

Природа спиновой декогеренции поляризованного пучка легких ядер в накопительном кольце для поиска ЭДМ

А. А. Мельников^{+*1)}, Ю. В. Сеничев^{+×}, А. Е. Аксентьев^{+*°}, С. Д. Колокольчиков^{+×}

⁺Институт ядерных исследований РАН, 117312 Москва, Россия

^{*}Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау, 142432 Черноголовка, Россия

[×]Московский физико-технический институт, 141701 Долгопрудный, Россия

[°]Национальный исследовательский ядерный университет МИФИ, 115409 Москва, Россия

Поступила в редакцию 2 октября 2023 г.

После переработки 12 октября 2023 г.

Принята к публикации 13 октября 2023 г.

Когерентное спин-орбитальное движение спинов есть необходимое условие для экспериментов по поиску электрического дипольного момента заряженных частиц в накопительном кольце. Первый шаг для увеличения времени когерентности спинов представляет собой включение резонатора с высокочастотным полем. На следующем шаге необходимо выравнивание равновесных уровней энергии, связанных с бетатронным удлинением орбит и нелинейным коэффициентом сжатия орбит. Спиновые резонансы также являются дополнительным источником декогеренции, особенно для протонного пучка.

DOI: 10.31857/S1234567823220020, EDN: phoegy

Введение. Одной из основных проблем современной физики является барионная асимметрия Вселенной, которая означает преобладание материи над антиматерией. Космические детекторы PAMELA и AMS, направленные на поиск антивещества, еще не обнаружили его значительного количества во Вселенной [1]. Вскоре после открытия антиматерии А. Сахаров установил необходимые условия для бариогенеза (первоначального образования барионов) в 1967 г. [2]. Согласно этой идее, одной из причин барионной асимметрии является нарушение СР-инвариантности. Для объяснения механизма СР-нарушения было предложено множество теорий, выходящих за рамки Стандартной Модели (СМ), и все они из так называемой “Новой физики”. Они способны устранить трудности, с которыми можно столкнуться в СМ, но их экспериментальное подтверждение еще не найдено. Одним из возможных аргументов нарушения СР-инвариантности является существование ненулевых электрических дипольных моментов (ЭДМ) элементарных частиц.

Идея поиска ЭДМ протона и дейтрона с помощью поляризованных пучков в накопителе была первоначально предложена в Брукхейвенской национальной лаборатории (BNL), США [3, 4]. В настоящее время институт ядерной физики Юлихского исследо-

вательского центра (FZJ, Германия) разрабатывает концепцию накопителя ProtoType Ring (PTR) специально для поиска ЭДМ дейтронов и протонов [5]. Опыт работы в Юлихе на ускорителе COSY в экспериментах по поиску ЭДМ показал, что эта задача включает в себя следующие фундаментальные проблемы, которые необходимо решить: максимальное время спиновой когерентности (SCT) частиц в сгустке должно быть более 1000 с, особое внимание должно быть уделено точности измерения частоты прецессии спина, и вклад систематических ошибок в общую частоту прецессии спина должен быть меньше, чем вклад сигнала от ЭДМ.

В данной статье обсуждается природа спиновой декогеренции поляризованного пучка протонов и дейтронов в накопительном кольце для поиска ЭДМ.

Основные причины декогеренции поляризованного пучка. Явление спиновой декогеренции связано с неодинаковой частотой прецессии спина у разных частиц в сгустке. В экспериментах с поляризованными пучками по поиску электрического дипольного момента решающую роль играет сохранение когерентности спиновых колебаний частиц в сгустке в течение времени, достаточного для сбора данных.

Первые исследования по декогеренции были проведены на ускорителе COSY в г. Юлих с пучком дейтронов [6]. Ансамбль спинов частиц прецессировал в

¹⁾e-mail: alexei.a.melnikov@gmail.com

горизонтальной плоскости вокруг вертикальной оси. Поляризация определялась с помощью поляриметра. Изменение амплитуды сигнала полной поляризации использовалось для определения времени спиновой когерентности.

Сегодня известны три основных механизма спиновой декогеренции. Первый из них – зависимость частоты прецессии спина от энергии частицы. По аналогии с бетатронным движением зависимость частоты прецессии спина от энергии частицы будем называть спиновой хроматичностью. Вторая причина, вызывающая спиновую декогеренцию, – это изменение длины траектории частицы в трехмерном пространстве, что вызывает изменение частоты прецессии спина частицы. Мы называем это явление удлинением орбиты. Третья причина связана с влиянием спиновых резонансов на разброс спиновой частоты частиц в пучке. Первые две причины связаны друг с другом, поскольку обе определяются зависимостью частоты прецессии спина от параметров частицы. Тем не менее формально их природа различна, и их следует рассматривать отдельно.

Для изучения поведения ансамбля спинов частиц в пучке мы предполагаем справедливость теоремы Эренфеста, утверждающей, что средние значения квантовомеханического оператора, а также действующие силы подчиняются законам классической механики.

Ю. Узиков (ОИЯИ) специально обосновал этот переход для спина, согласно которому в представлениях классической физики “спин” означает среднее значение квантовомеханического оператора спина.

Основной принцип измерения ЭДМ в кольце следует из уравнения “Томаса–Баргмана, Мишеля, Телегди”. В соответствии с теоремой Эренфеста оно описывает классическое поведение спина частицы $\mathbf{S}$ в сгустке с учетом предполагаемого ЭДМ:

$$\frac{d\mathbf{S}}{dt} = \mathbf{S} \times (\boldsymbol{\Omega}_{MDM} + \boldsymbol{\Omega}_{EDM}), \quad (1a)$$

$$\boldsymbol{\Omega}_{MDM} = \frac{q}{m\gamma} \left[(\gamma G + 1) \mathbf{B}_\perp + (1 + G) \mathbf{B}_\parallel - \gamma \left(G + \frac{1}{\gamma + 1} \right) \frac{\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}}{c} \right], \quad (1b)$$

$$\boldsymbol{\Omega}_{EDM} = \frac{q\eta}{2m} \left[\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B} + \frac{\mathbf{E}}{c} - \frac{\gamma}{\gamma + 1} \frac{\boldsymbol{\beta}}{c} (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{E}) \right]. \quad (1c)$$

Здесь Ω_{MDM} есть частота спин-прецессии за счет магнитного дипольного момента (далее – МДМ прецессия), Ω_{EDM} есть частота спин-прецессии за счет электрического дипольного момента (далее – ЭДМ прецессия). m, q – масса и заряд частицы; $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{v}/c$,

$\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$ – релятивистский бета и Лоренц фактор. $\mathbf{B} = \mathbf{B}_\perp + \mathbf{B}_\parallel$, $\mathbf{B}_\parallel = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{B})\mathbf{v}/v^2$. Аномальный магнитный момент $G = \frac{g-2}{2}$, g – гиромагнитное отношение. Безразмерный η фактор связан с величиной ЭДМ d и спина s частицы: $d = \frac{\eta q}{2mc}s$. При изучении эффектов спиновой декогеренции мы предполагаем $B_\parallel = 0$, так как не рассматриваем элементы с продольным магнитным полем. Продольное электрическое поле $E_\parallel$ также не учитывается.

Протонные и дейтронные накопительные кольца для поиска ЭДМ. В данной работе мы рассматриваем спиновую декогеренцию в экспериментах по поиску ЭДМ протона и дейтрона. С точки зрения магнитооптической структуры ускорители протонов и дейтронов имеют принципиальные различия. В частности, ускорители для изучения ЭДМ протона имеют чисто электростатическую структуру, а ускорители для дейтронов представляют собой смешанную структуру с электростатическими и магнитостатическими элементами. В каждой структуре явление декогеренции имеет свои особенности. Но сначала мы рассмотрим общий подход к изучению времени спиновой когерентности.

В смешанной структуре используются элементы с магнитным и электрическим полями, которые связаны между собой соотношением, следующим из силы Лоренца, удерживающей частицу на орбите радиуса R : $q(c\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B} + \mathbf{E}) = \frac{m\gamma v^2}{R} \mathbf{e}_x$. Здесь $\mathbf{e}_x$ – единичный радиальный вектор. Угловая частота вращения частицы на орбите ускорителя определяет скорость вращения импульса $\boldsymbol{\Omega}_{E,B}^p = \frac{q}{m} \frac{\gamma}{\gamma^2 - 1} \frac{\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}}{c} + \frac{q\mathbf{B}_\perp}{m\gamma}$.

Вычитая частоту $\Omega_{E,B}^p$ из частоты Ω_{MDM} (1b) получаем частоту прецессии спина относительно импульса Ω_{MDM}^p :

$$\Omega_{MDM}^p = \omega_E^p + \omega_B^p, \quad (2)$$

где

$$\omega_E^p = \frac{q}{m} \left(G - \frac{1}{\gamma^2 - 1} \right) \frac{\mathbf{E} \times \boldsymbol{\beta}}{c}; \quad \omega_B^p = \frac{q}{m} G \mathbf{B}_\perp. \quad (3)$$

Для исследования электрического дипольного момента протона предлагается использовать полностью электростатическое накопительное кольцо. Преимущество чисто электростатических структур (магнитное поле $B = 0$) особенно проявляется на “магической” энергии, когда вектор спина, изначально ориентированный в продольном направлении, вращается в горизонтальной плоскости с частотой ω_E^p .

При “магической” энергии

$$G - \frac{1}{\gamma_{\text{mag}}^2 - 1} = 0, \quad (4)$$

таким образом, для референсной частицы $\omega_{E,B}^p = 0$ (3), и ориентация спина относительно импульса определяется только сигналом ЭДМ $\frac{d\mathbf{S}}{dt} = \mathbf{S} \times \boldsymbol{\Omega}_{EDM}$. Это отличительное свойство структуры было предложено использовать для исследования ЭДМ, и такую структуру назвали структурой “замороженного спина” [3].

Далее примем следующую индексацию проекций спин-вектора $\mathbf{S} = (S_x, S_y, S_z)$ и пространственных переменных: z ориентировано по импульсу, x и y – горизонтальное и вертикальное направления соответственно.

Теперь введем определение спин-тьюна. Спин-тьюн в электростатическом кольце ν_s^E определяется как нормированная частота прецессии спина на орбитальную частоту частицы $\nu_s^E = \omega_E^p / \Omega_E^p$ и представляется в виде:

$$\nu_s^E = \left(G - \frac{1}{\gamma^2 - 1} \right) \gamma \beta^2. \quad (5)$$

В случае дейтронов с $G = -0.142$ единственно возможной структурой для поиска ЭДМ является накопительное кольцо с электрическим и магнитным полями [4]. Его можно реализовать, применив радиальное электрическое поле $\mathbf{E}_x$, чтобы сбалансировать вклад вертикального магнитного поля $\mathbf{B}_y$ в Ω_{MDM}^p , как показано в уравнении (2):

$$E_x = \frac{GB_y c \beta \gamma^2}{1 - G \beta^2 \gamma^2}. \quad (6)$$

Частота прецессии вектора импульса в магнитном B -поле есть $\Omega_B^p = \frac{eB}{m\gamma}$. Аналогично мы находим спин-тьюн $\nu_s^B = \omega_B^p / \Omega_B^p$, в магнитном поле относительно импульса:

$$\nu_s^B = \gamma G. \quad (7)$$

Таким образом, и для протонов, и для дейтронов существует общее представление о том, как построить накопительное кольцо, и реализуется оно с помощью разных типов дефлекторов: E или $E + B$.

Спиновая хроматичность в протонных и дейтронных накопителях для поиска ЭДМ. Основная проблема при измерении ЭДМ состоит в том, чтобы обеспечить когерентное колебание спинов всех частиц для наблюдения роста поляризации, вызванного ЭДМ. Здесь мы рассматриваем спиновое движение ансамбля частиц в плоскости ускорителя для полностью электростатического или комбинированного $E + B$ кольца.

В полностью электростатическом протонном кольце [7] для частицы с энергией, отличной от “магической”, $p \neq p_{\text{mag}}$ нарушается условие (4):

$G - \frac{1}{\gamma^2 - 1} \neq 0$. Раскладывая $G - \frac{1}{\gamma^2 - 1}$ в ряд Тейлора вблизи $p = p_{\text{mag}}$, получим:

$$\left(G - \frac{1}{\gamma^2 - 1} \right)_{p=p_{\text{mag}}+\Delta p} = 0 + 2G \frac{\Delta p}{p_{\text{mag}}} - 3G \left(\frac{\Delta p}{p_{\text{mag}}} \right)^2 + o \left(\frac{\Delta p}{p_{\text{mag}}} \right)^2. \quad (8)$$

Для дейтронного пучка условие “замороженного спина” означает, что полная частота спин-прецессии в магнитном и электрическом поле равна нулю $\omega_E^p + \omega_B^p = 0$. Раскладывая $\omega_E^p + \omega_B^p$ в ряд Тейлора вблизи p_0 , при котором условие (6) выполнено, получим:

$$(\omega_E^p + \omega_B^p)_{p_0+\Delta p} = \frac{e}{mc} (\mathbf{E} \times \boldsymbol{\beta}) \times \times \left[0 + \frac{2}{\gamma^2 - 1} \frac{\Delta p}{p_0} - \frac{1 + 3\gamma^2}{\gamma^2(\gamma^2 - 1)} \left(\frac{\Delta p}{p_0} \right)^2 + o \left(\frac{\Delta p}{p_0} \right)^2 \right]. \quad (9)$$

Разница между условиями (8) и (9) для протонного и дейтронного колец состоит лишь в том, что в протонном накопителе используется выражение для магической энергии (4), а для дейтронного кольца – условие сохранения направления спина в $E + B$ дефлекторе (6) используется совместно с условием устойчивого движения по орбите под действием силы Лоренца: $e(c\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B} + \mathbf{E}) = \frac{m\gamma v^2}{R} \mathbf{e}_x$.

Учитывая, что вертикальная компонента электрического поля мала, и $\beta_{x,y} \ll \beta_z$, можно упростить уравнение (1), чтобы понять поведение спина качественно:

$$\begin{aligned} \frac{dS_x}{c\beta_z dt} &= -\frac{e}{m\gamma c^2} \frac{2}{\gamma^2 - 1} \frac{\Delta p}{p_0} \cdot E_x S_z, \\ \frac{dS_z}{c\beta_z dt} &= +\frac{e}{m\gamma c^2} \frac{2}{\gamma^2 - 1} \frac{\Delta p}{p_0} \cdot E_x S_x. \end{aligned} \quad (10)$$

В терминах нормализованной координаты $d\phi = 2\pi \times \times dn = 2\pi \frac{c\beta_z}{L_{\text{cir}}} dt$, где L_{cir} есть длина орбиты, получим:

$$\frac{d^2 S_z}{d\phi^2} + \left(\frac{e\bar{E}_x L_{\text{cir}}}{2\pi m c^2 \gamma} \frac{2}{\gamma^2 - 1} \frac{\Delta p}{p_0} \right)^2 \cdot S_z = 0. \quad (11)$$

При этом спин осциллирует в горизонтальной плоскости с тьюном $\nu_{sz} = \frac{e\bar{E}_x L_{\text{cir}}}{\pi m c^2 \gamma} \frac{1}{\gamma^2 - 1} \frac{\Delta p}{p_0}$, и $S_z = S_z^{\text{max}} \cos(2\pi \nu_{sz} \phi)$, где $\bar{E}_x$ есть средняя компонента отклоняющего электрического поля, связанная с магнитной компонентой в $E + B$ дефлекторе соотношением (6).

Таким образом, благодаря спиновой хроматичности и разбросу импульса $\frac{\Delta p}{p_0}$ мы обнаруживаем, что спин каждой частицы колеблется со своей частотой, что, очевидно, приводит к спиновой декогеренции и

полной деполяризации пучка в определенный период, называемый временем спиновой когерентности.

Например, примем максимальный относительный разброс по импульсам, равный 10^{-4} , при этом разброс частот спин-прецессии $\Delta\nu_{sz} = 1.588 \cdot 10^{-4}$, или SCT = 6300 оборотов, что соответствует 1 мс.

Использование высокочастотного резонатора для увеличения SCT. Сначала рассмотрим спин-прецессию (9) в линейном приближении относительно импульса:

$$(\omega_E^p + \omega_B^p)_{p_0 + \Delta p} = \frac{e}{mc} (\mathbf{E} \times \boldsymbol{\beta}) \frac{2}{\gamma^2 - 1} \frac{\Delta p}{p_0}. \quad (12)$$

Идея использования высокочастотного (ВЧ) резонатора для уменьшения разброса частот спин-прецессии частиц, имеющих энергию, отличную от магической, была предложена некоторое время назад другими авторами, например [8].

Очевидно, частица, колеблющаяся около уровня магической энергии с синхротронной частотой ν_{syn} также изменяет поведение спина. Это следует из уравнения (11) с $\frac{\Delta p}{p} = \left(\frac{\Delta p}{p}\right)_{\text{max}} \cos(\nu_{\text{syn}}\phi)$, описывающего колебания спина в присутствии ВЧ полей:

$$\frac{d^2 S_z}{d\phi^2} + \left(\frac{e\bar{E}_x L_{\text{cir}}}{\pi mc^2 \gamma} \frac{1}{\gamma^2 - 1} \left(\frac{\Delta p}{p} \right)_{\text{max}} \times \right. \\ \left. \times \cos(\nu_{\text{syn}}\phi) \right)^2 \cdot S_z = 0. \quad (13)$$

Это уравнение описывает колебания маятника в быстро осциллирующем поле. Теперь, вместо осциллирующий с частотой ν_{sz} , спин колеблется в пределах узкого угла Φ_{max} с ВЧ частотой $\Phi \sim \Phi_{\text{max}} \sin(\nu_{\text{syn}}\phi)$. Величина $\Phi_{\text{max}} \sim (\nu_{sz}/\Omega_{\text{syn}})^2$ зависит от отношения частот. При отношении $\nu_{sz}/\Omega_{\text{syn}} \sim 1 : 150$ спиновая абберация составляет $\Phi_{\text{max}} \sim 10^{-4}$, что пренебрежимо мало.

Разложение второго порядка спин-тьюна относительно $\Delta p/p$. Из выражения (9) можно найти частоту колебаний спина во втором приближении относительно импульса:

$$\frac{d^2 S_x}{d\phi^2} + \frac{e\bar{E}_x L_{\text{cir}}}{2\pi mc^2 \gamma} \left[\frac{2}{\gamma^2 - 1} \left(\frac{\Delta p}{p} \right) - \frac{1 + 3\gamma^2}{\gamma^2} \frac{1}{\gamma^2 - 1} \left(\frac{\Delta p}{p} \right)^2 \right]^2 \cdot S_x = 0, \quad (14)$$

и при наличии ВЧ поля спин-тьюн имеет ненулевое среднее значение:

$$\bar{\nu}_{sz} = \frac{e\bar{E}_x L_{\text{cir}}}{2\pi mc^2 \gamma} \frac{1 + 3\gamma^2}{\gamma^2} \frac{1}{2} \frac{1}{\gamma^2 - 1} \left(\frac{\Delta p}{p} \right)_{\text{max}}^2. \quad (15)$$

Итак, во втором приближении спин действительно совершает быстрые колебания с синхротронной частотой относительно среднего положения, которое, в свою очередь, колеблется с очень низкой частотой $\bar{\nu}_{sz} \sim (\Delta p/p)^2$, определяемой средним значением (15).

Но даже для относительно малого разброса по импульсам $(\Delta p/p) \sim 10^{-4}$, простые оценки показывают, что время спиновой когерентности $\text{SCT} \sim 200$ с. Этот результат был проверен с помощью программы COSY Infinity [9], и хорошо согласуется с нашей аналитической оценкой. Анализируя выражения (5) и (7), можно заключить, что члены нелинейной спиновой хроматичности существуют только в электростатических дефлекторах. Это означает, что время спиновой когерентности в основном определяется электрическими дефлекторами. И в протонном, и в дейтронном кольцах источником спиновой хроматичности является только электростатическое поле E , а магнитное поле B не влияет на спиновую хроматичность.

Удлинение орбиты как источник спиновой декогерентности. Первые работы, посвященные влиянию длины орбиты на частоту спин-прецессии, были посвящены изучению этого эффекта с целью достижения точной настройки энергии частиц в электрон-позитронных коллайдерах [10]. В работе [11] анализировалось влияние бетатронной хроматичности на декогеренцию спина.

Теперь мы обсудим второй источник спиновой декогеренции в ускорителях, связанный с влиянием различной длины орбиты частиц на так называемую эффективную энергию, которая, в свою очередь, определяет спиновую частоту [12–14].

Основной “принцип синхронного ускорения” Векслера и Макмиллана сформулирован в виде системы уравнений:

$$\begin{cases} \frac{d\phi}{dt} = -\omega_{rf}\eta\delta, \\ \frac{d\delta}{dt} = \frac{eV_{rf}\omega_{rf}}{2\pi h\beta^2 E} \sin\phi. \end{cases} \quad (16)$$

Здесь $\delta = \Delta p/p$ есть относительное отклонение по импульсу от равновесного синхронного значения, $\Delta p = p - p_s$, ϕ есть отклонение по фазе от синхронного значения (нет ускорения в накопительном режиме), η есть слип-фактор, E – полная энергия, β есть нормализованная скорость, eV_{rf} – набор энергии за один оборот с напряжением на зазоре V_{rf} , $\omega_{rf} = 2\pi h f_{\text{rev}}$ есть угловая частота ВЧ поля, h – номер гармоники поля, $f_{\text{rev}} = 1/T_{\text{rev}}$ – частота обращения.

Первое уравнение системы (16) вытекает непосредственно из “принципа синхронного ускорения”: частица с меньшим временем обращения прилетает раньше и попадает в более раннюю фазу ВЧ поля:

$$\frac{\Delta\phi}{\phi} = -\frac{\Delta T_{\text{rev}}}{T_{\text{rev}}}. \quad (17)$$

В первом приближении изменение длины орбиты C относительно импульса определяется как $\Delta C/C = \alpha_0 \cdot \delta$, и можно записать:

$$\frac{\Delta T_{\text{rev}}}{T_{\text{rev}}} = \frac{\Delta(C/v)}{C/v} = \frac{\Delta C}{C} - \frac{\Delta v}{v} = \left(\alpha_0 - \frac{1}{\gamma^2}\right). \quad (18)$$

Слип-фактор $\eta = \alpha_0 - 1/\gamma^2$ вводится как соотношение между отклонениями по времени обращения и импульсу:

$$\frac{\Delta T_{\text{rev}}}{T_{\text{rev}}} = \eta \cdot \delta. \quad (19)$$

Очевидно, что в случае сбанчиванного пучка среднее за одно синхротронное колебание изменение времени обращения равно нулю. В первом приближении это следует из решения системы (16). Однако с использованием разложения более высокого порядка коэффициента сжатия орбит $\alpha = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot \delta$ и отклонения по скорости $(v_s + \Delta v)^{-1} = v_s^{-1} \left[1 - \Delta v/v_s + (\Delta v/v_s)^2 - \dots\right]$ можно записать следующее выражение для отклонения по времени обращения:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta T_{\text{rev}}}{T_{\text{rev}}} &= \frac{\Delta C}{C} - \frac{\Delta v}{v_s} - \frac{\Delta C}{C} \frac{\Delta v}{v_s} + \left(\frac{\Delta v}{v_s}\right)^2 = \\ &= \left(\alpha_0 - \frac{1}{\gamma^2}\right) \cdot \delta + \left(\alpha_1 + \frac{3}{2} \frac{\beta^2}{\gamma^2} - \frac{\alpha_0}{\gamma^2} + \frac{1}{\gamma^4}\right) \cdot \delta^2. \end{aligned} \quad (20)$$

Кроме того, мы должны учесть слагаемое, отвечающее за бетатронное удлинение орбиты $(\Delta L/L)_\beta$:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta T_{\text{rev}}}{T_{\text{rev}}} &= \left(\alpha_0 - \frac{1}{\gamma^2}\right) \cdot \delta + \\ &+ \left(\alpha_1 + \frac{3}{2} \frac{\beta^2}{\gamma^2} - \frac{\alpha_0}{\gamma^2} + \frac{1}{\gamma^4}\right) \delta^2 + \left(\frac{\Delta L}{L}\right)_\beta. \end{aligned} \quad (21)$$

Следовательно, уравнения для продольного движения могут быть записаны в форме:

$$\begin{cases} \frac{d\phi}{dt} = -\omega_{rf} \left[\left(\alpha_0 - \frac{1}{\gamma^2}\right) \cdot \delta + \right. \\ \left. + \left(\alpha_1 + \frac{3}{2} \frac{\beta^2}{\gamma^2} - \frac{\alpha_0}{\gamma^2} + \frac{1}{\gamma^4}\right) \cdot \delta^2 + \left(\frac{\Delta L}{L}\right)_\beta \right], \\ \frac{d\delta}{dt} = \frac{eV_{rf}\omega_{rf}}{2\pi h\beta^2 E} \sin \phi. \end{cases} \quad (22)$$

Предположим, что $\phi \ll 1$, что соответствует $\cos \phi \sim 1$, и на основании системы (22) запишем уравнение для отклонения по импульсу δ :

$$\begin{aligned} \frac{d^2\delta}{dt^2} + \frac{eV_{rf}\omega_{rf}}{2\pi h\beta^2 E} \left(\alpha_0 - \frac{1}{\gamma^2}\right) \cdot \delta &= -\frac{eV_{rf}\omega_{rf}}{2\pi h\beta^2 E} \times \\ &\times \left[\left(\alpha_1 + \frac{3}{2} \frac{\beta^2}{\gamma^2} - \frac{\alpha_0}{\gamma^2} + \frac{1}{\gamma^4}\right) \cdot \delta^2 + \left(\frac{\Delta L}{L}\right)_\beta \right]. \end{aligned} \quad (23)$$

Из (21) следует, что среднее значение $\overline{\Delta T_{\text{rev}}/T_{\text{rev}}} \neq 0$, и определяется $\alpha_0, \alpha_1, \gamma$ и $\left(\frac{\Delta L}{L}\right)_\beta$:

$$\frac{\overline{\Delta T_{\text{rev}}}}{T_{\text{rev}}} = \left(\alpha_1 + \frac{3}{2} \frac{\beta^2}{\gamma^2} - \frac{\alpha_0}{\gamma^2} + \frac{1}{\gamma^4}\right) \cdot \overline{\delta^2} + \left(\frac{\Delta L}{L}\right)_\beta. \quad (24)$$

Как следует из уравнения (23), удлинение орбиты приводит к повышению равновесного уровня импульса, чтобы соответствовать основному “принципу синхронного ускорения”. Решая (23) с помощью асимптотических методов [15], мы можем определить влияние бетатронных колебаний, квадратичного члена фактора сжатия орбит α_1 и слип-фактора η на сдвиг равновесного уровня энергии $\Delta\delta_{eq}$:

$$\begin{aligned} \Delta\delta_{eq} &= \frac{\gamma_s^2}{\gamma_s^2\alpha_0 - 1} \left[\frac{\delta_m^2}{2} \left(\alpha_1 + \frac{3}{2} \frac{\beta_s^2}{\gamma_s^2} - \frac{\alpha_0}{\gamma_s^2} + \frac{1}{\gamma_s^4}\right) + \right. \\ &\left. + \left(\frac{\Delta L}{L}\right)_\beta \right]. \end{aligned} \quad (25)$$

Из выражения (25) следует, что равновесная энергия различна для каждой частицы в сгустке. Этот уровень энергии, относительно которого колеблется частица, мы называем эффективной энергией.

В качестве примера представлены результаты расчета COSY Infinity [9] в электростатическом кольце (см. рис. 1), где равновесный уровень энергии по-

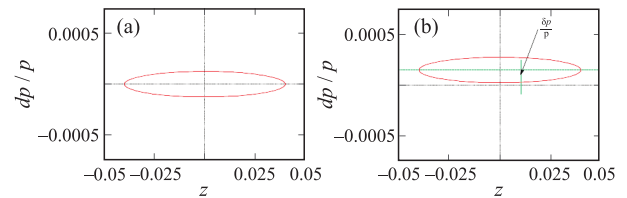


Рис. 1. (Цветной онлайн) Фазовая траектория в продольной плоскости для начальных координат $x = 0$, $y = 0$ (a) и $x = 3$ мм, $y = 0$ (b); начальное отклонение $dp/p = 1.2 \cdot 10^{-4}$

выпадает за счет бетатронного движения. В то же время из-за ненулевого коэффициента сжатия орбит второго порядка $\alpha_1 \neq 0$ фазовые траектории теряют симметрию в продольной плоскости по направлению импульса, что приводит к смещению равновесного значения импульса.

Бетатронное движение. Ниже мы определим параметры α_0, α_1 и $(\frac{\Delta L}{L})_\beta$, основываясь на простых геометрических соображениях. Считаем, что удлинение орбиты может происходить из-за относительного отклонения по импульсу δ и бетатронных осцилляций $(\frac{\Delta L}{L})_\beta$. Сначала рассмотрим случай удлинения орбиты из-за бетатронных осцилляций. Предположим, что частица характеризуется параметрами (x_β, x'_β) в конкретный момент времени. Из-за большего радиуса $\rho + x_\beta$ орбита удлиняется на фактор $(\rho + x_\beta)/\rho$ и, благодаря x'_β , удлиняется на фактор $1/\cos(x'_\beta)$. Вместе с вертикальным движением фактор удлинения есть $1/\cos\theta$, где $\theta = \sqrt{x_\beta'^2 + y_\beta'^2}$. Следовательно, удлинение орбиты из-за бетатронных осцилляций есть:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\Delta L}{L}\right)_\beta &= \frac{1}{L} \oint \left(\frac{\rho + x_\beta}{\rho \cos\theta} - 1\right) ds = \\ &= \frac{1}{L} \oint \left(\frac{x_\beta}{\rho} + \frac{x_\beta'^2 + y_\beta'^2}{2}\right) ds. \end{aligned} \quad (26)$$

Так как $\langle \frac{x_\beta}{\rho} \rangle = 0$, $\langle x_\beta'^2 \rangle = \frac{1}{2} \langle \frac{\epsilon_x}{\beta_x} \rangle$, $\langle y_\beta'^2 \rangle = \frac{1}{2} \langle \frac{\epsilon_y}{\beta_y} \rangle$, и $\langle 1/\beta_{x,y} \rangle = \nu_{x,y}/\bar{R}$, удлинение орбиты благодаря бетатронному движению есть:

$$\left(\frac{\Delta L}{L}\right)_\beta = \frac{\pi}{2L} [\epsilon_x \nu_x + \epsilon_y \nu_y]. \quad (27)$$

Отклонение по импульсу. Вернемся к вопросу удлинения орбиты из-за отклонения по импульсу. Сперва определим линейную и угловую дисперсию:

$$\begin{aligned} D(s, \delta) &= D_0(s) + D_1(s) \cdot \delta; \\ D'(s, \delta) &= D'_0(s) + D'_1(s) \cdot \delta. \end{aligned} \quad (28)$$

В произвольной точке вдоль $ds = \rho d\theta$:

$$\begin{aligned} dl_1 &= (\rho + D_0 \cdot \delta + D_1 \cdot \delta^2) d\theta = \\ &= \left(1 + \frac{D_0}{\rho} \cdot \delta + \frac{D_1}{\rho} \cdot \delta^2\right) ds, \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} dl_2 &= dl_1 \sqrt{1 + (D'_0 \delta)^2} = \left(1 + \frac{D_0}{\rho} \cdot \delta + \frac{D_1}{\rho} \cdot \delta^2\right) \times \\ &\times \left(1 + \frac{1}{2} (D'_0 \delta)^2\right) ds. \end{aligned} \quad (30)$$

В результате мы имеем:

$$l_2 = \oint \left[1 + \frac{D_0}{\rho} \cdot \delta + \left(\frac{D_1}{\rho} + \frac{1}{2} D_0'^2\right) \cdot \delta^2\right] ds. \quad (31)$$

Следовательно, удлинение орбиты благодаря отклонению по импульсу есть:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta C}{C} &= \frac{l_2 - C}{C} = \alpha_0 \delta + \alpha_1 \delta^2 + \dots; \\ \alpha_0 &= \left\langle \frac{D_0}{\rho} \right\rangle; \quad \alpha_1 = \left\langle \frac{D_1}{\rho} \right\rangle + \frac{1}{2} \langle D_0'^2 \rangle. \end{aligned} \quad (32)$$

В итоге мы получим выражение для отклонения равновесных уровней энергии из-за бетатронного движения и ненулевого нелинейного коэффициента сжатия орбит:

$$\begin{aligned} \Delta\delta_{eq} &= \frac{\gamma_s^2}{\gamma_s^2 \alpha_0 - 1} \left[\frac{\delta_m^2}{2} \left(\alpha_1 + \frac{3}{2} \frac{\beta_s^2}{\gamma_s^2} - \frac{\alpha_0}{\gamma_s^2} + \frac{1}{\gamma_s^4} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\pi}{2L} (\epsilon_x \nu_x + \epsilon_y \nu_y) \right]. \end{aligned} \quad (33)$$

Рассмотрим на примере магнитного кольца, как удлинение орбиты влияет на декогеренцию спина в ускорителе. Как мы знаем, спин-тьюн $\nu_s = \gamma G$ в магнитном накопителе. Если отклонение равновесного уровня энергии $\Delta\gamma_{eq}$ зависит от параметров частиц, разброс частот спин-прецессии за N_t оборотов составляет:

$$2\pi \langle \Delta\nu_s \rangle = 2\pi G \langle \Delta\gamma_{eq} \rangle N_t. \quad (34)$$

Разброс частот спин-прецессии уменьшает время спиновой когерентности. Например, рассмотрим случай, когда время спиновой когерентности ограничено 1000 с ($\sim 10^9$ оборотов), и $\langle \Delta\gamma_{eq}/\gamma \rangle < 1 \text{ рад}/2\pi\gamma G N_t = 7 \cdot 10^{-11}$. Тогда, используя выражение (33), мы можем найти ограничение по разбросу по импульсам:

$$\langle \delta_m^2 \rangle < \left\langle \frac{\Delta\gamma_{eq}}{\gamma} \right\rangle \cdot \frac{2}{\beta^2} \cdot \frac{\gamma_s^2 \cdot (\gamma_s^2 \alpha_0 - 1)}{\gamma_s^4 \alpha_1 + \frac{3}{2} \beta_s^2 \gamma_s^2 - \gamma_s^2 \alpha_0 + 1}. \quad (35)$$

Например, для ускорителя COSY $\alpha_0 = 0.2$, $\gamma_s = 1.248$, $\alpha_1 = 2$. Пренебрежем вкладом бетатронного движения ($\epsilon_{x,y} \sim 0$), тогда среднеквадратичный разброс по импульсам не должен превышать величину $\langle \delta_m \rangle < 10^{-5}$. Уменьшая коэффициент сжатия орбит второго порядка до $\alpha_1 = 0.01$, получим $\langle \delta_m \rangle < 2 \cdot 10^{-5}$. Для полного исключения влияния разброса по импульсам на удлинение орбит выражение для $\Delta\delta_{eq}$ в уравнении (25) должно равняться нулю:

$$\alpha_1 + \frac{3}{2} \frac{\beta_s^2}{\gamma_s^2} - \frac{\alpha_0}{\gamma_s^2} + \frac{1}{\gamma_s^4} = 0. \quad (36)$$

Теперь оценим ограничение на величину эмиттанса:

$$\epsilon_{x,y}^{rms} < \left\langle \frac{\Delta\gamma_{eq}}{\gamma} \right\rangle \cdot \frac{1}{\beta_s^2} \cdot \frac{\gamma_s^2 \alpha_0 - 1}{\gamma_s^2} \cdot \frac{2L}{\pi \nu_{x,y}}. \quad (37)$$

Для ускорителя COSY предположим, что $\langle \delta_m \rangle \ll 10^{-5}$, тогда эмиттансы должны быть $\epsilon_{x,y}^{rms} < 1.4 \text{ мм} \cdot \text{мрад}$. Следовательно, мы можем заключить, что вклад в спиновую декогеренцию одинаков для $\epsilon_{x,y}^{rms} \approx 1 \text{ мм} \cdot \text{мрад}$ и $\delta_{rms} \approx 10^{-5}$.

Влияние спиновых резонансов на разброс частот спиновых колебаний. В упомянутых выше результатах по оптимизации SCT было показано, что в отсутствие спиновых резонансов спиновая декогеренция может быть полностью объяснена сдвигом равновесного уровня энергии. Для частиц, совершающих движение в вертикальной плоскости, на разброс частот спиновых колебаний дополнительно влияют спиновые резонансы [16]. Последние приводят к дополнительным зависящим от положения в фазовом пространстве/когерентным спин-кикам и, наконец, также влияют на SCT. Оба эти эффекта необходимо учитывать для оптимизации SCT пучка.

Внутренние резонансы представлены даже в машине без ошибок выставки элементов, характеризующей периодичностью P для $\gamma G = KP \pm Q_y$, $K \in \mathbb{Z}$. Они вызваны спиновым возмущением из-за вертикального бетатронного движения. Резонансы несовершенств возникают при целых значениях спин-тьюна из-за возмущения спина на несовершенной замкнутой орбите.

Сравнивая поляризованные протонные машины с дейтронными, можно отметить, что высокое соотношение аномальных магнитных моментов протона и дейтрона $G_p/G_d \sim 13$ означает быструю спиновую декогеренцию протона и высокую чувствительность к спиновым резонансам. Последнее также объясняется уменьшением расстояния между резонансами с шагом по энергии $\Delta\gamma \sim 1/G$.

Один из способов предсказать влияние спиновых резонансов на SCT — сначала рассчитать их силу.

Силы внутренних резонансов, ϵ , можно рассчитать, используя определение: $\epsilon = 1/N_{\text{flip}}$, где N_{flip} — количество оборотов, за которое спин совершает полный поворот от начального вертикального направления. Энергия частицы должна быть фиксированной и равной резонансному значению. В этой ситуации инвариантная ось вращения $\mathbf{n}$ лежит в плоскости кольца.

Силы целочисленных резонансов можно рассчитать как Фурье гармоники спиновых возмущений, вызванных горизонтальными полями на замкнутой орбите:

$$\epsilon_K = \frac{1}{2\pi} (1 + G\gamma) \oint \frac{1}{\chi_m} \frac{\partial B_x}{\partial y} y e^{iK\theta} dz. \quad (38)$$

Результат может быть верифицирован с помощью спин-трекинга.

Для одиночного резонанса Q_i отклонение спин-тьюна $\Delta\nu_s$ при отстройке $\delta = Q_i - \nu_0$ можно оценить для известного значения силы ϵ_i :

$$\Delta\nu_s(\nu_0) = \delta - \text{sign}(\delta) \cdot \sqrt{\delta^2 + \epsilon_i^2}. \quad (39)$$

Используя оценку $\epsilon_i \sim 10^{-3}$ для накопителя в диапазоне ГэВ [16] с частотой обращения $f_{\text{rev}} \sim 1 \text{ МГц}$, мы можем предсказать разброс частот спин-прецессии $\Delta f_s = \Delta\nu_s \cdot f_{\text{rev}}$. Для предполагаемой отстройки от резонанса $|\delta| = 0.1$ получим, что $\Delta\nu_s \sim 5 \cdot 10^{-6}$. Пусть SCT есть $\tau \sim 1/\Delta f_s$, тогда $\tau \sim 0.2 \text{ с}$. Эта оценка соответствует предварительным экспериментальным результатам, полученным в ходе сеансов на ускорителе COSY с протонами энергии $\gamma G = 2.06$. Данная величина SCT не достаточна для проведения экспериментов по поиску ЭДМ, требующих $\tau \sim 1000 \text{ с}$.

Для получения высоких значений SCT необходимо изучить общую картину спиновых резонансов. Из предсказанных результатов для COSY (см. рис. 2) [14] очевидно, что точка, в которой частицы

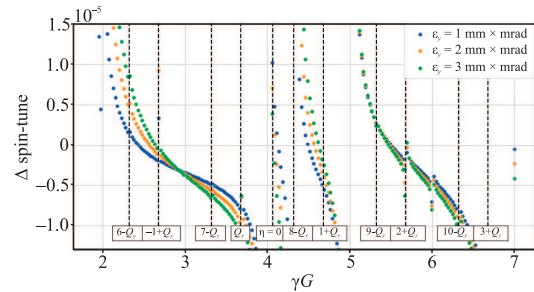


Рис. 2. (Цветной онлайн) Отклонения от референсного значения спин-тьюнов частиц с различными вертикальными бетатронными амплитудами для внутренних и целочисленных резонансов; вертикальная хроматичность $\xi_y = 0$. $\eta = 0$ есть точка нулевого спин-фактора без продольной группировки пучка

с разными бетатронными амплитудами имеют одинаковый спин-тьюн, является наиболее подходящей для эксперимента по поиску ЭДМ. Местоположение этой “точки пересечения” зависит от энергии пучка и для COSY соответствует $\gamma G \sim 3$. Аналогичные резонансные диаграммы можно получить и для других накопителей, чтобы предсказать необходимые параметры машины с точки зрения спиновой когерентности.

Заключение. Спиновая когерентность является ключевым свойством поляризованного пучка в экспериментах по поиску ЭДМ. Высокое SCT можно

получить, сначала группируя пучок с помощью ВЧ-резонатора, а затем выравнивая равновесные уровни энергии, сводя к минимуму разброс длин бета-тронных орбит для частиц в ступке и нелинейный коэффициент сжатия структуры. Эффективная равновесная энергия является скалярной характеристикой спинового движения пучка с распределением в 6D фазовом пространстве. Для достижения высоко-го SCT она должна быть одинаковой для всех частиц в пучке. Это видно из решения нелинейных уравнений продольного движения.

Спиновые резонансы действуют как еще один источник спиновой декогеренции. Их влияние необходимо учитывать особенно для протонного пучка во всем энергетическом диапазоне накопителя.

Исследование выполнено при поддержке гранта Российского научного фонда # 22-42-04419, <https://rscf.ru/project/22-42-04419/>.

1. M. Aguilar, G. Alberti, B. Alpat et al. (AMS collaboration), *Phys. Rev. Lett.* **110**, 141102 (2013).
2. A. Sakharov, *Pis'ma v ZhETF* **5**, 24 (1967) [A. Sakharov, *JETP Lett.* **5**, 24 (1967)].
3. F. J. M. Farley, K. Jungmann, J. P. Miller, W. M. Morse, Y. F. Orlov, B. L. Roberts, Y. K. Semertzidis, A. Silenko, and E. J. Stephenson, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 052001 (2004).
4. D. Anastassopoulos, V. Anastassopoulos, D. Babusci et al. (Collaboration), BNL Report, Brookhaven (2008).
5. F. Abusaif, A. Aggarwal, A. Aksentev et al. (CPEDM collaboration), CERN Yellow Reports: Monographs, 2021-003, CERN, Geneva (2021).
6. G. Guidoboni, E. Stephenson, S. Andrianov et al. (JEDI collaboration), *Phys. Rev. Lett.* **117**, 054801 (2016).
7. Yu. Senichev, A. Lehrach, R. Maier, and D. Zyuzin, in *Proc. IPAC2011*, San Sebastián, Spain (2011), p. 2175.
8. A. P. Lysenko, A. A. Polunin, and Y. M. Shatunov, *Part. Accel.* **18**, 215 (1986).
9. COSY Infinity, <http://cosyinfinity.org>.
10. J. Wenninger, preprint CERN SL-note 97-06 OP, CERN, Geneva (1997).
11. I. A. Koop and Ju. M. Shatunov, in *Proc. EPAC1988*, Rome, Italy (1988), p. 738.
12. Yu. Senichev, R. Maier, and D. Zyuzin, in *Proc. IPAC2013*, Shanghai, China (2013), p. 2579.
13. A. A. Melnikov, A. E. Aksentyev, Yu. V. Senichev, and E. Syresin, in *Proc. IPAC-22*, Bangkok, Thailand (2022), p. 1832.
14. A. A. Melnikov, A. E. Aksentyev, Y. Senichev, and S. Kolokolchikov, in *Proc. IPAC'23*, Venezia, Italy (2023), p. 2350.
15. N. Bogolyubov and Yu. Mitropolsky, *Asymptotic Methods in the Theory of Non-Linear Oscillations*, Hindustan Publishing Corpn., Delhi (1961).
16. S. Y. Lee, *Spin Dynamics and Snakes in Synchrotrons*, World Scientific, New Jersey (1997).