Письма в ЖЭТФ, том 118, вып. 6, с. 455 – 461 © 2023 г. 25 сентября

Голдстоуновская мода скирмионного кристалла

В. Е. Тимофеев[1)], *Д. Н. Аристов*

НИЦ "Курчатовский институт", Петербургский институт ядерной физики, 188300 Гатчина, Россия

Санкт-Петербургский государственный университет, 199034 С.-Петербург, Россия

Поступила в редакцию 2 августа 2023 г.
После переработки 14 августа 2023 г.
Принята к публикации 15 августа 2023 г.

В работе обсуждается голдстоуновская мода скирмионного кристалла в модели двумерного ферромагнетика с взаимодействием Дзялошинского–Мории во внешнем магнитном поле. В подходе стереографической проекции строится конфигурация скирмионного кристалла, после чего рассматривается поле смещений скирмионов. В силу небольшого перекрытия стереографических образов потенциальная энергия выражается в терминах смещений только ближайших соседей. В работе найден общий вид дисперсии голдстоуновской моды, а также изучена зависимость параметров от магнитного поля. В квазиклассическом формализме найдена функция Грина, показано, что распространение смещений в кристалле меняет свою тензорную структуру с изотропной на анизотропную на больших расстояниях.

DOI: 10.31857/S1234567823180118, EDN: wwxblc

Введение. Магнитные скирмионы – топологически нетривиальные вихри локальной намагниченности. Благодаря топологической защищенности, маленьким размерам и возможности манипуляции положением скирмионов при помощи спиновых токов, магнитные скирмионы могут послужить основой для разработки новейших устройств беговой памяти [1], а также арифметико-логических устройств [2].

В определенном смысле магнитный скирмион [3] – это чрезвычайно маленький магнитный пузырь [4] (цилиндрическая доменная стенка [5]). В терминах описания доменных стенок радиус скирмиона сопоставим с шириной доменной стенки и определяется величиной взаимодействия Дзялошинского–Мории (ДМ) [3, 6].

Как правило, для описания динамики локальной намагниченности используется уравнение Ландау–Лифшица–Гильберта (ЛЛГ). При описания движения доменной стенки как целого из уравнения ЛЛГ может быть получено уравнение Тиле [7]. Уравнение Тиле и его обобщения [8] являются главным инструментом анализа движения скирмионов [9]. В частности, уравнение Тиле допускает учет влияния спиновых токов на движение скирмионов и позволяет обсуждать движение скирмиона на треке, см., например, [9].

В решетках без центра инверсии с взаимодействием ДМ магнитные скирмионы зачастую упорядочиваются в регулярные решетки [10–12]. Такие решетки, также называемые скирмионными кристаллами (СкК) [13], образуются в случае, когда одиночный скирмион обладает меньшей энергией по сравнению с однородной конфигурацей, магнитной спиралью или конической конфигурацией [14]. Ранее нами было показано, что при плотной упаковке скирмионов, помимо парного отталкивающего взаимодействия между скирмионами, возникает притягивающее взаимодействие в тройках скирмионов [15]. Таким образом движение отдельных скирмионов в решетке не сводится к движению уединенного скирмиона в потенциальной яме.

Возбуждения в СкК обладают сложной зонной структурой [16–19]. Возбуждения с разной угловой симметрией отвечают различным деформационным модам отдельных скирмионов, таким как: эллиптическая, дыхательная, вращение по часовой стрелке, против часовой стрелки и др. Моды с определенной симметрией [20] проявляются в экспериментах по магнитном резонансу [21].

Мягкая голдстоуновская мода СкК, также называемая гиротропной модой, ассоциируется со смещением скирмионов в СкК и впервые обсуждалась в работе [22]. СкК в ней рассматривался как суперпозиция трех магнитных спиралей с соответствующими сдвигами фаз, и было показано, что наличие топологического члена в лагранжиане приводит к квадратичной дисперсии мягкой моды (что недавно было подтверждено численно в работе [23]). Гиротропная

[1)]e-mail: Victor.Timofeev@thd.pnpi.spb.ru

мода не проявляется в экспериментах по магнитному резонансу [24], однако видна в неупругом рассеянии нейтронов [25].

В этой работе мы рассматриваем простейшую модель нецентросимметричного ферромагнетика с взаимодействием ДМ во внешнем магнитном поле, в котором СкК является основным состоянием в широком диапазоне параметров. Мы используем подход стереографической проекции, позволяющий оставаться в парадигме скирмионов как квазичастиц, и рассматриваем поле смещений положений скирмионов в решетке. Мы численно показываем применимость приближения ближайших соседей и получаем замкнутое выражение для дисперсии голдстоуновской моды. Мы также находим зависимость силовых констант от внешнего магнитного поля. Показано, что динамическая функция Грина смещений изотропна на малых расстояниях, в то время как на промежуточных расстояниях ее тензорная структура анизотропна.

Модель. Мы рассматриваем плоскую модель нецентросимметричного ферромагнетика с взаимодействием ДМ в однородном магнитном поле, перпендикулярном плоскости. Плотность энергии такой модели дается выражением:

$$\mathcal{E} = \frac{C}{2}\partial_\mu S_i \partial_\mu S_i - D\epsilon_{\mu ij} S_i \partial_\mu S_j - BS_3, \qquad (1)$$

где C – параметр обменного взаимодействия, D – величина взаимодействия ДМ, а B – величина внешнего магнитного поля. Удобно выбрать единицы измерения в модели (1) следующим образом: мы будем измерять длину в единицах $l = C/D$, а плотность энергии в единицах $CS^2l^{-2} = S^2D^2/C$. Тогда энергия будет зависеть только от одного безразмерного параметра $b = BC/SD^2$. Мы рассматриваем предел низких температур, когда локальная намагниченность насыщена, и ее модуль не меняется от точки к точке $\mathbf{S} = S\mathbf{n}$, где $|\mathbf{n}| = 1$. Такая двумерная модель применима также к тонким пленкам, толщина которых меньше или порядка l. Мы опускаем магнитодипольное взаимодействие, поскольку в нашем случае оно может быть сведено к одноосной анизотропии, а небольшая анизотропия приведет лишь к незначительным изменениям параметров СкК.

Подход стереографической проекции позволяет выразить компоненты вектора $\mathbf{n}$ следующим образом:

$$n_1 + in_2 = \frac{2f}{1+f\bar{f}}, \quad n_3 = \frac{1-f\bar{f}}{1+f\bar{f}}, \qquad (2)$$

здесь f – комплекснозначная функция, а $\bar{f}$ – комплексно сопряженная к ней. Стереографический образ единичного скирмиона удобно записать в виде:

$$f_1 = \frac{i\, z_0\, \kappa(z\bar{z}/z_0^2)}{\bar{z}}, \qquad (3)$$

где κ – гладкая вещественная профильная функция, z_0 – параметр, связанный с размером скирмиона. Анзац (3) наиболее удобен для описания случая СкК, в то же время он полностью воспроизводит профиль полученный в рамках анзаца цилиндрической доменной стенки для уединенного скирмиона. Ранее было показано, что стереографический образ мультискирмионной конфигурации может быть с хорошей точностью представлен суммой стереографических образов отдельных скирмионов [15]. В частности, СкК описывается следующей функцией:

$$f_{SkX} = \sum_{n,m} f_1(\mathbf{r} - n\mathbf{a}_1 - m\mathbf{a}_2), \qquad (4)$$

где $\mathbf{a}_1 = (0, a)$, $\mathbf{a}_2 = (-\sqrt{3}a/2, a/2)$, а a – параметр решетки СкК, см. рис 1. Статические свойства анзаца (3)–(4) подробно обсуждались нами ранее в работах [15, 14]. Было показано, что предложенная конфигурация СкК обладает меньшей энергией по сравнению с магнитной спиралью и однородной конфигурацией в диапазоне значений магнитного поля, $0.25 \lesssim b \lesssim 0.8$.

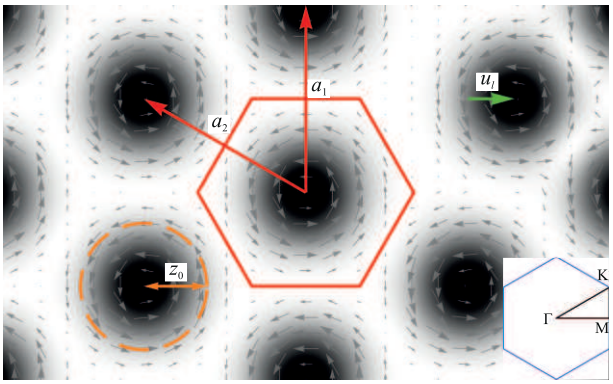

Рис. 1. (Цветной онлайн) Эскиз СкК с одним смещенным из положения равновесия скирмионом. Красные стрелки и гексагон показывают вектора решетки и примитивную ячейку СкК, оранжевый круг иллюстрирует типичное значение параметра z_0, зеленая стрелка обозначает смещение скирмиона в правом верхнем углу. Зона Бриллюэна и ее симметрийные точки изображены в правом нижнем углу

Динамика вектора локальной намагниченности описывается плотностью лагранжиана, $\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{E}$, со следующим кинетическим слагаемым:

$$\mathcal{T} = \frac{S}{\gamma_0}(1 - \cos\theta)\dot{\varphi}, \qquad (5)$$

где φ и θ определяют направление вектора $\mathbf{n} = (\cos\varphi\sin\theta, \sin\varphi\sin\theta, \cos\theta)$, а γ_0 – гиромагнитное отношение. Можно убедиться, что такая форма кинетического слагаемого приводит к уравнению Ландау–Лифшица. В терминах f выражение (5) может быть записано следующим образом:

$$\mathcal{T}[f] = \frac{i}{2}\frac{\bar{f}\partial_t f - f\partial_t \bar{f}}{1 + f\bar{f}}, \tag{6}$$

здесь множитель S/γ_0 был включен в единицы измерения времени. Точное уравнение на $f(t)$ существенно нелинейное и не может быть решено в общем виде. В предыдущих работах [19, 20] мы обсуждали описание нормальных мод инфинитезимальных флуктуаций функции f. В этой работе мы сосредоточимся на построении подхода к описанию гиротропной моды СкК.

Поле смещений и дисперсия. В предыдущих работах мы рассматривали f_{SkX}, ур. (4), как равновесную конфигурацию локальной намагниченности f_0, на фоне которой существуют небольшие динамические флуктуации, δf. Общая функция может быть записана следующим образом

$$f = f_0 + \delta f \equiv f_0 + (1 + f_0\bar{f}_0)\psi,$$

динамика ψ подробно обсуждалась ранее в работе [19].

В настоящей работе мы полагаем, что решетка скирмионов несовершенна, в том смысле, что ее стереографический образ все еще описывается суммой отдельных скирмионов, и их форма остается оптимальной, при этом несовершенство проявляется в положении центров скирмионов. Подобное рассмотрение схоже с описанием смещений ионов в кристаллах в теории фононов.

$$f_{SkX} = \sum_l f_1(\mathbf{r} - \mathbf{r}_l^{(0)} + \mathbf{u}_l), \tag{7}$$

где $\mathbf{r}_l^{(0)} = n\mathbf{a}_1 + m\mathbf{a}_2$, здесь n, m – целые, а $\mathbf{a}_{1,2}$ – векторы решетки. Для инфинитезимальных смещений $\mathbf{u}_l$ можно написать выражение:

$$f_{SkX} \simeq f_0 + \sum_l \mathbf{u}_l \nabla f_1(\mathbf{r} - \mathbf{r}_l^{(0)}). \tag{8}$$

Чтобы использовать выражения, полученные ранее в работе [19], мы определим величину $\psi(\mathbf{r})$ следующим образом:

$$\sum_l \mathbf{u}_l \nabla f_1(\mathbf{r} - \mathbf{r}_l^{(0)}) = (1 + f_0\bar{f}_0)\,\psi(\mathbf{r}), \tag{9}$$

а также напишем $\mathbf{u}_j\nabla = u_j^+\partial_z + u_j^-\partial_{\bar{z}}$, где $\partial_z = (\partial_x - i\partial_y)/2$, $\partial_{\bar{z}} = (\partial_x + i\partial_y)/2$, и $u_j^{\pm} = u_j^x \pm i u_j^y$. Используя для краткости обозначение $f_j = f_1(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j^{(0)})$, мы выразим

$$\psi = \sum_j \frac{u_j^+\partial_z f_j + u_j^-\partial_{\bar{z}} f_j}{1 + f_0\bar{f}_0}, \tag{10}$$

и аналогично для комплексно-сопряженной величины $\bar{\psi}$. В итоге мы получаем:

$$\begin{pmatrix}\psi\\ \bar{\psi}\end{pmatrix} = \frac{1}{1 + f_0\bar{f}_0}\sum_j \begin{pmatrix}\partial_{\bar{z}} f_j, & \partial_z f_j\\ \partial_{\bar{z}}\bar{f}_j, & \partial_z \bar{f}_j\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_j^-\\ u_j^+\end{pmatrix}, \equiv \sum_j \mathcal{O}_j \begin{pmatrix}u_j^-\\ u_j^+\end{pmatrix}. \tag{11}$$

Для однородного смещения $\mathbf{u}_j = \mathbf{u}$, используя свойство $\sum_j (f_j, \bar{f}_j) = (f_0, \bar{f}_0)$, мы восстанавливаем ранее полученное выражение для нулевой моды (см. ур. (29) в работе [19]):

$$\Psi_\emptyset = \frac{1}{1 + f_0\bar{f}_0}\begin{pmatrix}\partial_{\bar{z}} f_0\\ \partial_{\bar{z}}\bar{f}_0\end{pmatrix}, \quad \bar{\Psi}_\emptyset = \sigma_1\Psi_\emptyset^* = \frac{1}{1 + f_0\bar{f}_0}\begin{pmatrix}\partial_z f_0\\ \partial_z \bar{f}_0\end{pmatrix}. \tag{12}$$

Квадратичная по смещениям часть лагранжиана принимает следующий вид:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\sum_{lj}\begin{pmatrix}u_l^+, & u_l^-\end{pmatrix}\left(-i\hat{\mathcal{K}}_{lj}\partial_t - \hat{\mathcal{H}}_{lj}\right)\begin{pmatrix}u_j^-\\ u_j^+\end{pmatrix},$$
$$\hat{\mathcal{K}}_{lj} = \int d\mathbf{r}\,\mathcal{O}_l^\dagger.\sigma_3.\mathcal{O}_j, \tag{13}$$
$$\hat{\mathcal{H}}_{lj} = \int d\mathbf{r}\,\mathcal{O}_l^\dagger.\begin{pmatrix}(-i\nabla + \mathbf{A})^2 + U & V\\ V^* & (i\nabla + \mathbf{A})^2 + U\end{pmatrix}.\mathcal{O}_j,$$

явный вид выражений для U, V и $\mathbf{A}$ приводится в работе [19][2)].

Обсудим несколько общих свойств возникающих выражений.

(i) В силу трансляционной инвариантности, величины $\hat{\mathcal{K}}_{lj}$ и $\hat{\mathcal{H}}_{lj}$ зависят лишь от разности $\mathbf{d} = \mathbf{r}_l^{(0)} - \mathbf{r}_j^{(0)}$.

(ii) Нулевая мода соответствует суммированию по j, следовательно, должно выполняться свойство $\sum_j \hat{\mathcal{H}}_{lj} = \sum_l \hat{\mathcal{H}}_{lj} = 0$, см. ниже.

[2)] Пользуясь возможностью, исправим опечатку в работе [19]: слагаемое в фигурных скобках в определении $\mathbf{A}$ должно обладать другим знаком и множителем 2 вместо 4.

(*iii*) Стереографический образ отдельного скирмиона $f_1(\mathbf{r})$ быстро убывает с расстоянием. Следовательно, $\hat{\mathcal{K}}_{lj}$, $\hat{\mathcal{H}}_{lj}$ быстро убывают с ростом $|\mathbf{r}_l^{(0)} - \mathbf{r}_j^{(0)}|$. Поэтому целесообразно рассматривать самодействие, $l = j$, и взаимодействие ближайших соседей.

(*iv*) Можно показать, что $\sum_j \hat{\mathcal{K}}_{lj} = \pi\sigma_3$, эта величина пропорциональна топологическому заряду, приходящемуся на элементарную ячейку СкК.

(*v*) Для треугольной решетки с шестью соседями имеем $\mathbf{d} = (a\cos\phi_d, a\sin\phi_d)$, где $\phi_d = \frac{\pi}{3}(n - 1/2)$ и $n = 0, \ldots, 5$. Каждый отдельный скирмион характеризуется определенной хиральностью, $f_1(\mathbf{r}) \propto e^{i\phi}/r$. Благодаря этому потенциалы U, V, а как следствие и матрица $\mathcal{O}_j$, при вращении $\phi \to \phi + \phi_d$ меняются определенным образом; стоит отметить, что при таком повороте фаза ϕ_d удваивается у внедиагональных членов $\hat{\mathcal{H}}_{lj}$, а у диагональных не меняется. Таким образом, мы получаем:

$$\hat{\mathcal{H}}_{lj} = \begin{pmatrix} h_1, & h_2 e^{-2i\phi_d} \\ h_2 e^{2i\phi_d}, & h_1 \end{pmatrix},$$

где $h_{1,2}$ зависят только от расстояния, d. На одном узле, $l = j$, внедиагональные члены отсутствуют, $h_2 = 0$. Численный расчет показывает, что $h_{1,2} < 0$ для $l \neq j$.

(*vi*) Уравнение Тиле для движения l'-го скирмиона можно получить, положив $u_j^{\pm} = 0$ в (13) для всех $j \neq l$. В этом случае лагранжиан принимает вид $\mathcal{K}_{ll} u_l^x \dot{u}_l^y - h_1((u_l^x)^2 + (u_l^y)^2)$, ср. [26]. Отметим, что даже если изначально $u_j^{\pm} = 0$, то коллективный характер ур. (13) приводит к распространению изначального возмущения. Мы вернемся к этому вопросу ниже.

Пользуясь упомянутыми выше свойствами, получим квадратичную форму лагранжиана:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{q}} \begin{pmatrix} u^+_{-\mathbf{q}}, & u^-_{-\mathbf{q}} \end{pmatrix} \left(-i\hat{\mathcal{K}}_{\mathbf{q}}\partial_t - \hat{\mathcal{H}}_{\mathbf{q}}\right) \begin{pmatrix} u^-_{\mathbf{q}} \\ u^+_{\mathbf{q}} \end{pmatrix},$$

$$\hat{\mathcal{K}}_{\mathbf{q}} = (\pi + k_1\gamma_s(\mathbf{q}))\sigma_3, \qquad (14)$$

$$\hat{\mathcal{H}}_{\mathbf{q}} = \begin{pmatrix} h_1\gamma_s(\mathbf{q}), & h_2\,\gamma_d^*(\mathbf{q}) \\ h_2\,\gamma_d(\mathbf{q}), & h_1\gamma_s(\mathbf{q}) \end{pmatrix},$$

где $u_j^x \pm i u_j^y = \sum_{\mathbf{q}} e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}_j} u_{\mathbf{q}}^{\pm}$, а сумма по шести ближайшим соседям дает

$$\gamma_s(\mathbf{q}) = \sum_{\mathbf{d}} e^{-i\mathbf{q}\mathbf{d}} - 6 =$$
$$= 2\left(2\cos\tfrac{\sqrt{3}}{2}q_x a\cos\tfrac{1}{2}q_y a + \cos q_y a - 3\right),$$
$$\gamma_d(\mathbf{q}) = \sum_{\mathbf{d}} e^{-i\mathbf{q}\mathbf{d}} e^{2i\phi_d} = \qquad (15)$$
$$= 2\left(\cos\tfrac{\sqrt{3}}{2}q_x a\cos\tfrac{1}{2}q_y a - \cos q_y a - \right.$$
$$\left. - i\sqrt{3}\sin\tfrac{\sqrt{3}}{2}q_x a\sin\tfrac{1}{2}q_y a\right),$$

при этом $\gamma_{s,d}(0) = 0$. Обращение в нуль диагональных членов $\hat{\mathcal{H}}_{\mathbf{q}}$ при $\mathbf{q} = 0$ обеспечивается свойством (ii), упомянутым выше, и мы обсудим его ниже.

Дисперсионный закон $\omega = \epsilon_{\mathbf{q}}$ во временной зависимости $u_{\mathbf{q}}^{\pm}(t) = e^{i\omega t} u_{\mathbf{q}}^{\pm}$ может быть получен решением уравнения $\det(\omega\hat{\mathcal{K}}_{\mathbf{q}} - \hat{\mathcal{H}}_{\mathbf{q}}) = 0$, из которого следует:

$$\epsilon_{\mathbf{q}} = \frac{(h_1^2\gamma_s^2(\mathbf{q}) - h_2^2|\gamma_d(\mathbf{q})|^2)^{1/2}}{\pi + k_1\gamma_s(\mathbf{q})}.$$

Численно мы нашли, что во всем диапазоне значений, $b \in (0.3, 0.8)$, справедливо соотношение $h_1 \simeq \simeq 0.84\, h_2$. Зависимость $h_{1,2}$ от b изображена на рис. 2. Стоит отметить, что оба коэффициента стремятся к

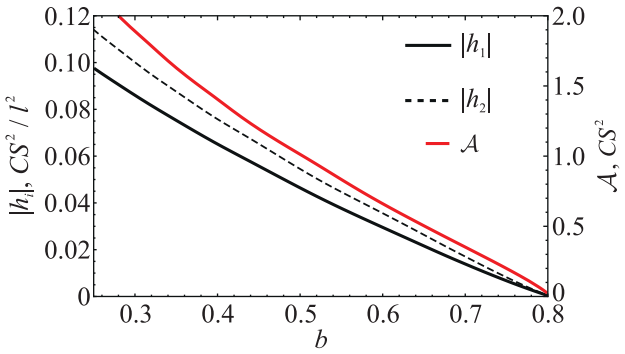

Рис. 2. (Цветной онлайн) Зависимость прыжковых констант h_1, h_2, и жесткости $\mathcal{A}$ от магнитного поля b

нулю одновременно при подходе к критическому полю, $b_c \simeq 0.8$. В рамках теории упругости это значит, что коэффициенты Ламе λ, μ, обсуждаемые в работе [22], убывают и обращаются в нуль при $b = b_c$, при этом $\lambda \simeq 1.94\mu$, см. также ур. (19) ниже. Зависимость дисперсии вдоль контура проходящего через симметричные точки заты Бриллюэна показана на рис. 3. Выражение $\epsilon_{\mathbf{q}}$ принимает значения $9|h_1|/\pi$ и $2\sqrt{4h_1^2 - h_2^2}/\pi$ в симметрийных точках $\mathbf{q} = K$ и $\mathbf{q} = M$, соответственно. Также $\epsilon_{\mathbf{q}=M}/\epsilon_{\mathbf{q}=K} \simeq 0.71$ во

всем диапазоне значений b. Уменьшение ширины зоны с сохранением упомянутого выше отношения 0.71, с ростом b согласуется с результатами, полученным в работе [18]. Величина k_1 в кинетическом члене $\hat{\mathcal{K}}_{\mathbf{q}}$ отрицательная и небольшая, $|k_1| < 2 \cdot 10^{-2}$, поэтому в дальнейшем мы опустим ее из рассмотрения.

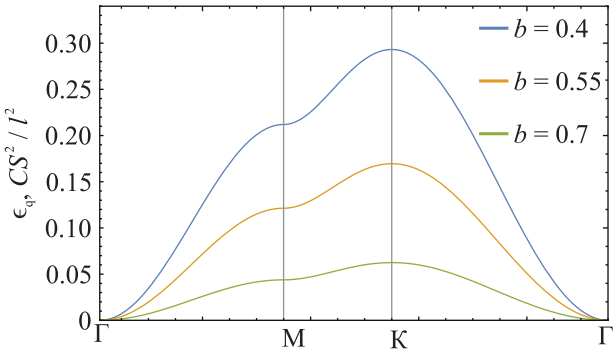

Рис. 3. (Цветной онлайн) Дисперсия $\epsilon_{\mathbf{q}}$ для разных значений b. Символы Γ, M, K соответствуют симметрийным точкам зоны Бриллюэна, обозначены на рис. 1

В пределе малых волновых векторов $|q| \ll 1$, справедливо следующее:

$$\epsilon_{\mathbf{q}} \simeq \tfrac{3}{4\pi} q^2 a^2 \sqrt{4h_1^2 - h_2^2} \equiv \mathcal{A} q^2. \tag{16}$$

Зависимость коэффициента жесткости, $\mathcal{A}$, от b изображена на рис. 2; между величинами $\mathcal{A}$ и $h_{1,2}$ нет простой пропорциональной зависимости, поскольку параметр d нелинейно зависит от b, см. работу [19]. Имеет смысл сравнить величину $\mathcal{A}$ в контексте дисперсии магнонов в простом ферромагнетике. Этот случай соответствует конфигурации $f_0 \equiv 0$, а следовательно $U = b$, $V = 0$ и $\mathbf{A} = 0$ в (13), см. ур. (16)–(18) в [19]. Это приводит к тому, что $\epsilon_{\mathbf{q}} = q^2 + b$, т.е. к $\mathcal{A} = 1$, и щели в спектре. Сравнивая полученные выше выражения со случаем простого ферромагнетика, можно отметить, что дисперсия низколежащих возбуждений бесщелевая, а жесткость убывает с ростом поля. Может возникнуть вопрос: как с ростом поля b в бесщелевом спекре появляется щель при исчезновении СкК и переходе в фазу однородной намагниченности. Ответ состоит в том, что в этом случае область применения (16) сужается до $q = 0$, поскольку $a \to \infty$ при b_c, ср. [27].

Рассмотрим теперь подробнее упомянутое выше свойство (ii), использованное в определении $\gamma_s(\mathbf{q})$. Вычисления, выполненные с использованием нашей пробной функции, показывают, что свойство $\hat{\mathcal{H}}_{\mathbf{q}} = 0$ для $\mathbf{q} = 0$ выполнено с точностью до $5 \cdot 10^{-3}$ в диапазоне полей $0.35 < b < 0.75$. Это говорит о хорошем выборе пробной функции и согласуется с нашей предыдущей работой [19]. В то же время, наша пробная функция не является точным решением модели и не обеспечивает экстремум действия, его первая вариация тождественно не равна нулю. В этом случае следует добавить дополнительные члены к эффективному гамильтониану, $\hat{\mathcal{H}}_{lj}$ в (13), как мы поясним ниже.

Рассмотрим разложение нашей функции до второго порядка по смещениям:

$$\delta f = (1 + f_0 \bar{f}_0)^{-1} \psi = \sum_l \Big(u_l^\alpha \partial_\alpha f_1(\mathbf{r} - \mathbf{r}_l^{(0)}) + \\ + \tfrac{1}{2} u_l^\alpha u_l^\beta \partial_\alpha \partial_\beta f_1(\mathbf{r} - \mathbf{r}_l^{(0)}) \Big). \tag{17}$$

Это выражение должно быть умножено на $\delta\mathcal{L}/\delta f$, которая теперь предполагается отличной от нуля. После интегрирования по $\mathbf{r}$ члены первого порядка пропорциональные $\propto u_l^\alpha$, приводят к возникновению силы, приложенной к l-му скирмиону в направлении от положения равновесия. Члены второго порядка в (17), будучи умножены на $\delta\mathcal{L}/\delta f$ и проинтегрированы по $\mathbf{r}$, добавляются к выражению (13).

Прежде всего заметим, что кинетическая часть $\delta\mathcal{L}/\delta f$, будучи симметричной по индексам α, β, сводится к членам, пропорциональным полной производной по времени, $\propto \frac{d}{dt}(u_l^\alpha)^2$, которые можно отбросить. Потенциальную часть лагранжиана проинтегрируем по частям, отбросив внеинтегральные слагаемые из-за быстрого убывания $f_1(\mathbf{r})$ с расстоянием. Оставшаяся часть, после определенных вычислений, преобразуется к следующему виду:

$$\mathcal{L}' = \frac{1}{2} \sum_{lj} \begin{pmatrix} u_l^+, & u_l^- \end{pmatrix} \hat{\mathcal{H}}_{lj} \begin{pmatrix} u_l^- \\ u_l^+ \end{pmatrix}, \tag{18}$$

это значит, что мы должны заменить $\hat{\mathcal{H}}_{lj}$ в (13) на $\tilde{\mathcal{H}}_{lj} = \hat{\mathcal{H}}_{lj} - \delta_{lj} \sum_m \hat{\mathcal{H}}_{lm}$. Ясно, что если условие $\sum_j \hat{\mathcal{H}}_{lj} = 0$ изначально не выполнялось из-за неточности пробной функции, то теперь оно восстанавливается для $\tilde{\mathcal{H}}_{lj}$, поскольку $\sum_j \tilde{\mathcal{H}}_{lj} = 0$. Используя симметрию выражения (17) по индексам α, β, можно также показать, что также выполнено $\sum_l \tilde{\mathcal{H}}_{lj} = 0$. Все вышесказанное обосновывает свойство (ii), а также объясняет вычитание 6 в определении $\gamma_s(\mathbf{q})$.

Функция Грина в пределе малых q. Обсудим распространение смещений в СкК. Чтобы упростить обсуждение, рассмотрим две последовательных замены координат в лагранжиане. В первую очередь, при помощи матрицы $U = \begin{pmatrix} 1, & -i \\ 1, & i \end{pmatrix}$, вернемся к декартовым координатам $u_{\mathbf{q}}^{\pm} = u_{\mathbf{q}}^x \pm i u_{\mathbf{q}}^y$.

Во-вторых, перейдем к главным осям $\hat{\mathcal{H}}_{\mathbf{q}}$, а именно, параллельно и перпендикулярно вектору $\mathbf{q} = q(\cos\phi_q, \sin\phi_q)$, написав $(u^x_{\mathbf{q}}, u^y_{\mathbf{q}}) = (u^{\parallel}_{\mathbf{q}}, u^{\perp}_{\mathbf{q}}) \cdot U_1^{\dagger}$, где $U_1 = \begin{pmatrix} \cos\phi_q, & -\sin\phi_q \\ \sin\phi_q, & \cos\phi_q \end{pmatrix}$. В итоге мы приводим лагранжиан к следующему виду:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{q}} \begin{pmatrix} u^{\parallel}_{-\mathbf{q}}, & u^{\perp}_{-\mathbf{q}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -A_{\parallel}q^2, & -2\pi\partial_t \\ 2\pi\partial_t, & -A_{\perp}q^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^{\parallel}_{\mathbf{q}} \\ u^{\perp}_{\mathbf{q}} \end{pmatrix},$$
$$A_{\parallel} = -\tfrac{3}{2}(2h_1 + h_2)a^2, \quad A_{\perp} = -\tfrac{3}{2}(2h_1 - h_2)a^2, \quad (19)$$

где $A_{\parallel}, A_{\perp} > 0$ – модули упругости, соответствующие продольной и поперечной моде для акустических фононов; справедливо также $A_{\parallel}A_{\perp} = 2\pi\mathcal{A}$. Иная форма кинетического слагаемого приводит, во-первых, к квадратичной дисперсии в нашем случае вместо линейной для случая акустических фононов. Во-вторых, в нашем случае величина $2\pi\, u^{\perp}_{-\mathbf{q}}$ становится канонически сопряженным импульсом для смещения $u^{\parallel}_{\mathbf{q}}$.

Согласно общим правилам [28, 19], проведем процедуру вторичного квантования нашей теории. Потребуем выполнения $[u^{\parallel}_{\mathbf{q}}, 2\pi\, u^{\perp}_{-\mathbf{q}}] = i\hbar$ (мы считаем $\hbar = 1$), тогда

$$u^{\parallel}_{\mathbf{q}} = \frac{1}{\sqrt{4\pi\varkappa}}(c^{\dagger}_{\mathbf{q}}e^{i\epsilon_{\mathbf{q}}t} + c_{-\mathbf{q}}e^{-i\epsilon_{\mathbf{q}}t}),$$
$$u^{\perp}_{\mathbf{q}} = i\frac{\sqrt{\varkappa}}{\sqrt{4\pi}}(c^{\dagger}_{\mathbf{q}}e^{i\epsilon_{\mathbf{q}}t} - c_{-\mathbf{q}}e^{-i\epsilon_{\mathbf{q}}t}), \quad (20)$$

где $\varkappa = \sqrt{A_{\parallel}/A_{\perp}} \simeq 1.98$ – параметр асимметрии. В терминах операторов рождения (уничтожения), $c^{\dagger}_{\mathbf{q}}$ ($c_{\mathbf{q}}$), гамильтониан приобретает вид $\hat{\mathcal{H}} = \sum_{\mathbf{q}} \epsilon_{\mathbf{q}} c^{\dagger}_{\mathbf{q}} c_{\mathbf{q}}$.

Определим запаздывающую функцию Грина следующим образом:

$$G(t, \mathbf{q}) = -i\vartheta(t) \begin{pmatrix} [u^x_{-\mathbf{q}}(t), u^x_{\mathbf{q}}], & [u^x_{-\mathbf{q}}(t), u^y_{\mathbf{q}}] \\ [u^y_{-\mathbf{q}}(t), u^x_{\mathbf{q}}], & [u^y_{-\mathbf{q}}(t), u^y_{\mathbf{q}}] \end{pmatrix}, \quad (21)$$

с соответствующим Фурье преобразованием при $t > 0$:

$$G(t, \mathbf{r}) = -\frac{\sqrt{3}a^2}{4\pi} \times \int \frac{d^2\mathbf{q}}{(2\pi)^2} e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} U_1 \begin{pmatrix} \frac{1}{\varkappa}\sin\epsilon_{\mathbf{q}}t, & -\cos\epsilon_{\mathbf{q}}t \\ \cos\epsilon_{\mathbf{q}}t, & \varkappa\sin\epsilon_{\mathbf{q}}t \end{pmatrix} U_1^{\dagger}.$$

Простое вычисление (с эффективно ограниченной областью интегрирования $q \le a^{-1}$ при помощи гауссова множителя $\exp(-q^2a^2)$) приводит к выражению, справедливому на больших временах и расстояниях, $t\mathcal{A} \gg ra$, $r \gg a$:

$$G(t, \mathbf{r}) = \frac{\sqrt{3}a^2}{16\pi^2 t\mathcal{A}} \Bigg[-\cos(r^2/4t\mathcal{A}) \frac{\varkappa + \varkappa^{-1}}{2} \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix} + \sin(r^2/4t\mathcal{A}) \begin{pmatrix} 0, & 1 \\ -1, & 0 \end{pmatrix} + F(r^2/4t\mathcal{A}) \frac{\varkappa - \varkappa^{-1}}{2} \begin{pmatrix} \cos 2\phi, & \sin 2\phi \\ \sin 2\phi, & -\cos 2\phi \end{pmatrix} \Bigg],$$
$$F(z) = \cos z - \sin z/z. \quad (22)$$

На малых расстояниях, $r \ll \sqrt{t\mathcal{A}}$, существенно первое слагаемое в $G(t, \mathbf{r})$, отвечающее изотропному распространению. На промежуточных расстояниях, $\sqrt{t\mathcal{A}} \ll r \ll t\mathcal{A}/a$, главную роль играет комбинация первого и третьего слагаемых, и проявляется анизотропия тензора $G(t, \mathbf{r})$, с главными осями в направлении, параллельном и перпендикулярном вектору $\mathbf{r}$ в плоскости. На больших расстояниях, $r \gg t\mathcal{A}/a$, функция $G(t, \mathbf{r})$ становится экспоненциально мала, что говорит о том, что возмущение еще не достигло точки $\mathbf{r}$. Стоит отметить, что осциллирующие множители зависят только от отношения r^2/t, а упомянутая выше анизотропия касается относительного веса корреляций u^x и u^y. Мы иллюстрируем это поведение на рис. 4, где изображены две главных компоненты $G_{\parallel}(t, \mathbf{r})$ и $G_{\perp}(t, \mathbf{r})$, для парных корреляторов $u^{\parallel}$ и $u^{\perp}$, соответственно.

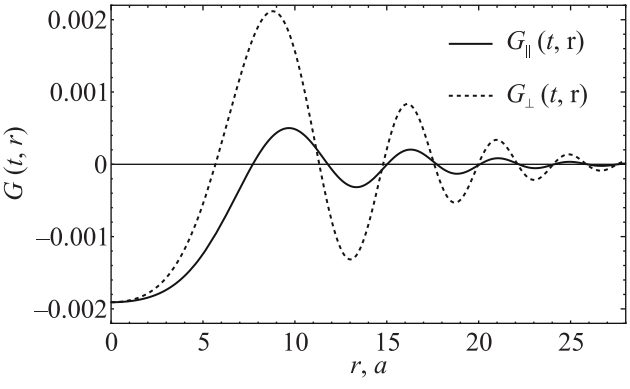

Рис. 4. Функции Грина $G_{\parallel}(t, \mathbf{r})$ и $G_{\perp}(t, \mathbf{r})$, при $t = 6\mathcal{A}^{-1}a^2$, описывают корреляции смещений $u^{\parallel}$ и $u^{\perp}$, параллельных и перпендикулярных вектору $\mathbf{r}$

Заключение. Мы построили теорию низколежащей голдстоуновской моды решетки скирмионов, также известной как гиротропная мода. Эта мода описывает смещение скирмионов из положений равновесия, соответствующее уравнение движения принимает вид коллективного уравнения Тиле. Спектр

квадратичен при малых волновых векторах, что является следствием двух фактов: упругий вид потенциальной энергии и кинетическое слагаемое лагранжиана, ассоциированное с фазой Берри. Упругий вид потенциальной энергии получен в результате рассмотрения скирмионов как отдельных топологических объектов и не предполагает сложного теоретического описания в терминах фазонов, трех магнитных спиралей и т.п. По этим причинам квадратичный характер спектра следует ожидать и при включении в модель других взаимодействий, например, дипольного взаимодействия, анизотропии и др., пока сохранятеся структура СкК. Распространение возмущений по решетке скирмионов анизотропно на промежуточных расстояниях. Нами показано, что ширина зоны монотонно убывает с ростом магнитного поля и исчезает при критическом значении, отвечающем переходу в однородное ферромагнитное состояние.

Работа поддержана Российским научным фондом, грант #22-22-20034 и Санкт-Петербургским научным фондом, грант #33/2022. Работа В. Тимофеева частично поддержана Фондом развития теоретической физики и математики “БАЗИС”.

1. H. Vakili, J.-W. Xu, W. Zhou et al. (Collaboration), J. Appl. Phys. **130**, 070908 (2021).
2. Z. Yan, Y. Liu, Y. Guang, K. Yue, J. Feng, R. Lake, G. Yu, and X. Han, Phys. Rev. Appl. **44**, 392001 (2011).
3. N. S. Kiselev, A. N. Bogdanov, R. Schäfer, and U. K. Rößler, J. Phys. D: Appl. Phys. **44**, 392001 (2011).
4. F. H. D. Leeuw, R. V. D. Doel, and U. Enz, Rep. Prog. Phys. **138**, 255 (1994).
5. A. A. Thiele, Bell System Technical Journal **48**, 3287 (1969).
6. A. Bogdanov and A. Hubert, J. Magn. Magn. Mater. **138**, 255 (1994).
7. A. A. Thiele, Phys. Rev. Lett. **30**, 230 (1973).
8. M. Weißenhofer, L. Rózsa, and U. Nowak, Phys. Rev. Lett. **127**, 047203 (2021).
9. A. Fert, N. Reyren, and V. Cros, Nat. Rev. Mater. **2**, 1 (2017).
10. S. Mühlbauer, B. Binz, F. Jonietz, C. Pfleiderer, A. Rosch, A. Neubauer, R. Georgii, and P. Böni, Science **323**, 915 (2009).
11. X. Z. Yu, N. Kanazawa, Y. Onose, K. Kimoto, W. Z. Zhang, S. Ishiwata, Y. Matsui, and Y. Tokura, Nat. Mater. **10**, 106 (2010).
12. X. Z. Yu, Y. Onose, N. Kanazawa, J. H. Park, J. H. Han, Y. Matsui, N. Nagaosa, and Y. Tokura, Nature **465**, 901 (2010).
13. N. Nagaosa and Y. Tokura, Nat. Nanotechnol. **8**, 899 (2013).
14. V. E. Timofeev, A. O. Sorokin, and D. N. Aristov, Phys. Rev. B **103**, 094402 (2021).
15. V. E. Timofeev, A. O. Sorokin, and D. N. Aristov, JETP Lett. **109**, 207 (2019).
16. A. Roldán-Molina, A. S. Nunez, and J. Fernández-Rossier, New J. Phys. **18**, 045015 (2016).
17. M. Garst, J. Waizner, and D. Grundler, J. Phys. D: Appl. Phys. **50**, 293002 (2017).
18. A. Mook, J. Klinovaja, and D. Loss, Physical Review Research **2**, 033491 (2020).
19. V. E. Timofeev and D. N. Aristov, Phys. Rev. B **105**, 024422 (2022).
20. V. E. Timofeev and D. N. Aristov, JETP Lett. **117**, 676 (2023).
21. Y. Onose, Y. Okamura, S. Seki, S. Ishiwata, and Y. Tokura, Phys. Rev. Lett. **109**, 037603 (2012).
22. O. Petrova and O. Tchernyshyov, Phys. Rev. B **84**, 214433 (2011).
23. N. Mohanta, A. D. Christianson, S. Okamoto, and E. Dagotto, Communications Physics **3**, 229 (2020).
24. T. Schwarze, J. Waizner, M. Garst, A. Bauer, I. Stasinopoulos, H. Berger, C. Pfleiderer, and D. Grundler, Nat. Mater. **14**, 478 (2015).
25. T. Weber, D. M. Fobes, J. Waizner, P. Steffens, G. S. Tucker, M. Böhm, L. Beddrich, C. Franz, H. Gabold, R. Bewley, D. Voneshen, M. Skoulatos, R. Georgii, G. Ehlers, A. Bauer, C. Pfleiderer, P. Böni, M. Janoschek, and M. Garst, Science **375**, 1025 (2022).
26. K. L. Metlov, Phys. Rev. B **88**, 014427 (2013).
27. D. N. Aristov and A. Luther, Phys. Rev. B **65**, 165412 (2002).
28. R. Rajaraman, *Solitons and instantons* North Holland, Amsterdam, N.Y., Oxford (1982).