

## РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТРАНЗИТНЫХ ЭКЗОПЛАНЕТ ПО МАССАМ С УЧЕТОМ ФАКТОРОВ НАБЛЮДАТЕЛЬНОЙ СЕЛЕКЦИИ

© 2019 г. А. Е. Иванова<sup>1,2\*</sup>, В. И. Ананьева<sup>2</sup>, А. А. Венкстерн<sup>2</sup>, И. А. Шашкова<sup>2</sup>, А. В. Юдаев<sup>3</sup>, А. В. Тавров<sup>2,3</sup>, О. И. Кораблев<sup>2</sup>, Ж.-Л. Берто<sup>2,4</sup>

<sup>1</sup>Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

<sup>2</sup>Институт космических исследований РАН, Москва, Россия

<sup>3</sup>Московский физико-технический институт ГУ, Москва, Россия

<sup>4</sup>Лаборатория атмосферных и космических исследований, Гуйанкур, Франция

Поступила в редакцию 18.02.2019 г.; после доработки 31.07.2019 г.; принята к публикации 13.08.2019 г.

Распределение транзитных экзопланет по массам было скорректировано с учетом факторов наблюдательной селекции, а именно: с учетом вероятности определения массы (для планет, обнаруженных космическим телескопом “Кеплер”) и с учетом вероятности транзитной конфигурации. Скорректированное распределение экзопланет по массам может быть аппроксимировано степенным законом с показателем степени  $-2_{-0.16}^{+0.1}$ :  $\frac{dN}{dm} \propto m^{-2_{-0.16}^{+0.1}}$ . Выявлены два минимума, соответствующие 0.3–0.7 массам Юпитера и 4–7 массам Юпитера.

*Ключевые слова:* экзопланеты, распределение планет по массам, наблюдательная селекция.

DOI: 10.1134/S0320010819100048

### ВВЕДЕНИЕ

Исследование распределения экзопланет по массам важно, например, для оценки распространенности каких-либо типов планет в Галактике, а также для уточнения моделей формирования планет. Для получения распределения экзопланет по массам важно учитывать факторы наблюдательной селекции. Эти факторы различаются для разных методов обнаружения экзопланет, а также для данных наблюдений, полученных наземными транзитными наблюдательными программами и космическим телескопом “Кеплер”. Для построения распределения транзитных планет по массам, экзопланеты, открытые космическим телескопом “Кеплер” и наземными наблюдательными программами (SuperWASP, HATNet, KELT, XO, TrES и др.), были рассмотрены отдельно. Данные об экзопланетах были взяты из NASA Exoplanet Archive (2018)<sup>1</sup>.

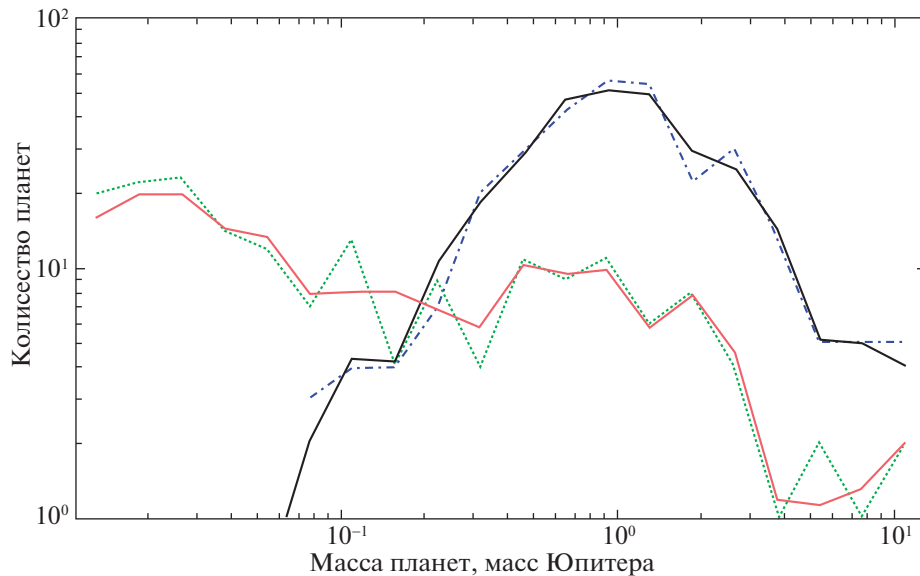
Транзитная экзопланета проходит по диску своей родительской звезды, что позволяет определить угол наклона  $i$  ее орбиты. Таким образом, возможно определить истинную массу  $m$  планеты, из произведения  $m^* \sin i$ , полученного методом измерений

лучевых скоростей родительской звезды Перриман (2011). Наблюдения космического телескопа “Кеплер” проводились за пределами земной атмосферы, и его высокая фотометрическая точность позволяла обнаруживать транзитные планеты, радиус которых составляет один радиус Земли (и даже меньше). При наземных наблюдениях сложно обнаружить экзопланеты с радиусом меньше 6–7 земных радиусов. Измеренные массы планет, открытых космическим телескопом “Кеплер”, лежат в диапазоне от 0.011 до 13 масс Юпитера. Массы планет, обнаруженные наземными транзитными наблюдательными программами, находятся в диапазоне от 0.02 до 13 масс Юпитера. Для настоящего анализа мы объединяем транзитные экзопланеты, обнаруженные европейским космическим телескопом CoRoT (COncvection ROTation and planetary Transits), с экзопланетами, найденными наземными средствами, поскольку малое количество планет размером с Нептун или меньше, найденное этим телескопом, указывает на его низкую эффективность в поиске планет за пределами размерного класса гигантов.

В предыдущие годы уже проводились исследования распределения масс экзопланет. Например, в ходе анализа 167 планет, обнаруженных методом лучевых скоростей, Батлер и др. (2006) показали,

\*Электронный адрес: [ae.ivanova@students.cosmos.msu.ru](mailto:ae.ivanova@students.cosmos.msu.ru)

<sup>1</sup> <https://exoplanetarchive.ipac.caltech.edu/>



**Рис. 1.** Точечная линия (зеленая) показывает распределение планет “Кеплера”, с измеренной массой, сплошная линия (красная) — сглаженное распределение с учетом погрешностей измерения масс методом KDE с гауссовым окном. Пунктирная линия (синяя) показывает распределение транзитных планет, открытых наземными наблюдательными программами и миссией CoRoT, сплошная линия (черная) — то же, но сглажено с учетом погрешностей в определении масс.

что распределение проективных масс аппроксимируется степенным законом  $\frac{dN}{dm} \propto m^{-1.1}$ . Говард и др. (2010) обнаружили другой степенной закон с показателем степени  $m^{-0.48}$ , проанализировав 166 звезд с точностью измерений лучевых скоростей порядка 1 м/с. Для этого анализа авторы учли фактор наблюдательной селекции completeness of the survey, аналогичный Ананьева и др. (2019). Камминг и др. (2008) аппроксимировали массовое распределение в зависимости от орбитального периода  $P$ . Авторы рассмотрели 182 экзопланеты и сослались на фактор наблюдательной селекции completeness of the survey, аналогичного Говард и др. (2010). Говард (2013) согласился с результатами Камминг и др. (2008). Марси и др. (2005) рассмотрели 104 экзопланеты (из 152 открытых к тому моменту), найденных наблюдательными программами на обсерваториях Lick и Кеск и имеющих примерно постоянную RV точность, равную 3 м/с, по которой авторы избежали наблюдательной селекции, используя однородные данные. Результат данного анализа:  $\frac{dN}{dm} N \propto m^{-1.0}$ .

На рис. 1 показаны два распределения по массам транзитных экзопланет, известных на данный момент (данные о планетах были взяты из NASA Exoplanet Archive, 2018), оба распределения были построены без учета факторов наблюдательной селекции. Массовое распределение экзопланет, открытых Кеплером, показано зеленой (точечной) линией, а открытых наземными транзитными

наблюдательными программами и CoRoT — синей (пунктирной) линией. Также мы учли погрешности измерения масс экзопланет (был использован стандартный KDE метод (см. Приложение) с Гауссовским профилем), сглаженные распределения показаны красной (сплошной) и черной (сплошной) линиями соответственно. Очевидно, что оба распределения должны иметь похожую форму, однако это не так. Одной из причин этого расхождения является то, что оба распределения подвержены факторам наблюдательной селекции. Цель данной статьи — показать, что оба распределения сближаются, когда учтены факторы наблюдательной селекции.

#### ФАКТОР ОПРЕДЕЛЕНИЯ МАССЫ ДЛЯ ЭКЗОПЛАНЕТ, ОБНАРУЖЕННЫХ “КЕПЛЕРОМ”

Распределение по массам экзопланет, найденных космическим телескопом “Кеплер”, искажено факторами наблюдательной селекции. Массы планет-гигантов измерить проще, чем массы небольших планет (нептуну и суперземли). Доля планет с измеренной массой относительно общего числа планет, найденных “Кеплером”, близка к единице в области планет гигантов, однако эта доля резко падает до 2–3% для планет радиусами 0.1–0.3 радиуса Юпитера. Мы разделили полный диапазон радиусов планет “Кеплер” простирающийся от 0.08 до 2 радиусов Юпитера, на 25 интервалов, равных в логарифмическом масштабе, причем для

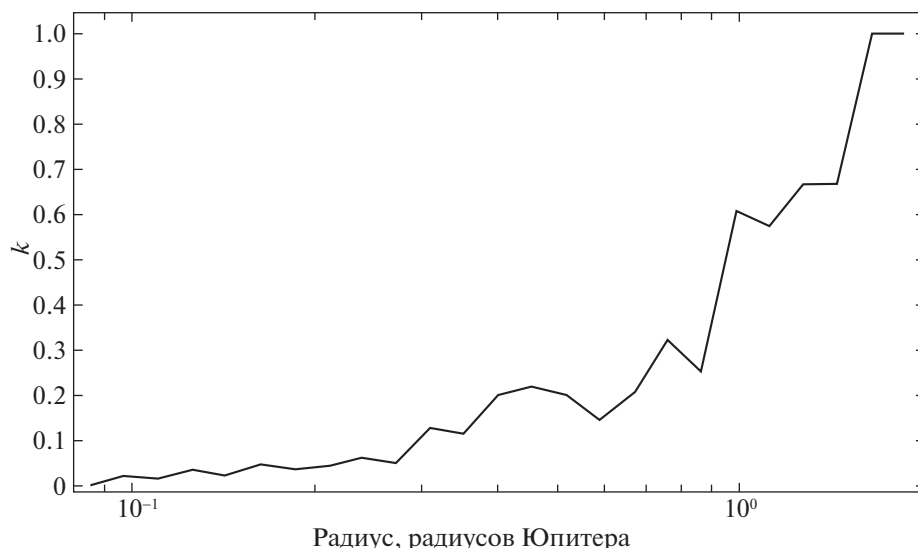


Рис. 2. Коэффициент измеренности массы  $k$  планет “Кеплера” в зависимости от радиуса планеты.

каждого интервала был введен коэффициент измеренности массы, обозначенный буквой  $k$ . Этот коэффициент описывает отношение числа планет “Кеплера” с измеренной массой к общему числу планет, обнаруженных “Кеплером”, в зависимости от радиуса. Зависимость  $k$  от радиуса показана на рис. 2.

Чтобы учесть фактор наблюдательной селекции, связанный с неравномерностью в измерении масс планет (с различной массой и размером), мы взяли каждую планету с измеренной массой со статистическим весом, обратно пропорциональным  $k$ . В результате начальное массовое распределение планет “Кеплер”, показанное красной сплошной линией на рис. 1, значительно изменяется, переходя в зависимость, показанную красной сплошной линией на рис. 3. Скорректированное с учетом наблюдательной селекции распределение имеет вид прямой линии в логарифмическом масштабе. Эту зависимость можно аппроксимировать степенным законом. Методом наименьших квадратов был вычислен показатель степени, который имеет значение  $-1.9(\frac{dN}{dm} \propto m^{-1.9})$ . Мы исключили из рассмотрения крайнюю левую точку (см. рис. 3, распределение планет “Кеплера” — красная сплошная и розовая пунктирная линии), так как она принадлежит области, в которой данные “Кеплера” становятся неполными (Петигура и др., 2013).

Здесь и далее для статистической оценки схожести полученного распределения и прямой, заданной степенным законом, был применен критерий Колмогорова—Смирнова с уровнем значимости  $\alpha = 0.05$ . Критерий показал, что при выбранном уровне значимости полученное распределение и прямая, заданная степенным законом, относятся к одному распределению. Из чего можно сделать

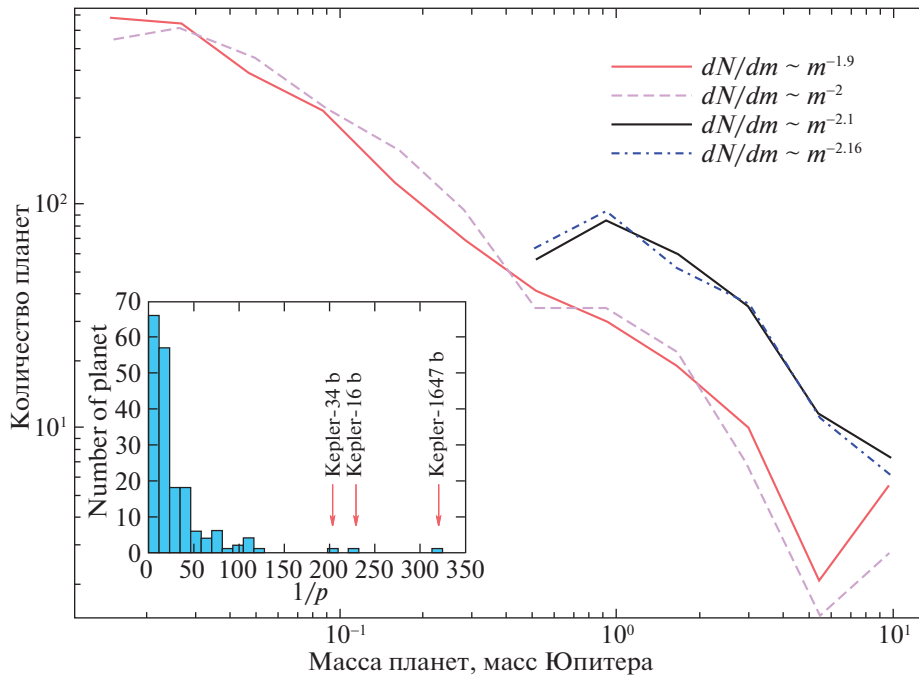
вывод о том, что полученное распределение удовлетворяет степенному закону.

### РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПЛАНЕТ “КЕПЛЕРА” ПО МАССАМ, СКОРРЕКТИРОВАННОЕ С УЧЕТОМ ВЕРОЯТНОСТИ ТРАНЗИТНОЙ КОНФИГУРАЦИИ

Для построения статистики распределения планет по массам, согласно Петигура и др. (2013), мы рассмотрели еще один фактор наблюдательной селекции, а именно: геометрическую вероятность транзитной конфигурации. Очевидно, что транзитный метод обнаруживает только планеты, которые для земного наблюдателя проходят по диску родительской звезды, т.е. планеты, наклон орбит которых находится в узком диапазоне около  $90^\circ$ . Подавляющее большинство планет не обнаруживаются этим методом. Пусть геометрическая вероятность транзитной конфигурации какой-либо транзитной экзопланеты равна  $p$  ( $p \ll 1$ ). Это означает, что количество таких планет равно  $1/p$ , при этом подавляющее большинство планет не являются транзитными и еще не обнаружены. Согласно Винн (2014), геометрическая вероятность транзитной конфигурации:

$$p = \left( \frac{r_* \pm r}{a} \right) \left( \frac{1 + e \sin \omega}{1 - e^2} \right), \quad (1)$$

где  $r_*$ ,  $r$  — радиус родительской звезды и радиус планеты соответственно,  $a$  — большая полуось орбиты планеты,  $e$  — эксцентриситет орбиты планеты,  $\omega$  — угол перигелия восходящего узла, “ $\pm$ ” описывает случай скользящего транзита “+”, или игнорирует его “-”.



**Рис. 3.** Распределение транзитных планет по массам с учетом факторов наблюдательной селекции. Красной сплошной линией показано распределение планет “Кеплер”, скорректированное с учетом коэффициента измеренности массы  $k$ . Черной сплошной линией показано распределение транзитных планет, обнаруженных наземными наблюдательными программами и миссией CoRoT (для них  $k = 1$ ). Розовой штриховой линией показано массовое распределение планет “Кеплера” как с учетом коэффициента определения массы  $k$ , так и с учетом геометрической вероятности транзитной конфигурации  $k_1$  (см. раздел 3). Синей штрихпунктирной линией показано распределение транзитных планет, обнаруженных наземными наблюдательными программами и миссией CoRoT с учетом геометрической вероятности транзитной конфигурации. Вкладка в правом верхнем углу показывает показатели степени приведенных распределений по массам, если их аппроксимировать степенным законом. На вкладке в левом нижнем углу показана гистограмма планет “Кеплера” с измеренной массой в зависимости от обратной вероятности транзитной конфигурации: Kepler-1647 b, Kepler-16 b, Kepler-34 b имеют непропорционально большие обратные вероятности.

Если радиус планеты намного меньше радиуса звезды  $r \ll r_*$ , а эксцентриситет орбиты близок к нулю  $e \approx 0$ , то уравнение (1) сводится к

$$p = \frac{r_*}{a}. \quad (2)$$

Вероятность транзитной конфигурации  $p$  для известных транзитных планет может сильно различаться. Например, для планеты Kepler-91 b с большой полуось орбиты, равной  $2.49 r_*$ , вероятность достигает  $p = 0.42$ , а для планеты Kepler-1647 b, большая полуось орбиты которой составляет  $2.721 \text{ AU} = 325.74 r_*$ , только  $0.003$ .

Связанный с этим фактор наблюдательной селекции может исказить массовое распределение транзитных планет, если это распределение зависит от среднего расстояния между планетой и звездой, так что наблюдаемое распределение транзитных планет будет отличаться от истинного статистического распределения. Чтобы учесть этот фактор, для каждой из транзитных планет был определен ее статистический вес  $k_1$ , обратно пропорциональный вероятности транзитной конфигу-

рации:

$$k_1 = \frac{1}{p} = \frac{a}{r_*}. \quad (3)$$

Распределение планет “Кеплера” по массам, скорректированное с учетом обоих факторов наблюдательной селекции — вероятности определения массы посредством коэффициента  $k$  и геометрической вероятности транзитной конфигурации посредством коэффициента  $k_1$  — показано на рис. 3 розовой штриховой линией. Для сравнения полученных зависимостей мы нормировали второе распределение таким образом, чтобы общее количество планет не изменилось. В следующем разделе обсуждается распределение по массам планет, открытых наземными наблюдениями и CoRoT, им соответствует синяя (штрихпунктирная) линия на рис. 3.

Скорректированное с учетом  $k$  и  $k_1$ , распределение по массам планет “Кеплера” может быть аппроксимировано степенной функцией с показателем  $-2$ :  $\frac{dN}{dm} \propto m^{-2}$ . Распределение по массам имеет два минимума: первый — в диапазоне масс

0.3–0.7 масс Юпитера (смещен относительно так называемой пустыни субсатурнов в сторону больших масс Ида, Лин (2010), Мордасини и др. (2009), второй минимум в диапазоне 4–7 масс Юпитера. Обсуждение этих минимумов выходит за рамки данной статьи.

Из итогового распределения планет “Кеплер”, полученного с учетом геометрической вероятности транзитной конфигурации, описываемой коэффициентом  $k_1$ , были исключены три планеты “Кеплер”, отмеченные на вкладке к рис. 3: Kepler-1647 b, Kepler-16 b и Kepler-34 b из-за их больших обратных вероятностей  $1/p$ : 325.74, 232.71, и 200.93 соответственно. Для большинства планет “Кеплера” значение  $1/p < 130$ . На вкладке рис. 3 представлена гистограмма планет “Кеплера” с измеренной массой в зависимости от обратной вероятности транзитной конфигурации  $1/p$ .

Несмотря на то что в полученной статистике видно, что пустыня суб-сатурнов в области 0.1–0.2 масс Юпитера отсутствует, для дополнительной проверки был использован критерий Колмогорова–Смирнова. Для проведения проверки была создана прямая с искусственным 1.7-кратным минимумом в области 0.1–0.2 масс Юпитера (Мордасини и др., 2009). Критерий показал, что присутствие данного минимума изменит распределение настолько, что при уровне значимости  $\alpha = 0.05$  полученное и исходные распределения будут статистически различными.

Также критерий Колмогорова–Смирнова был применен для оценки статистической схожести полученного распределения (см. рис. 3 розовая пунктирная линия) и степенного закона, полученного для распределения без учета вероятности транзитной конфигурации. Критерий показал, что полученное распределение не соответствует ранее полученному степенному закону, т.е. учет геометрической вероятности транзита важен и может отражать более сложные зависимости от радиуса орбиты, но явно эта зависимость не видна из-за неполной статистики.

После была проведена проверка статистической схожести для распределений, также полученных после учета одного фактора наблюдательной селекции и после учета обоих факторов наблюдательной селекции (см. рис. 3, красная сплошная и розовая пунктирная линии соответственно). Критерий показал, что учет вероятности транзитной конфигурации вносит статистически значимые изменения и распределения не являются статистически схожими. Также критерий Колмогорова–Смирнова был применен для распределения полученного после учета обоих факторов наблюдательной селекции и полученного для него степенного закона. Критерий показал статистическое соответствие распределения степенному закону. Для

статистической оценки значимости минимумов был применен критерий Колмогорова–Смирнова. Для применения критерия была искусственно создана прямая, совпадающая с исходной (см. рис. 3, розовая пунктирная линия), но без минимума в областях 0.3–0.7 масс Юпитера и 4–7 масс Юпитера. Значение критерия показало, что полученные минимумы не являются статистически значимыми при  $\alpha = 0.05$ .

#### РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПО МАССАМ ТРАНЗИТНЫХ ЭКЗОПЛАНЕТ, ОБНАРУЖЕННЫХ НАЗЕМНЫМИ НАБЛЮДЕНИЯМИ И CoRoT

Больше 300 транзитных экзопланет гигантов с измеренными массами были обнаружены наземными транзитными наблюдательными программами (SuperWASP, HATNet, KELT, XO, TrES, и другие), которые выполняли фотометрию звезд, используя автоматические (роботизированные) телескопы малой апертуры (10–25 см).

Наблюдения через турбулентную земную атмосферу и использование относительно небольшой апертуры ограничивают точность единичного фотометрического измерения величиной 0.1–0.3% (от величины светового потока звезды), что делает эти измерения менее чувствительными к планетам с  $r < 0.7$  радиуса Юпитера (обращающимся вокруг звезд солнечного типа). Наземные транзитные наблюдательные программы в основном оптимизированы для поиска горячих юпитеров. Наблюдаемое распределение транзитных планет по истинным массам  $N(m)$  мало искажено наблюдательной селекцией для планет с радиусами больше 0.7 радиуса Юпитера. Планеты с массами  $m > 0.5$  массы Юпитера имеют  $r > 0.7$  радиуса Юпитера. Для таких планет коэффициент определения масс близок к  $k = 1_{-0.02}$ . Транзитные планеты с массами  $m > 0.5$  массы Юпитера, обнаруженные наземными наблюдениями, имеют распределение по массам, показанное на рис. 3 сплошной (черной) линией, которая аппроксимируется степенным законом с показателем  $-2.1(\frac{dN}{dm} \propto m^{-2.1})$ , показатель степени был определен методом наименьших квадратов. После учета геометрической вероятности транзитной конфигурации с помощью коэффициента  $k_1$  (см. раздел 3), итоговое распределение (на рис. 3 показано синей пунктирно-точечной линией) аппроксимируется степенным законом с показателем степени  $-2.16(\frac{dN}{dm} \propto m^{-2.16})$ . Для статистической оценки схожести полученных распределений и прямой, заданной степенным законом, был применен критерий Колмогорова–Смирнова. Критерий показал, что при выбранном уровне значимости полученные распределения и прямая, заданная степенным законом, относятся к одному

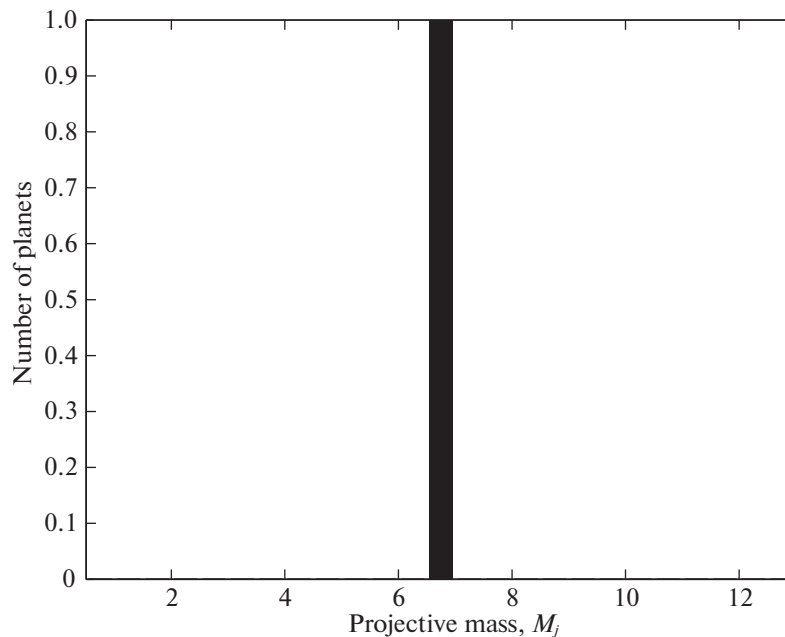


Рис. 4. Визуализация вклада экзопланеты в распределение без учета погрешностей.

распределению. Из чего можно сделать вывод о том, что полученное распределение удовлетворяет степенному закону.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследовано распределение по массам транзитных экзопланет, обнаруженных как космическим телескопом “Кеплер”, так и наземными наблюдательными программами. Учтены эффекты наблюдательной селекции. В частности, были предложены простые алгоритмы, которые скорректировали наблюдаемые распределения экзопланет с учетом факторов вероятности определения массы и вероятности транзитной конфигурации.

Неучет факторов наблюдательной селекции приводит к завышению числа массивных планет и уменьшению числа маломассивных планет.

В первом приближении распределение масс экзопланет хорошо описывается степенным законом с показателем степени  $-2^{+0.1}_{-0.16} \cdot \frac{dN}{dm} \propto m^{-2^{+0.1}_{-0.16}}$ . Степенной закон соблюдается как в области от 0.02 до 13 масс Юпитера для планет “Кеплер”, так и в области от 0.68 до 13 масс Юпитера для планет, обнаруженных наземными наблюдениями и CoRoT. Показатели степени были найдены методом наименьших квадратов. Результат  $-2^{+0.1}_{-0.16}$  различается с результатом, полученным Марси и др. (2005), Батлер и др. (2006). Это связано с тем, что на момент написания данной статьи были открыты новые планеты в области малых масс, тем самым дополнив статистику. Также Мордасини (2018) аппроксимирует ветвь зависимости от масс: до 0.1 масс

Юпитера — степенным законом с показателем  $-2$ , от 0.1 до 5 массы Юпитера — степенным законом с показателем степени  $-1$ , и от 5 масс Юпитера — степенным законом с показателем степени  $-2$ . Таким образом, понятно, почему показатель степени различается с ранними публикациями по зависимости  $N(m)$ . Отсутствие минимума пустыни суб-сатурнов, предсказанного Мордасини (2018), объясняет тот факт, что зафиксированные транзитные планеты пока не содержат долгопериодических планет, таких как планеты-гиганты в Солнечной системе, и тем самым имеют неполноту анализа. После учета геометрической вероятности транзитной конфигурации зависимость числа экзопланет от массы показывает два минимума в отклонении от степенного закона, обсуждение которых авторы выносят за рамки данной статьи. Указанные минимумы соответствуют областям 0.3–0.7 масс Юпитера и 4–7 масс Юпитера. Второй минимум соответствует границе, на которой механизм формирования планет-гигантов путем аккреции на ядро сменяется на формирование в результате гравитационной неустойчивости в протопланетном диске Засов, Постнов (2011). Аналогичный результат получили Сантос и др. (2017), которые строили массовое распределение экзопланет на основе базы данных SWEET-Cat database<sup>2</sup>, и нашли, что распределение имеет две ветви с минимумом около 4 масс Юпитера.

Авторы признательны Министерству высшего образования и науки РФ за поддержку по гранту

<sup>2</sup> <https://www.astro.up.pt/resources/sweet-cat/>

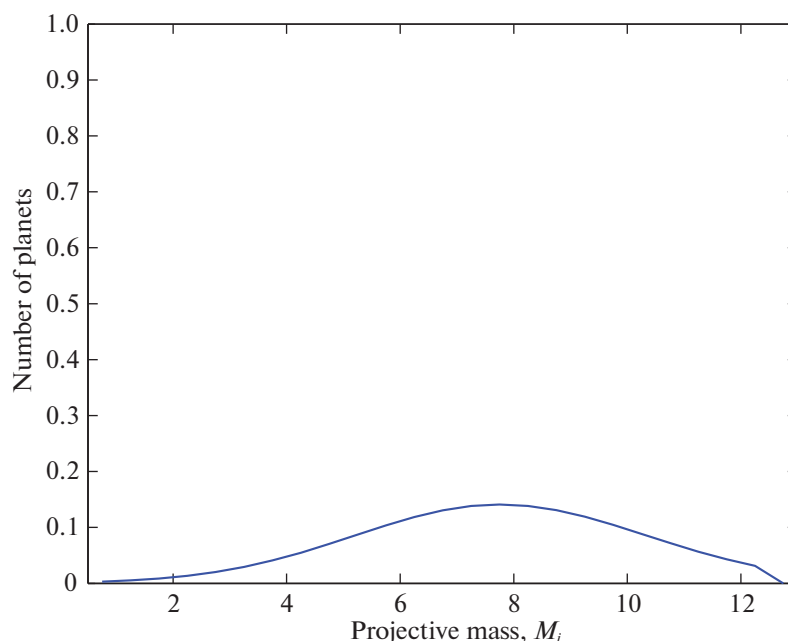


Рис. 5. Визуализация вклада экзопланеты в распределение с учетом погрешностей (скошенная гауссиана).

N14.W03.31.0017 и Российскому научному фонду за поддержку по гранту N18-19-00452.

### ПРИЛОЖЕНИЕ

KDE (Kernel Density Estimation) или Ядерная оценка плотности — это непараметрический способ оценки плотности случайной величины. Ядерная оценка плотности является задачей сглаживания данных, когда делается заключение о совокупности, основываясь на конечных выборках данных. Применение данного способа сглаживания для нашей статистики обосновано тем, что каждая планета имеет погрешности в измерении масс, и такой способ сглаживания позволяет нам учитывать данные погрешности. Использование же заключается в том, что каждая планета из выборки представляется в виде гауссианы, и, таким образом, она отображается в некотором количестве бинов гистограммы, в каждом из которых она имеет массу от 0 до 1, не включая правую границу. Похожие способы сглаживания были использованы в работе Джориссен и др. (2001) и в работе Ананьева и др. (2019).

Рассмотрим применение данного метода на примере конкретной экзопланеты HD 196067 b, она имеет массу  $m_{p-\sigma_-}^{+\sigma_+} = 6.9_{-1.1}^{+3.9}$ . Если не учитывать погрешности в измерении массы, то можно визуализировать вклад экзопланеты в общее распределение, как показано на рис. 4. Экзопланета представляет собой “столбик” единичной площади в интервале масс, соответствующем массе экзопланеты без погрешностей.

Если необходимо учитывать погрешности, и они равны, то планету удобно представлять в виде симметричной гауссианы с единичной площадью под кривой.

Если же погрешности различаются, то возможно применение скошенной гауссианы с единичной площадью под кривой. В таком случае экзопланета будет представлена в распределении, как показано на рис. 5. Погрешности равны:  $\sigma_+ = 3.9$ ,  $\sigma_- = -1.1$ .

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ананьева и др. (V.I. Ananyeva, A.A. Venkstern, D.V. Churbanov, I.A. Shashkova, A.V. Tavrov, O.I. Korablev, and J.-L. Bertaux), *Solar System Res.* **53**, 124137 (2019).
2. Батлер и др. (R.P. Butler, J.T. Wright, G.W. Marcy, D.A. Fischer, S.S. Vogt, C.G. Tinney, H.R.A. Jones, B.D. Carter, J.A. Johnson, C. McCarthy, and A.J. Penny), *Catalog of Nearby Exoplanets*, <https://arxiv.org/pdf/astro-ph/0607493.pdf> (2006).
3. Винн (J.N. Winn), *Transits and Occultations in Exoplanets* (Ed. S. Seager, Univer. Arizona Press, 2014), p. 526.
4. Говард (A.W. Howard), *Science* **340**(6132), 572; doi:10.1126/science.1233545 (2013).
5. Говард и др. (A.W. Howard, G.W. Marcy, J.A. Johnson, D.A. Fischer, J.T. Wright, H. Isaacson, J.A. Valenti, J. Anderson, D.N.C. Lin, and S. Ida), *Science* **330**(6004), 653; doi:10.1126/science.1194854 (2010).
6. Джориссен и др. (A. Jorissen et al.) *Astron. Astrophys.* **379**, 992; DOI: 10.1051/0004-6361:20011373 (2001).

7. Засов А.В., Постнов К.А. (A.V. Zasov and K.A. Postnov), *General Astrophysics. 2nd ed.* (Fryazino: Century 2, 576, ISBN 978-5-85099-188-3, 2011).
8. Ида, Лин (S. Ida and D.N.C. Lin), *Astrophys. J.* **604**(1), 388; doi:10.1086/381724 (2013).
9. Камминг и др. (A. Cumming, R.P. Butler, G.W. Marcy, S.S. Vogt, J.T. Wright, and D.A. Fischer), *Proceed. Astron. Soc. Pacific* **120**(867), 531; doi:10.1086/588487 (2008).
10. Марси и др. (G. Marcy, R.P. Butler, D. Fischer, S. Vogt, J.T. Wright, C.G. Tinney, and H.R.A. Jones), *Progress Theoretic. Phys. Suppl.* **158**, 24; doi.org/10.1143/PTPS.158.24 (2005).
11. Мордасини (C. Mordasini), *Planetary Population Synthesis, Handbook of Exoplanets* (Ed. H.J. Deeg, J.A. Belmonte); [https://doi.org/10.1007/978-3-319-30648-3\\_143-1](https://doi.org/10.1007/978-3-319-30648-3_143-1) (2018).
12. Мордасини и др. (C. Mordasini, Y. Alibert, W. Benz, H. Klahr, and T. Henning), *Astron. Astrphys.* **501**(3), 1161; doi:10.1051/0004-6361/200810697 (2009).
13. Перриман (M. Perryman), *The Exoplanet Handbook* (Cambridge Univer. Press, 2011), p. 103.
14. Петигура и др. (E.A. Petigura, A.W. Howard, and G.W. Marcy), *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **110**(48), 19273; doi:10.1073/pnas.1319909110 (2013).
15. Сантос и др. (N.C. Santos, V. Adibekyan, P. Figueira, D.T. Andreasen, S.C.C. Barros, E. Delgado-Mena, O. Demangeon, J.P. Faria, M. Oshagh, S.G. Sousa, P.T.P. Viana, and A.C.S. Ferreira), *Astron. Astrophys.* **603**, A30; doi:10.1051/0004-6361/201730761 (2017).
16. Ядерная оценка плотности (англ. Kernel Density Estimation, KDE)), KDE.
17. NASA Exoplanet Archive, <https://exoplanetarchive.ipac.caltech.edu/> (2018).
18. SWEET-Cat: a catalog of stellar parameters for stars with planets, <https://www.astro.up.pt/resources/sweet-cat/> (2018).