Письма в ЖЭТФ, том 112, вып. 9, с. 618 – 622

Спинорный Бозе газ частиц малой плотности с произвольным спином

В. С. Бабиченко[+], *И. Я. Полищук*[+*1)]

[+]*Московский физико-технический институт (государственный университет), 141700 Долгопрудный, Россия*

[*]*Российский научный центр "Курчатовский институт", 123182 Москва, Россия*

Поступила в редакцию 24 августа 2020 г.
После переработки 29 сентября 2020 г.
Принята к публикации 30 сентября 2020 г.

Исследуются свойства основного состояния и спектр элементарных возбуждений ультрахолодного разреженного 3D Бозе газа частиц с произвольным, отличным от нуля спином. Предполагается, что затравочное взаимодействие состоит из двух частей – короткодействующего, изотропного взаимодейсивия, не зависящего от ориентации спинов, и дальнодействующего анизотропного спин-спинового взаимодейсвия диполь-дипольного типа. Получено уравнение Гросса–Питаевского. С его помощью показано,что важную роль в формировании спиновой структуры основного состояния и зависимости химического потенциала от плотности играет перенормированное взаимодействие, определяемое вкладом больших импульсов. Установлено, что существует диапазон параметров парного потенциала затравочного взаимодействия, в котором основное состояние является ферромагнитным. Найдены критерии, когда это состояние устойчиво. Получено уравнение, описывающее динамику плотности спина. Получен спектр элементарных возбуждений.

DOI: 10.31857/S1234567820210077

Спинорный Бозе газ (СБГ) при низких температурах, в котором наряду с короткодействующим взаимодействием между частицами имеется заметное дальнодействующее спин-спиновое взаимодействие, представляет собой квантовую систему, в которой наряду со сверхтекучестью может иметь место магнитный порядок. Исследование свойств таких систем представляет большой теоретический и экспериментальный интерес [1–9]. Основной целью данной работы является исследование роли дальнодействующего спин-спинового взаимодействия в формировании спиновой структуры основного состояния. В то же время, амплитуда рассеяния для короткодействующей компоненты взаимодействия, вообще говоря, может зависеть от суммарного спина частиц, что может влиять на спиновую структуру. С учетом указанной цели работы, для простоты предполагается, что ключевое при низких температурах s-рассеяние, связанное с короткодействующей частью потенциала взаимодействия, не зависит от ориентации спинов сталкивающихся частиц. Не говоря о модельном характере такой постановки задачи, можно показать, что это предположение оправдывается тем, что оно имеет место, если амплитуда рассеяния парного межатомного короткодействующего взаимодействия в канале с фиксированным суммарным спином сталкивающихся частиц одинакова для всех каналов [2, 3]. Это с большой точностью выполняется, например, для такого спинорного газа, как ^{87}Rb [3].

Для Бозе газа с рассматриваемым затравочным потенциалом получены уравнения Гросса–Питаевского и найдена спиновая структура Бозе конденсата. Показано, что важную роль в определении спиновой структуры основного состояния и зависимости химического потенциала от плотности играет перенормированное взаимодействие, определяемое вкладом больших импульсов. Установлено, что при определенных соотношениях между параметрами парного потенциала затравочного взаимодействия основное состояние является ферромагнитным. Получены условия, когда это состояние устойчиво. Из уравнений Гросса–Питаевского получено уравнение, описывающее динамику спиновых флуктуаций. Оно является аналогом уравнения Ландау–Лифшица для гайзенберговского ферромагнетика. Получены уравнения для функций Грина надконденсатных частиц. Найден спектр элементарных возбуждений. Используется система единиц, в которой постоянная Планка $\hbar = 1$.

В данной работе изучаются свойства 3D Бозе газа частиц с произвольным спином S малой плотности ρ при температуре, равной нулю. Затравоч-

1)e-mail: iyppolishchuk@gmail.com

ное взаимодействие между частицами предполагается состоящим из двух частей. Одна часть – это короткодействующее, отталкивательное, независящее от спина взаимодействие типа плотность-плотность, радиус действия которого a_c является самым малым масштабом размерности длины, в результате чего потенциал этого взаимодействия может быть записан в виде выражения, пропорционального δ-функции $V^c(\mathbf{R}) = g_0\delta(\mathbf{R})$, где $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$, и $\mathbf{r}, \mathbf{r}'$ – координаты взаимодействующих частиц. Другая часть – это дальнодействующее спин-спиновое взаимодействие типа плотность спина – плотность спина, потенциал которого имеет диполь-дипольный вид $V_{ij}^{(s)}(\mathbf{R}) = \gamma\frac{R^2\delta_{i,j}-3\mathbf{R}^i\mathbf{R}^j}{R^5} = -\gamma\nabla^i\nabla^j\frac{1}{R}$, $\gamma > 0$. Это выражение справедливо для R, больших некоторой характерной длины a_s ($R \gg a_s$) такой, что $\rho^{-1/3} \gg a_s \gg a_c$, ρ – концентрация частиц.

В качестве базиса разложения операторов рождения и уничтожения $\widehat{\psi}^+, \widehat{\psi}$ используются не состояния $|m\rangle$, собственные для z-проекции оператора спина $\widehat{s}_z$ с собственным значением m (m – целые числа $-S \leqslant m \leqslant S$), а спиновые когерентные состояния (СКС) $|\mathbf{n}\rangle$ [10–12], где $\mathbf{n}$ – единичный вектор, $\mathbf{n} = (\sin\theta\cos\varphi; \sin\theta\sin\varphi; \cos\theta)$, а θ, φ – сферические углы. СКС использовались ранее для исследования свойств многочастичных спиновых систем, представляющих собой систему неподвижных взаимодействующих гайзенберговских спинов [13–18]. Ниже СКС используются для исследования свойств движущихся взаимодействующих Бозе частиц с отличным от нуля спином S.

СКС могут быть получены из состояния $|m\rangle$, с $m = -S$, причем

$$|\mathbf{n}\rangle = \widehat{D}(\mathbf{n})\,|-S\rangle\,, \tag{1}$$

где оператор

$$\widehat{D}(\mathbf{n}) = \exp\left(i\theta\left(\varkappa\cdot\widehat{\mathbf{s}}\right)\right). \tag{2}$$

Здесь $\varkappa = (\sin\varphi; -\cos\varphi; 0)$. Поэтому $\varkappa \perp \mathbf{n}$, $\varkappa \perp \mathbf{n}_0$, где $\mathbf{n}_0 = (0;0;1)$. При $\mathbf{n} = \mathbf{n}_0$ угол $\theta = 0$, в связи с чем $\widehat{D}(\mathbf{n}_0) = \widehat{1}$, где $\widehat{1}$ – единичный оператор, и СКС $|\mathbf{n}_0\rangle \equiv |-S\rangle$. В представлении СКС условие полноты имеет вид

$$\sum_{\mathbf{n}} |\mathbf{n}\rangle\langle\mathbf{n}| = \widehat{1}, \tag{3}$$

а оператор спина $\widehat{\mathbf{s}}$ может быть представлен в виде

$$\widehat{\mathbf{s}} = -(S+1)\sum_{\mathbf{n}} |\mathbf{n}\rangle\,\mathbf{n}\,\langle\mathbf{n}|\,, \tag{4}$$

где $\sum\limits_{\mathbf{n}} = (2S+1)\int\frac{d^2\mathbf{n}}{4\pi}$. Переход от операторов уничтожения $\widehat{\psi}_m$ в представлении состояний $|m\rangle$ к операторам уничтожения $\widehat{\psi}_{\mathbf{n}}$ в представлении СКС определяется следующим образом:

$$\widehat{\psi}_{\mathbf{n}} = \sum_{m=-S}^{S} \langle\mathbf{n}|m\rangle\,\widehat{\psi}_m, \tag{5}$$

при этом (3) дает возможность записать обратное преобразование в виде

$$\widehat{\psi}_m = \sum_{\vec{n}} \langle m|\mathbf{n}\rangle\,\widehat{\psi}_{\mathbf{n}}. \tag{6}$$

Заметим, что в пространстве функций $\psi_{\mathbf{n}}$ вида (5) выражение $\langle\mathbf{n}_1|\mathbf{n}_2\rangle$ является аналогом δ-функции $\delta(\mathbf{n}_1 - \mathbf{n}_2)$, что является следствием свойства (3).

В дальнейшем анализируется низкоэнергетическое поведение системы, определяемое возбуждениями с импульсами $|\mathbf{p}| \ll \sqrt{2m_0\mu}$, где μ – химический потенциал системы, а m_0 – масса частицы. При этом большие импульсы $|\mathbf{p}| \gg \sqrt{2m_0\mu}$ дают основной вклад в перенормировку затравочного взаимодействия между возбуждениями с малой энергией, которая, в силу малости ρ, определяется последовательностью лестничных диаграмм. Суммирование этих диаграмм приводит к тому, что эффективное взаимодействие по-прежнему состоит из двух частей. Одна часть – перенормированное локальное бесспиновое взаимодействие, которое имеет вид $V^{(cr)}(\mathbf{R}) = g\delta(\mathbf{R})$, где $g = \frac{4\pi}{m_0}a_c$. Вторая часть – перенормированное спин-спиновое взаимодействие. Ниже, для простоты, чтобы ухватить физику явления, мы подробно рассматриваем случай, когда имеет место условие

$$\gamma\,(S+1)^2/a_s \ll 1, \tag{7}$$

при котором, вычисляя полную вершинную часть, можно ограничиться первым порядком теории возмущений по затравочному спин-спиновому взаимодействию $V_{ij}^{(s)}(\mathbf{R})$. (Область параметров, выходящая за пределы условия (7), качественно не меняющая выводов работы, рассмотрена в конце статьи). В случае (7) перенормированное спин-спиновое взаимодействие для $R \gg a_s$, при очевидном условии $a_c/a_s \ll 1$, может быть записано в виде

$$V_{ij}^{(sr)}(\mathbf{R}) = V_{ij}^{(s)}(\mathbf{R}) - \frac{8}{3}\frac{a_c}{a_s}\gamma\delta(\mathbf{R})\,\delta_{i,j}. \tag{8}$$

Подчеркнем, что при выводе (8) затравочное локальное взаимодействие учитывалось во всех порядках теории возмущений (в лестничном приближении).

Заметим, что, если в затравочном спин-спиновом взаимодействии $V_{ij}^{(s)}(\mathbf{R})$, первом слагаемом справа в (8), положить $i = j$ и регуляризовать его на больших

R, например, экспонентой $\exp(-\varkappa R)$ при $\varkappa \longrightarrow 0$, то Фурье-компонента этого потенциала с импульсом передачи $\mathbf{k}=0$ обратится в нуль. Поэтому второй член справа в (8), несмотря на его малость по параметру a_c/a_s, необходимо удерживать.

Использование (3), (4) и (5) дает возможность записать производящий функционал системы

$$Z\left[J,\overline{J}\right]=\int D\psi D\overline{\psi}\exp\left(iS_0+iS_{\text{int}}^{(c)}+iS_{\text{int}}^{(s)}+iS_J\right)$$

в представлении СКС. Здесь S_0 – свободное действие, $S_{\text{int}}^{(c)}$ – часть действия, определяемая независящим от спина взаимодействием, $S_{\text{int}}^{(s)}$ – спин-спиновым взаимодействием, S_J – инфинитезимальными источниками J,

$$S_0=\int dtd\mathbf{r}\sum_{\mathbf{n}}\left\{\overline{\psi}_{\mathbf{n}}(t,\ \mathbf{r})\left(i\partial_t+\mu+\frac{1}{2m}\Delta\right)\psi_{\mathbf{n}}(t,\ \mathbf{r})\right\}, \tag{9}$$

$$S_{\text{int}}^{(c)}=-\frac{1}{2}\int dtd\mathbf{r}d\mathbf{r}'\left\{\rho(t,\ \mathbf{r})V^{(cr)}(\mathbf{r}-\ \mathbf{r}')\rho(t,\ \mathbf{r}')\right\}, \tag{10}$$

$$S_{\text{int}}^{(s)}=-\int dtd\mathbf{r}d\mathbf{r}'\left\{\mathbf{S}^i(t,\ \mathbf{r})V_{ij}^{(sr)}(\mathbf{r}-\ \mathbf{r}')\mathbf{S}^j(t,\ \mathbf{r}')\right\}, \tag{11}$$

$$S_J=\int dtd\mathbf{r}\sum_{\mathbf{n}}\left\{\overline{J}_{\mathbf{n}}(t,\mathbf{r})\psi_{\mathbf{n}}(t,\mathbf{r})+\overline{\psi}_{\mathbf{n}}(t,\mathbf{r})J_{\mathbf{n}}(t,\mathbf{r})\right\}, \tag{12}$$

где плотность частиц $\rho(t,\mathbf{r})$ и вектор плотности спина $\mathbf{S}(t,\mathbf{r})$ имеют вид

$$\rho(t,\mathbf{r})=\sum_{\mathbf{n}}\overline{\psi}_{\mathbf{n}}(t,\mathbf{r})\psi_{\mathbf{n}}(t,\mathbf{r}), \tag{13}$$

$$\mathbf{S}(t,\mathbf{r})=\sum_{\mathbf{n}}\overline{\psi}_{\mathbf{n}}(t,\mathbf{r})\,\mathbf{n}\psi_{\mathbf{n}}(t,\mathbf{r}). \tag{14}$$

Используя равенство

$$-\int d\mathbf{r}d\mathbf{r}'\sum_{i,j=1}^{3}\mathbf{S}^i(\mathbf{r})\left(\nabla^i\nabla^j\frac{1}{R}\right)\mathbf{S}^j(\mathbf{r}')=$$
$$=4\pi\int d\mathbf{r}d\mathbf{r}'(\text{curl}\,\mathbf{S}(\mathbf{r}))\,\widehat{\Delta}^{-1}(\text{curl}\,\mathbf{S}(\mathbf{r}'))+$$
$$+4\pi\int d\mathbf{r}\,(\mathbf{S}(\mathbf{r})\cdot\mathbf{S}(\mathbf{r})),$$

где $\widehat{\Delta}^{-1}$ – оператор, обратный оператору Лапласа, вклад действия, связанного со спин-спиновым взаимодействием, можно записать в виде $S_{\text{int}}^{(s)}=S_{\text{int}}^{(s1)}+S_{\text{int}}^{(s2)}$, где

$$S_{\text{int}}^{(s1)}=-4\pi\gamma\int dtd\mathbf{r}d\mathbf{r}'\left\{\text{curl}\,\mathbf{S}(t,\ \mathbf{r})\,\widehat{\Delta}^{-1}\text{curl}\,\mathbf{S}(t,\ \mathbf{r}')\right\}, \tag{15}$$

$$S_{\text{int}}^{(s2)}=-4\pi\gamma\int dtd\mathbf{r}\left\{\left(1-\frac{2}{3}\frac{a_c}{a_s}\right)(\mathbf{S}(t,\ \mathbf{r})\cdot\mathbf{S}(t,\ \mathbf{r}))\right\}. \tag{16}$$

Используя преобразование Хаббарда–Стратоновича для части спин-спинового взаимодействия $S_{\text{int}}^{(s1)}$, можно записать производящий функционал $Z[J,\overline{J}]$ так, чтобы взаимодействие (15) осуществлялось путем обмена виртуальным магнитным полем $\mathbf{H}=\text{curl}\mathbf{A}$ с выбором калибровки векторного потенциала $\text{div}\mathbf{A}=0$, что дает

$$Z[J,\overline{J}]=\int D\psi D\overline{\psi}D\mathbf{A}\times$$
$$\times\exp i\left(S_0+S_{\text{int}}^{(c)}+S_{\text{int}}^{(s2)}+S_{\text{int}}^{(\mathbf{A}S)}+S^{(\mathbf{A})}+S_J\right), \tag{17}$$

где

$$S_{\text{int}}^{(\mathbf{A}S)}=\int dtd^3r\left\{\sqrt{2\gamma}\,(\mathbf{S}\cdot\mathbf{H})\right\}, \tag{18}$$

$$S_{\text{int}}^{(\mathbf{A})}=\int dtd^3r\left\{-\frac{1}{8\pi}\mathbf{H}^2\right\}. \tag{19}$$

Приравнивая к нулю первую вариацию полного действия по полям ψ, $\overline{\psi}$, $\mathbf{A}$, получим уравнения Гросса–Питаевского в виде

$$\left(G_0^{-1}-g\rho\right)\psi_{\mathbf{n}}-(S+1)\sqrt{2\gamma}\sum_{\mathbf{n}_1}\langle\mathbf{n}|\mathbf{n}_1\rangle\left(\mathbf{n}_1\cdot\widetilde{\mathbf{H}}\right)\psi_{\mathbf{n}_1}=0, \tag{20}$$

$$\frac{1}{4\pi}\widehat{\Delta}\mathbf{A}+\sqrt{2\gamma}\text{curl}\,\mathbf{S}=0, \tag{21}$$

где $G_0^{-1}=i\partial_t+\mu+\frac{1}{2m_0}\widehat{\Delta}$ и

$$\widetilde{\mathbf{H}}=\mathbf{H}-\frac{8\pi(\gamma-\widetilde{\gamma})}{\sqrt{2\gamma}}\mathbf{S},\quad \widetilde{\gamma}=\frac{2}{3}\frac{a_c}{a_s}\gamma. \tag{22}$$

Из (21) в импульсном представлении получим

$$\mathbf{H}_{\mathbf{k}}=4\pi\sqrt{2\gamma}\left[\mathbf{S}_{\mathbf{k}}-\mathbf{e}_{\mathbf{k}}(\mathbf{e}_{\mathbf{k}}\cdot\mathbf{S}_{\mathbf{k}})\right], \tag{23}$$

где $\mathbf{e}_{\mathbf{k}}=\mathbf{k}/|\mathbf{k}|$.

В случае $\mathbf{k}\neq0$ перейдем в уравнениях Гросса–Питаевского к импульсному представлению и подставим $\mathbf{H}_{\mathbf{k}}$ из уравнения (23) в уравнение (20). Получим с

$$\left(i\partial_t+\mu-\frac{1}{2m}\mathbf{k}^2-g\rho_{-\mathbf{k}}\right)\psi_{\mathbf{n};\mathbf{k}}- \tag{24}$$
$$-8\pi(S+1)\sum_{\mathbf{n}_1}\langle\mathbf{n}|\mathbf{n}_1\rangle\left[\widetilde{\gamma}(\mathbf{n}_1\cdot\mathbf{S}_{-\mathbf{k}})-\right.$$
$$\left.-\gamma(\mathbf{n}_1\cdot\mathbf{e}_{\mathbf{k}})(\mathbf{e}_{\mathbf{k}}\cdot\mathbf{S}_{-\mathbf{k}})\right]\psi_{\mathbf{n}_1;\mathbf{k}}=0.$$

Поскольку конденсатное поле $\psi_{\mathbf{n}}$ однородно, для его определения в уравнениях (24), (23) необходимо перейти к пределу $\mathbf{k}\longrightarrow0$. Однако переход к $\mathbf{k}=0$ в этих уравнениях не является тривиальным, поскольку вектор $\mathbf{e_k}$ не определен при $\mathbf{k} \longrightarrow 0$. Доопределим вектор $\mathbf{e_k}$ при $\mathbf{k} \longrightarrow 0$, обозначив его $\mathbf{e}_0$, так, чтобы $(\mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{H}_0) = 0$, где $\mathbf{H}_0 = \mathbf{H}_{\mathbf{k}=0}$, поскольку $(\mathbf{k} \cdot \mathbf{H_k}) = 0$ для любого конечного $\mathbf{k}$. Если $\mathbf{H}_0 \neq 0$, то $\mathbf{S}_0$, где $\mathbf{S}_0 = \mathbf{S}_{\mathbf{k}=0}$, должно быть параллельно $\mathbf{H}_0$, а значит, должно выполняться также и равенство $(\mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{S}_0) = 0$. Поэтому из (23) получаем, что при $\mathbf{k} = 0$ последнее слагаемое в левой части уравнения (24) обращается в нуль, и $\mathbf{H}_0 = 4\pi\sqrt{2\gamma}\mathbf{S}_0$.

Предполагаем, что поле конденсата Бозе–Эйнштейна (БЭК) пропорционально СКС $|\mathbf{n}_0\rangle$, совпадающему с состоянием $|-S\rangle$, и поле БЭК, удовлетворяющее уравнению (24) при $\mathbf{k} = 0$, имеет вид

$$\psi_{\mathbf{n}}^{(c)} = \sqrt{\rho^{(c)}} \left\langle \mathbf{n} | \mathbf{n}_0 \right\rangle, \tag{25}$$

где $\rho^{(c)}$ – плотность БЭК. Плотность спина, отвечающая БЭК, после подстановки (25) в (14) имеет вид

$$\mathbf{S}^{(c)} = -(S+1) \sum_{\mathbf{n}} \overline{\psi}_{\mathbf{n}}^{(c)} \mathbf{n} \psi_{\mathbf{n}}^{(c)} = \rho^c \left\langle \mathbf{n}_0 | \widehat{\mathbf{s}} \mathbf{n}_0 \right\rangle = -S\rho^{(c)} \mathbf{n}_0. \tag{26}$$

Подставляя (26) в уравнение (24) и учитывая, что при $\mathbf{k} = 0$ последнее слагаемое в левой части уравнения (24) обращается в нуль, получаем уравнение для однородной перевальной части поля $\psi_{\mathbf{n}}$

$$\left(i\partial_t + \mu - \left(g - 8\pi\widetilde{\gamma} S^2 \right) \rho^{(c)} \right) \psi_{\mathbf{n}}^{(c)} = 0. \tag{27}$$

Требуя, кроме однородности, также и стационарности поля БЭК, получаем, что

$$\mu = g\rho^{(c)} - 8\pi\widetilde{\gamma} S^2 \rho^{(c)}. \tag{28}$$

Умножая уравнение Гросса–Питаевского (20) на $\overline{\psi}_{\mathbf{n}} \mathbf{n}$ и суммируя по $\mathbf{n}$, а также умножая уравнение, комплексно сопряженное уравнению (20), на $\mathbf{n}\psi_{\mathbf{n}}$ и также суммируя по $\mathbf{n}$, а затем вычитая полученные уравнения одно из другого, получим уравнение, описывающее динамику плотности спина и являющееся аналогом уравнения Ландау–Лифшица для Бозе газа частиц со спином, который находится в ферромагнитном состоянии

$$\dot{\mathbf{S}}^i + \frac{1}{2m} \sum_{j=1}^{3} \nabla^j \mathbf{\Pi}^{ij} + \sqrt{2\gamma} \left[\widetilde{\mathbf{H}} \times \mathbf{S} \right]^i = 0, \tag{29}$$

где $\mathbf{\Pi}^{ij}$ – тензор потока спина

$$\mathbf{\Pi}^{ij} = i\left(S+1\right) \sum_{\mathbf{n}} \left[\overline{\psi}_{\mathbf{n}} \mathbf{n}^i \left(\nabla^j \psi_{\mathbf{n}} \right) - \left(\nabla^j \overline{\psi}_{\mathbf{n}} \right) \mathbf{n}^i \psi_{\mathbf{n}} \right]. \tag{30}$$

Уравнения для нормальной $G_{\mathbf{n}_1;\mathbf{n}_2}(k)$ и аномальной $F_{\mathbf{n}_1;\mathbf{n}_2}(k)$ функций Грина надконденсатных частиц можно записать в виде

$$\begin{aligned} G_{\mathbf{n}_1;\mathbf{n}_2}(k) &= G_{\mathbf{n}_1;\mathbf{n}_2}^{(MF)}(k) + \\ &+ \sum_{\mathbf{n}_3;\mathbf{n}_4} \Big(G_{\mathbf{n}_1;\mathbf{n}_3}^{(MF)}(k) \, \Sigma_{\mathbf{n}_3;\mathbf{n}_4}(k) \, G_{\mathbf{n}_4;\mathbf{n}_2}(k) + \\ &+ G_{\mathbf{n}_1;\mathbf{n}_3}^{(MF)}(k) \, \Xi_{\mathbf{n}_3;\mathbf{n}_4} F_{\mathbf{n}_4;\mathbf{n}_2}(k) \Big), \end{aligned} \tag{31}$$

$$\begin{aligned} F_{\mathbf{n}_1;\mathbf{n}_2}(k) &= \\ &= \sum_{\mathbf{n}_3;\mathbf{n}_4} \Big[G_{\mathbf{n}_1;\mathbf{n}_3}^{(MF)}(-k) \, \Sigma_{\mathbf{n}_3;\mathbf{n}_4}(k) \, F_{\mathbf{n}_4;\mathbf{n}_2}(k) + \\ &+ G_{\mathbf{n}_1;\mathbf{n}_3}^{(MF)}(-k) \, \overline{\Xi}_{\mathbf{n}_3;\mathbf{n}_4}(k) \, G_{\mathbf{n}_4;\mathbf{n}_2}(k) \Big], \end{aligned} \tag{32}$$

где $G_{\mathbf{n}_1;\mathbf{n}_2}^{(MF)}(k) = \left(\omega - \frac{1}{2m}\mathbf{k}^2\right) \left\langle \mathbf{n}_1 | \mathbf{n}_2 \right\rangle$ – затравочная функция Грина, а нормальная $\Sigma_{\mathbf{n}_1;\mathbf{n}_2}$ и аномальные $\Xi_{\mathbf{n}_1;\mathbf{n}_2}$, $\overline{\Xi}_{\mathbf{n}_1;\mathbf{n}_2}$ собственно энергетические части (СЭЧ) имеют вид $\Sigma_{\mathbf{n}_1;\mathbf{n}_2}(k) = \Gamma_{\mathbf{n}_1;\mathbf{n}_2}(\mathbf{k}) \, \overline{\psi}_{\mathbf{n}_1}^{(c)} \psi_{\mathbf{n}_2}^{(c)}$; $\Xi_{\mathbf{n}_1;\mathbf{n}_2} = \Gamma_{\mathbf{n}_1;\mathbf{n}_2}(\mathbf{k}) \, \overline{\psi}_{\mathbf{n}_1}^{(c)} \overline{\psi}_{\mathbf{n}_2}^{(c)}$; $\overline{\Xi}_{\mathbf{n}_1;\mathbf{n}_2} = \Gamma_{\mathbf{n}_1;\mathbf{n}_2}(\mathbf{k}) \, \psi_{\mathbf{n}_1}^{(c)} \psi_{\mathbf{n}_2}^{(c)}$, причем

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mathbf{n}_1;\mathbf{n}_2}(\mathbf{k}) &= g - 8\pi\widetilde{\gamma} \left(S+1\right)^2 \left(\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2\right) + \\ &+ 8\pi\gamma \left(S+1\right)^2 \left(\mathbf{e_k} \cdot \mathbf{n}_1\right) \left(\mathbf{e_k} \cdot \mathbf{n}_2\right). \end{aligned} \tag{33}$$

Заметим, что часть СЭЧ $\Sigma_{\mathbf{n}_1;\mathbf{n}_2}$ с нулевой передачей импульса включена в затравочную функцию Грина, обозначенную $G_{\mathbf{n}_1;\mathbf{n}_2}^{(MF)}(k)$. Введем с помощью верхних индексов обозначения для разных частей СЭЧ Σ и Ξ, связанных с разными частями взаимодействия между частицами. Так, $\Sigma^{(11)}$ и $\Xi^{(11)}$ означают те части СЭЧ, которые определяются бесспиновым взаимодействием или частью спин-спинового взаимодействия, пропорциональной z-компонентам векторов $\mathbf{n}_1$ и $\mathbf{n}_2$, а именно, $\left(\mathbf{n}_1^{(z)} \cdot \mathbf{n}_2^{(z)}\right)$ или $\left(\mathbf{e}_{\mathbf{k}}^{(z)} \cdot \mathbf{n}_1^{(z)}\right)\left(\mathbf{e}_{\mathbf{k}}^{(z)} \cdot \mathbf{n}_2^{(z)}\right)$; $\Sigma^{(12)}$, $\Xi^{(12)}$, $\Sigma^{(21)}$, $\Xi^{(21)}$ означают части СЭЧ, которые определяются частью спин-спинового взаимодействия, пропорциональной $\left(\mathbf{e}_{\mathbf{k}}^{(z)} \cdot \mathbf{n}_1^{(z)}\right)\left(\mathbf{e}_{\mathbf{k}}^{(\pm)} \cdot \mathbf{n}_2^{(\mp)}\right)$ или $\left(\mathbf{e}_{\mathbf{k}}^{(\pm)} \cdot \mathbf{n}_1^{(\mp)}\right)\left(\mathbf{e}_{\mathbf{k}}^{(z)} \cdot \mathbf{n}_2^{(z)}\right)$; $\Sigma^{(22)}$ и $\Xi^{(22)}$ означают части СЭЧ, которые определяются частью спин-спинового взаимодействия, пропорциональной $\left(\mathbf{n}_1^{(\pm)} \cdot \mathbf{n}_2^{(\mp)}\right)$ или $\left(\mathbf{e}_{\mathbf{k}}^{(\pm)} \cdot \mathbf{n}_1^{(\mp)}\right)\left(\mathbf{e}_{\mathbf{k}}^{(\mp)} \cdot \mathbf{n}_2^{(\pm)}\right)$, где $e_{\mathbf{k}}^{(\pm)} = \left(k^{(x)} \pm ik^{(y)}\right)/|\mathbf{k}|$, $\mathbf{n}^{(\pm)} = \mathbf{n}^{(x)} \pm i\mathbf{n}^{(y)}$. Решение уравнений (31), (32) для функций Грина надконденсатных частиц дает спектр элементарных возбуждений, который при $\mathbf{n}_1$ или $\mathbf{n}_2$, равным $\mathbf{n}_0$, имеет одну ветвь, и вид этого спектра при малых импульсах $\mathbf{k}$ и частотах ω, таких что $\omega \ll 8\pi\widetilde{\gamma}S$, представим в виде

$$\begin{aligned} \varepsilon(\mathbf{k}) &= \\ &= \sqrt{\frac{\Sigma^{(11)}\left(\Sigma^{(22)}+\Xi^{(22)}\right) - 2\Sigma^{(21)}\left(\Sigma^{(12)}+\Xi^{(12)}\right)}{2m_0\Xi^{(22)}}}\, |\mathbf{k}|. \end{aligned} \tag{34}$$

Если же $8\pi\widetilde{\gamma}S \ll \omega \ll \mu$, то

$$\varepsilon(\mathbf{k}) = \\ = \sqrt{\frac{\Sigma^{(11)}+\Sigma^{(22)}+\sqrt{(\Sigma^{(11)}-\Sigma^{(22)})^2+4\Sigma^{(12)}\Sigma^{(21)}}}{2m_0}}|\mathbf{k}|. \quad (35)$$

Соответствующие части СЭЧ, присутствующие в этих выражениях, имеют вид: $\Sigma^{(11)} = \Xi^{(11)} = \left[g + 8\pi S^2\left(\gamma\left(\mathbf{e_k}\cdot\mathbf{n}_0\right)^2 - \widetilde{\gamma}\right)\right]\rho^{(c)}$; $\Sigma^{(12)} = \Xi^{(12)} = -8\pi\gamma\frac{\sqrt{2}}{2}S^{3/2}\left(\mathbf{e_k}\cdot\mathbf{n}_0\right)e_{\mathbf{k}}^{(+)}\rho^{(c)}$; $\Sigma^{(21)} = \Xi^{(21)} = -8\pi\gamma\frac{\sqrt{2}}{2}S^{3/2}\left(\mathbf{e_k}\cdot\mathbf{n}_0\right)e_{\mathbf{k}}^{(-)}\rho^{(c)}$; $\Sigma^{(22)} = 8\pi S\left[\frac{\gamma}{2}e_{\mathbf{k}}^{(+)}e_{\mathbf{k}}^{(-)} - \widetilde{\gamma}\right]\rho^{(c)}$; $\Xi^{(22)} = 8\pi\gamma\frac{S}{2}e_{\mathbf{k}}^{(+)}e_{\mathbf{k}}^{(-)}\rho^{(c)}$. Однако, при $\mathbf{n}_1 \neq \mathbf{n}_0$ и $\mathbf{n}_2 \neq \mathbf{n}_0$ спектр элементарных возбуждений для малых $\mathbf{k}$ и ω имеет две ветви, одна из которых представима в виде (34) и (35), а другая имеет вид $\varepsilon(\mathbf{k}) = \frac{1}{2m_0}\mathbf{k}^2$. Наличие подобной голдстоуновской моды в спинорном Бозе газе, наряду со звуковой, ранее было предсказано теоретически как в приближении среднего поля, так и в Беляевском подходе [19, 20], когда взаимодействие не имеет диполь-дипольной части, и подтверждено экспериментально [6]. В данной работе, в отличие, например, от работ [19, 20], появление моды с законом дисперсии, совпадающим со спектром свободных частиц, связано с исходно дальнодействующим, а не короткодействующим взаимодействием. Мода с законом дисперсии свободной частицы связана с флуктуациями спиновой плотности [21], существование которой согласуется с (29).

Полученные выше результаты, строго говоря, справедливы при выполнении условия (7), когда дальнодействующее взаимодействие достаточно учитывать только в первом порядке. Одновременный же учет как затравочного короткодействующего, так и затравочного спин-спинового взаимодействия во всех порядках теории возмущений (также в лестничном приближении) качественно не меняет вывод о ферромагнитной структуре основного состояния, но приводит к определенному соотношению между константами взаимодействия

$$1 + \left(g - \frac{1}{3}\gamma(S+1)^2\right)\left(\frac{m_0}{2\pi^2}\right)\frac{1}{a_s} > 0, \qquad (36)$$

необходимому для устойчивости системы. В противном случае, у перенормированной вершины появляется полюс, величина которого максимальна в случае противоположно направленных спинов рассеивающихся частиц. Наличие этого полюса означает неустойчивость системы, и переход ее в состояние с сильной корреляцией противоположно направленных спинов. Этот случай в данной работе не анализируется.

Работа ИЯП над проблемой, изученной в данной работе, была начата в Max Planck Institute for the Physics of Complex Systems (Dresden, Germany), где он работал по приглашению проф. П. Фулде и завершена в рамках гранта Российского фонда фундаментальных исследований # 19-02-00433 А.

1. L. Santos and T. Pfau, Phys. Rev. Lett. **96**, 190404 (2006).
2. Y. Kawaguchi and M. Ueda, Phys. Rep. **520**(5), 253 (2012).
3. D. M. Stamper-Kurn and M. Ueda, Rev. Mod. Phys. **85,** 1191 (2013).
4. V.I. Yukalov, Laser Phys. **2**, 053001 (2018).
5. G. E. Marti and D. M. Stamper-Kurn, arcXiv:1511.01575v1 [cond-mat.quant-gas], 5 Nov. 2015.
6. G. E. Marti, A. MacRae, R. Olf, S. Lourette, F. Fang, and D. M. Stamper-Kurn, Phys. Rev. Lett. **113**, 155302 (2014).
7. F. Fang, R. Olf, Sh. Wu, H. Kadau, and D. M. Stamper-Kurn, Phys. Rev. Lett. **116**, 095301 (2016).
8. B. Naylor, M. Brewczyk, M. Gajda, O. Gorceix, E. Maréchal, L. Vernac, and B. Laburte-Tolra, Phys. Rev. Lett. **117**, 185302 (2016).
9. G. Frapolli, T. Zibold, A. Invernizzi, K. Jiménez-García, J. Dalibard, and F. Gerbier, Phys. Rev. Lett. **119**, 050404 (2017).
10. J. M. Radcliffe, J. Phys. A: Gen. Phys. **4**, 313 (1971).
11. E. H. Lieb, Commun. Math. Phys. **31**, 327 (1973).
12. A. Perelomov, *Generalized Coherent States and Their Applications*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, N.Y., London, Paris, Tokyo (1986).
13. F. D. M. Haldane, Phys. Lett. A **93**, 464 (1982).
14. P. Weigman, Phys. Rev. Lett. **60**, 821 (1988).
15. K. Kladko, P. Fulde, and D. A. Garanin, EPL **46**(4), 425 (1999).
16. V. I. Belinicher and J. da Providencia, JETP Lett. **72**(10), 521 (2000).
17. E. Fradkin and M. Stone, Phys. Rev. B **38**(10), 7215 (1988).
18. E. Fradkin, *Field Theories of Condensed Matter Physics*, Cambridge University Press, N.Y. (2013).
19. H. Watanabe and H. Murayama, Phys. Rev. Lett. **108**, 251602 (2012).
20. N. Th. Phuc, Y. Kavaguchi, and M. Ueda, Anals of Physics **328**, 158 (2013).
21. T. L-Ho, Phys. Rev. Lett. **81**, 742 (1998).