малое активное сопротивление катушки $R_L \ll \sqrt{L/C_0}$, а также большое сопротивление утечки конденсатора $R_C \gg \sqrt{L/C_0}$. Безразмерный коэффициент затухания

$$\frac{\gamma}{\omega_0} = (R_L \sqrt{C_0/L} + R_C^{-1} \sqrt{L/C_0})/2 = (\gamma_L + \gamma_C)/2.$$

Кроме того, к тем осцилляторам, которые расположены на границе области, подведено переменное по времени напряжение $\mathcal{E}_n(t)$. Соответствующая система уравнений движения имеет вид

$$C(V_n)\dot{V}_n + \sum_{n'} C_{n,n'}(\dot{V}_n - \dot{V}_{n'}) + V_n/R_C = I_n, \quad (4)$$

$$L\dot{I}_n + V_n + R_L I_n = \mathcal{E}_n(t) = F_n \cos([\omega_0 + \delta]t + \varphi_n). \quad (5)$$

В отсутствие связей и диссипации каждый осциллятор обладал бы законом сохранения энергии $\varepsilon_n = LI_n^2/2 + W(V_n)$.

При вычислениях использовались безразмерные переменные, соответствующие значениям $L = 1$, $C_0 = 1$, $V_* = 1$. Частота малых колебаний при этом $\omega_0 = 1$, а их период $T_0 = 2\pi$. Уравнения (4) разрешались относительно \dot{V}_n подходящей итеративной процедурой, а продвижение по времени осуществлялось по методу Рунге–Кутты 4-го порядка.

В качестве области \mathcal{D} была выбрана полость эллипсоида $x^2 + y^2 + 2.5z^2 < 3$, причем шаг кубической решетки $h = 0.06$ либо $h = 0.04$ определял общее количество степеней свободы системы. Сигнал накачки подавался на те узлы решетки, которые попадают в тонкую оболочку $0 < (3 - x^2 - y^2 - 2.5z^2) < 2h$. Фазы накачки при этом определялись простой зависимостью $\varphi_{n_1, n_2, n_3} = -3.0\pi h n_3 = -3.0\pi z_n$.

Диссипативные параметры γ_L и γ_C для простоты брались равными, с произвольно наложенным условием $\gamma \geq 0.001$, что соответствует ослабленному требованию по добротности в сравнении со свободно затухающим режимом, рассмотренным в работе [29].

Отстройка частоты внешнего сигнала была фиксирована значением $\delta = -0.1$ при использовании формулы (3). Знак отстройки отрицателен в соответствии с отрицательностью нелинейного коэффициента и констант связи $c_{n,n'} = -C_{n,n'}/C_0$ (см. подробности в [29, 30]). Для краткости мы далее под символом c будем иметь в виду положительную величину $C_{n,n'}/C_0$.

Здесь важно сказать, что, в отличие от систем с нелинейностью (3), где распады $1 \rightarrow 2$ заведомо

идут при $c > 1/4$ в пределе слабого энергетического фона, а в существенно нелинейном режиме и при меньших значениях c , использование симметричной зависимости (2) приводит к отсутствию трехволновых взаимодействий. Поэтому допустимы увеличенные значения параметров. Например, бралась константа связи вплоть до $c = 2$, отстройка вплоть до $\delta = -0.32$, затухание вплоть до $\gamma = 0.01$. И даже при таком относительно сильном затухании в ряде случаев наблюдались вихревые нити.

В качестве начального бралось слегка возмущенное квазиоднородное состояние. Система его “забыла” через несколько сотен периодов. В течение этого времени (при “благоприятных” наборах параметров) на границе области зарождались вихревые нити, часто в форме колец, которые затем перемещались в объем и там взаимодействовали между собой. Нити в большей или меньшей степени деформировались, их симметрия обычно нарушалась и возникали структуры с различной геометрией. Разумеется, картина при этом не была стационарной, поскольку вблизи оси эллипсоида вихри перемещались главным образом вниз, а на периферии – вверх. Но характерные статистические свойства вихрей в большинстве случаев оказывались достаточно определенными и существенно зависящими от параметров.

Примеры наиболее типичных вихревых структур представлены на рис. 2–6. Общими для всех этих рисунков являются формула (3), а также значения параметров $h = 0.06$ и $\delta = -0.1$. Различающиеся параметры указаны в подписях к рисункам. Для достаточно полной визуализации мгновенного вихревого состояния обычно использованы три картинки. На одной показан энергетический профиль в сечении эллипсоида плоскостью $y = 0$. На другой картинке показаны величины $\Phi_n = \arctg(I_n/V_n)$, которые в качественном отношении подобны каноническим фазам Θ_n . На третьей картинке показана форма вихревых нитей в проекции на плоскость (x, y) , причем цветом отмечена соответствующая z -координата.

На рисунке 2 мы видим достаточно развитую и не вполне упорядоченную вихревую структуру, интенсивно взаимодействующую с границей. Такие получаются при не слишком больших амплитудах накачки (в данном случае это $F = 0.06$). При еще меньших амплитудах требуемый энергетический фон вообще не формируется (как, например, при $F = 0.04$; на рисунках не представлено).

При усилении накачки до $F = 0.12$ наблюдается более “строгая” и “спокойная” конфигурация из трех близко расположенных вихревых колец, как показано на рис. 3. Кольца значительно деформированы и

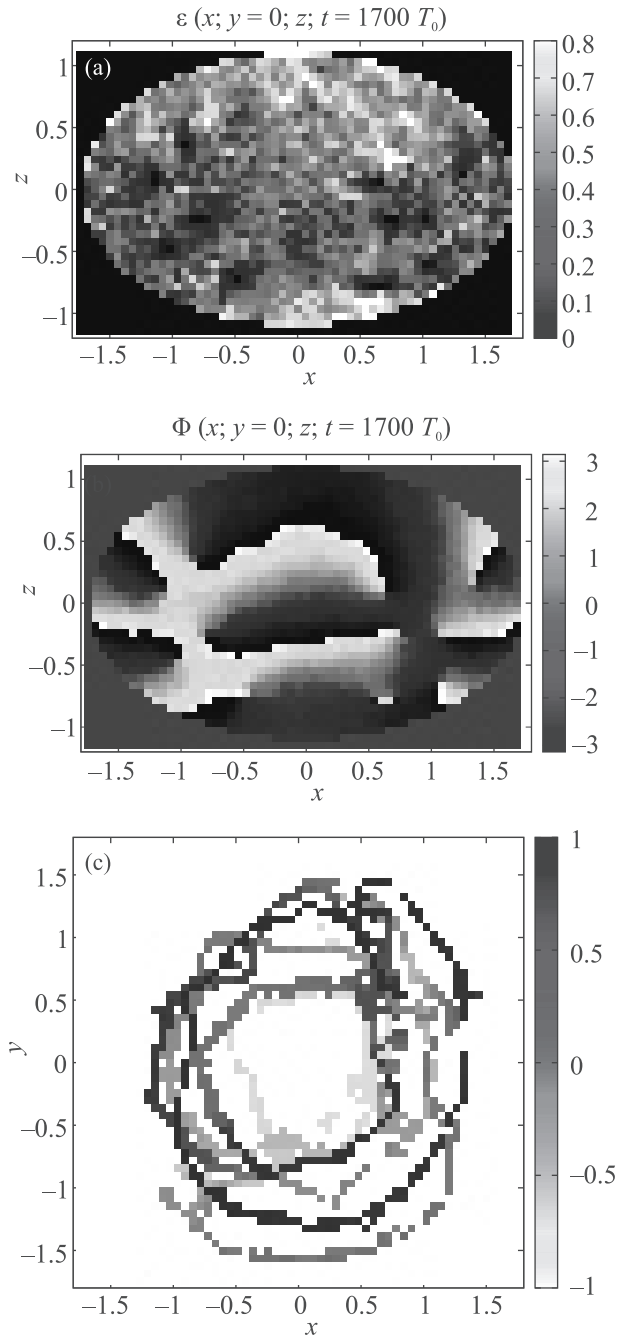


Рис. 2. (Цветной онлайн) Вихревая конфигурация, образовавшаяся в момент времени $t = 1700T_0$ при значениях параметров $\gamma_L = \gamma_C = 0.01$, $c = 0.1$, $F = 0.06$. Каждый цветной квадратик-“пиксель” соответствует отдельному осциллятору на кубической решетке. Показаны: (а) – энергии осцилляторов в слое $y = 0$; (б) – их фазы в слое $y = 0$; (с) – проекция вихревых нитей на плоскость (x, y) , причем цветом здесь указана z -координата тех узлов решетки, в которых $\varepsilon < 0.125$

находятся в режиме “чехарды” (*leapfrogging*). Надо отметить, что при некоторых других наборах пара-

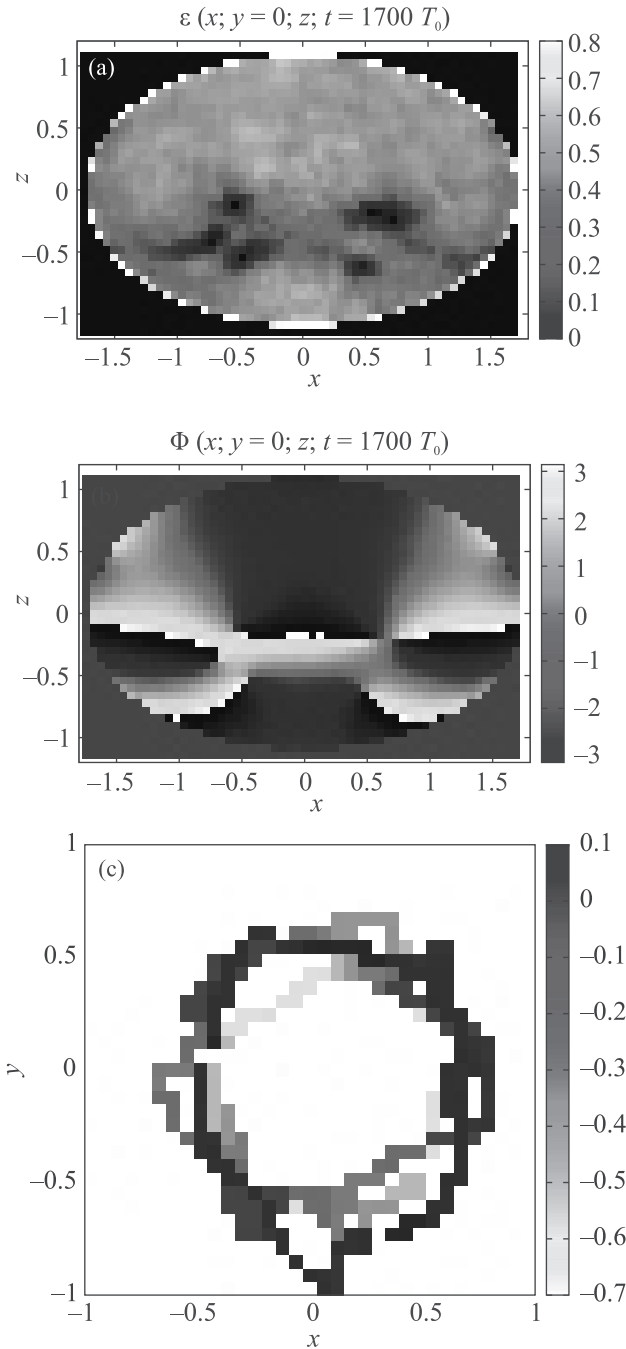


Рис. 3. (Цветной онлайн) Вихревая структура из трех колец, сформировавшаяся при значениях параметров $\gamma_L = \gamma_C = 0.01$, $c = 0.1$, $F = 0.12$. Показаны: (a) – энергетический профиль в слое $y = 0$; (b) – фазы осцилляторов в слое $y = 0$; (c) – (x, y) -проекция вихревых нитей

метров наблюдались аналогичные структуры из четырех колец.

При увеличении F до значения 0.16 (этот случай не проиллюстрирован) мы наблюдали бы поперемен-

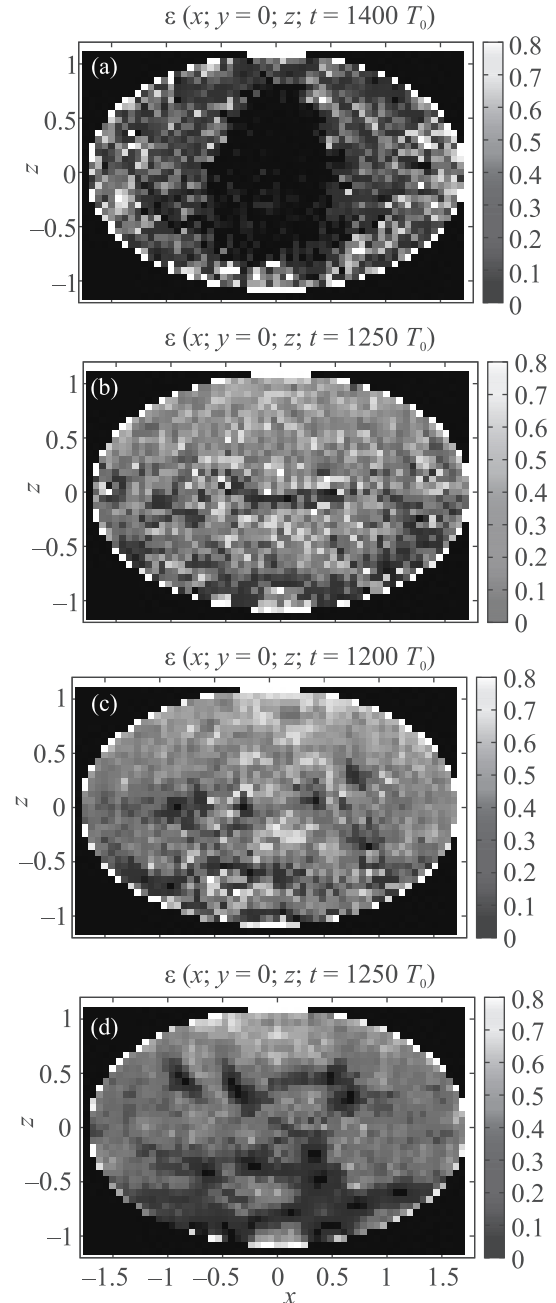


Рис. 4. (Цветной онлайн) Энергии осцилляторов в слое $y = 0$ при различных значениях констант связи: (a) – $c = 0.02$; (b) – $c = 0.03$; (c) – $c = 0.06$; (d) – $c = 0.12$. Остальные параметры: $\gamma_L = \gamma_C = 0.01$, $F = 0.12$. При слишком малых c фон не получается квазиоднородным. В случае (b) вихри настолько тонкие, что их присутствие почти не заметно. Эти рисунки следует сравнить с рис. 3а

но два либо три сильно деформированных и подвижных кольца на достаточном удалении друг от друга. При $F = 0.20$ (этот случай также не представлен на рисунках) результатом были бы два тесно распо-

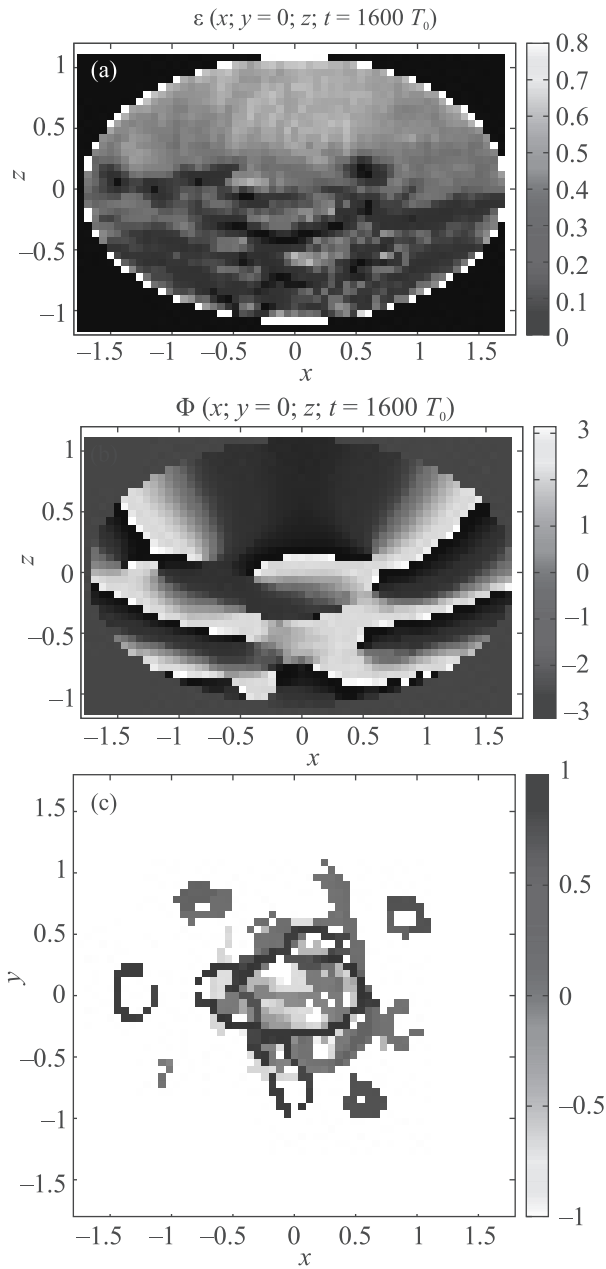


Рис. 5. (Цветной онлайн) Вихревая конфигурация, образовавшаяся при значениях параметров $\gamma_L = \gamma_C = 0.002$, $c = 0.1$, $F = 0.20$: (а) – энергии осцилляторов в слое $y = 0$; (б) – их фазы в слое $y = 0$; (с) – (x, y) -проекция вихревых нитей. Видны небольшие вихревые колечки на периферии

ложенных кольца, в целом похожих на кольца при $F = 0.12$. Дальнейшее усиление накачки начинает портить фон (также не проиллюстрировано).

Рисунок 4 дает представление о том, как изменение параметра c влияет на вихревые структуры. Из рисунка 4а видно, что слишком слабые связи не способны передавать достаточный поток энергии, чтобы

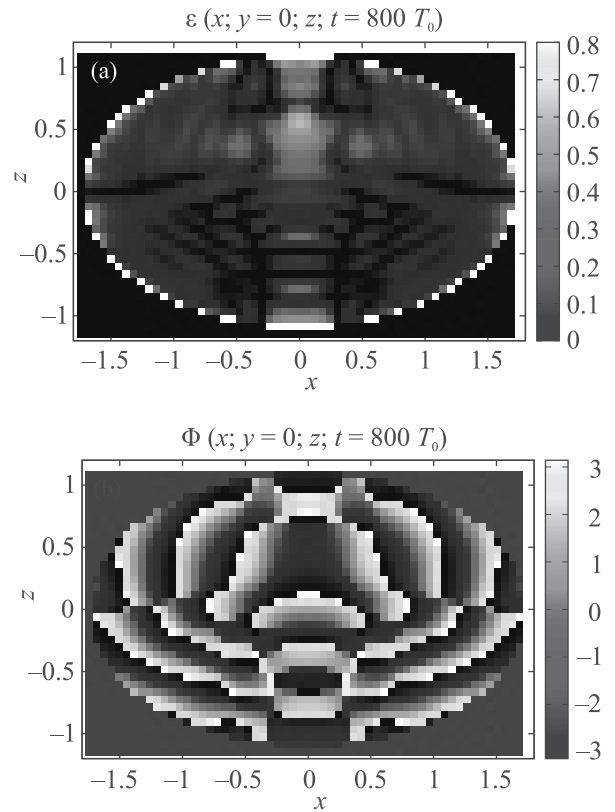


Рис. 6. (Цветной онлайн) Когерентная диссипативная структура, образовавшаяся при значениях параметров $\gamma_L = \gamma_C = 0.006$, $c = 0.1$, $F = 0.20$: (а) – энергии осцилляторов в слое $y = 0$; (б) – их фазы в слое $y = 0$. В данном примере структура состоит из вихрей в комбинации с темными солитонами

с учетом диссипации “заполнить” ею всю область. Заполнение происходит только в некотором, довольно четко выраженном слое вблизи границы, а центральная часть оказывается в режиме дефицита энергии. Надо сказать, что толщина указанного слоя при заданном c зависит в основном от диссипативного параметра γ и в малой мере – от амплитуды накачки. Уже небольшого увеличения c оказывается достаточно, чтобы сформировать квазиоднородный фон (см. рис. 4б). Вихри при этом оказываются “сверхдискретными”, так как существенного понижения энергии осцилляторов вблизи оси вихря практически не происходит. Дальнейшее усиление связей делает ядра вихрей все заметнее и толще, как это видно из рис. 4с и d, пока при $c \approx 0.14$ фон не начинает портиться (не показано) за счет ранее упоминавшихся параметрических процессов $1 \rightarrow 2$.

Наконец, рисунки 5 и 6 демонстрируют, что происходит с вихрями при увеличении темпа диссипации. Так, при увеличении γ вдвое по сравнению с

рис. 2–4, появляется новая черта в динамике – на периферии системы в объеме рождаются маленькие вихревые колечки (см. рис. 5с), которые затем дрейфуют по направлению к оси и там присоединяются к диссипируемой основной структуре.

Увеличение γ до значения 0.06 кардинально меняет всю картину, как показано на рис. 6. Вместо вихревых нитей мы имеем здесь почти стационарную комбинированную структуру, в которой присутствуют темные солитоны. Энергетический фон в целом понижен и далек от однородного. Дальнейшее усиление диссипации разрушает его полностью.

Таким образом, в данной работе показан новый режим существования квантованных вихревых нитей в слабодиссипативных дискретных системах. Выявлены сценарии, по которым этот режим нарушается при изменении основных параметров системы.

1. L. M. Pismen, *Vortices in Nonlinear Fields*, Clarendon, Oxford (1999).
2. C. J. Pethick and H. Smith, *Bose-Einstein Condensation in Dilute Gases*, Cambridge University Press, Cambridge (2002).
3. L. P. Pitaevskii and S. Stringari, *Bose-Einstein Condensation*, Oxford University Press, Oxford (2003).
4. P. G. Kevrekidis, D. J. Frantzeskakis, and R. Carretero-González, *The Defocusing Nonlinear Schrödinger Equation: From Dark Solitons and Vortices to Vortex Rings*, SIAM, Philadelphia (2015).
5. B. Y. Rubinstein and L. M. Pismen, *Physica D* **78**, 1 (1994).
6. A. A. Svidzinsky and A. L. Fetter, *Phys. Rev. A* **62**, 063617 (2000).
7. A. L. Fetter, *Rev. Mod. Phys.* **81**, 647 (2009).
8. V. P. Ruban, *Phys. Rev. E* **64**, 036305 (2001).
9. J. Garcia-Ripoll and V. Perez-Garcia, *Phys. Rev. A* **64**, 053611 (2001).
10. P. Rosenbusch, V. Bretin, and J. Dalibard, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 200403 (2002).
11. A. Aftalion and I. Danaïla, *Phys. Rev. A* **68**, 023603 (2003).
12. T.-L. Horng, S.-C. Gou, and T.-C. Lin, *Phys. Rev. A* **74**, 041603(R) (2006).
13. В. А. Миронов, Л. А. Смирнов, *Письма в ЖЭТФ* **95**, 627 (2012).
14. S. Serafini, L. Galantucci, E. Iseni, T. Bienaime, R. N. Bisset, C. F. Barenghi, F. Dalfovo, G. Lamporesi, and G. Ferrari, *Phys. Rev. X* **7**, 021031 (2017).
15. C. Ticknor, W. Wang, and P. G. Kevrekidis, *Phys. Rev. A* **98**, 033609 (2018).
16. В. П. Рубан, *Письма в ЖЭТФ* **108**, 638 (2018).
17. C. Ticknor, V. P. Ruban, and P. G. Kevrekidis, *Phys. Rev. A* **99**, 063604 (2019).
18. B. A. Malomed and P. G. Kevrekidis, *Phys. Rev. E* **64**, 026601 (2001).
19. P. G. Kevrekidis, B. A. Malomed, and Yu. B. Gaididei, *Phys. Rev. E* **66**, 016609 (2002).
20. P. G. Kevrekidis, B. A. Malomed, D. J. Frantzeskakis, and R. Carretero-Gonzalez, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 080403 (2004).
21. P. G. Kevrekidis, B. A. Malomed, Zh. Chen, and D. J. Frantzeskakis, *Phys. Rev. E* **70**, 056612 (2004).
22. D. E. Pelinovsky, P. G. Kevrekidis, and D. J. Frantzeskakis, *Physica D* **212**, 20 (2005).
23. F. Lederer, G. I. Stegeman, D. N. Christodoulides, G. Assanto, M. Segev, and Ya. Silberberg, *Phys. Rep.* **463**, 1 (2008).
24. J. Cuevas, G. James, P. G. Kevrekidis, and K. J. H. Law, *Physica D* **238**, 1422 (2009).
25. Ya. V. Kartashov, B. A. Malomed, and L. Torner, *Rev. Mod. Phys.* **83**, 247 (2011).
26. M. Lapine, I. V. Shadrivov, and Yu. S. Kivshar, *Rev. Mod. Phys.* **86**, 1093 (2014).
27. J. J. Bramburger, J. Cuevas-Maraver, and P. G. Kevrekidis, *Nonlinearity* **33**, 2159 (2020).
28. V. P. Ruban, *Phys. Rev. E* **100**, 012205 (2019).
29. V. P. Ruban, *Phys. Rev. E* **102**, 012204 (2020).
30. В. П. Рубан, *Письма в ЖЭТФ* **111**, 455 (2020).
31. I. V. Shadrivov, A. A. Zharov, N. A. Zharova, and Yu. S. Kivshar, *Photonics Nanostructures: Fundam. Appl.* **4**, 69 (2006).
32. Н. Н. Розанов, Н. В. Высотина, А. Н. Шацев, И. В. Шадринов, Ю. С. Кившарь, *Письма в ЖЭТФ* **93**, 826 (2011).
33. R. Hirota and K. Suzuki, *J. Phys. Soc. Jpn.* **28**, 1366 (1970).
34. R. Hirota and K. Suzuki, *Proc. IEEE* **61**, 1483 (1973).
35. A. C. Hicks, A. K. Common, and M. I. Sobhy, *Physica D* **95**, 167 (1996).
36. A. C. Singer and A. V. Oppenheim, *International Journal of Bifurcation and Chaos* **9**(4), 571 (1999).
37. D. Cai, N. Gronbeck-Jensen, A. R. Bishop, A. T. Findikoglu, and D. Reagor, *Physica D* **123**, 291 (1998).
38. T. Kofane, B. Michaux, and M. Remoissenet, *J. Phys. C: Solid State Phys.* **21**, 1395 (1988).
39. P. Marquie, J. M. Bilbault, and M. Remoissenet, *Phys. Rev. E* **49**, 828 (1994).
40. P. Marquie, J. M. Bilbault, and M. Remoissenet, *Phys. Rev. E* **51**, 6127 (1995).
41. V. A. Makarov, E. del Rio, W. Ebeling, and M. G. Velarde, *Phys. Rev. E* **64**, 036601 (2001).
42. D. Yemele, P. Marquie, and J. M. Bilbault, *Phys. Rev. E* **68**, 016605 (2003).
43. L. Q. English, F. Palmero, A. J. Sievers, P. G. Kevrekidis, and D. H. Barnak, *Phys. Rev. E* **81**, 046605 (2010).

44. F. Palmero, L. Q. English, J. Cuevas, R. Carretero-Gonzalez, and P. G. Kevrekidis, Phys. Rev. E **84**, 026605 (2011).
45. L. Q. English, F. Palmero, J. F. Stormes, J. Cuevas, R. Carretero-Gonzalez, and P. G. Kevrekidis, Phys. Rev. E **88**, 022912 (2013).
46. F. Palmero, L. Q. English, X.-L. Chen, W. Li, J. Cuevas-Maraver, and P. G. Kevrekidis, Phys. Rev. E **99**, 032206 (2019).
47. C. J. G. Meyers, C. R. Freeze, S. Stemmer, and R. A. York, Appl. Phys. Lett. **109**, 112902 (2016).
48. Y. Shen, P. G. Kevrekidis, G. P. Veldes, D. J. Frantziskakis, D. DiMarzio, X. Lan, and V. Radisic, Phys. Rev. E **95**, 032223 (2017).
49. А. П. Слобожанюк, П. В. Капитанова, И. В. Шадриков, П. А. Белов, Ю. С. Кившарь, Письма в ЖЭТФ **95**, 693 (2012).