

О МЕХАНИЗМЕ ЛИНДЕН-БЕЛЛА ОБРАЗОВАНИЯ БАРОВ В ГАЛАКТИЧЕСКИХ ДИСКАХ

© 2020 г. Е. В. Поляченко^{1*}, И. Г. Шухман^{2**}

¹Институт астрономии РАН, Москва, Россия

²Институт солнечно-земной физики СО РАН, Иркутск, Россия

Поступила в редакцию 27.09.2019 г.

После доработки 13.11.2019 г.; принята к публикации 18.11.2019 г.

Один из возможных механизмов образования баров в дисках галактик был предложен Линден-Беллом (1979). В его основе лежит предполагаемое усиление слабого затравочного овального возмущения поверхностной плотности звезд в центральных областях галактики за счет выстраивания больших осей прецессирующих эллиптических орбит. Согласно его качественным рассуждениям, выстраивание орбит вдоль возмущения имеет место, если угловая скорость прецессии убывает с уменьшением углового момента при постоянном значении адиабатического инварианта. Используя строгий подход, основанный на нахождении устойчивых стационарных точек системы, мы показываем, что данное условие не является единственным, определяющим ориентацию выстраивания орбит. Существенными оказываются также направление прецессии орбиты в невозмущенном потенциале и скорость убывания амплитуды потенциала бара с радиусом. В некоторых случаях последние даже могут быть более важными.

Ключевые слова: звездные системы, звездная динамика.

DOI: 10.31857/S0320010819120052

ВВЕДЕНИЕ

Вопрос о механизмах образования и поддержания баров в центральных областях дисковых галактик является одним из ключевых вопросов динамики галактик. Сейчас считается общепринятым, что большинство из них является результатом развития неустойчивости бар-моды аксиально симметричного диска (Поляченко, Фридман, 1976; Бинни, Тримейн 2008; Селвуд, Уилкинсон, 1993). Это может быть справедливо также для галактик, имеющих в центре классический балдж (Поляченко и др., 2016). Однако данный механизм не является единственным из возможных.

Альтернативный и очень изящный подход к образованию баров был предложен Линден-Беллом (1979), который не опирается на представление о неустойчивости, возникающей в самосогласованной системе. Пусть имеется случайное нарушение аксиальной симметрии или внешний затравочный овальный потенциал. Если угловая скорость прецессии $\Omega_{\text{пр}}$ звездной орбиты в системе отсчета, вращающейся со скоростью овального возмущения

потенциала Ω_r , мала по сравнению с орбитальной угловой скоростью звезды, Ω ,

$$\frac{|\Omega_{\text{пр}}|}{\Omega} \ll 1, \quad (1)$$

то звезда чувствует потенциал, усредненный по орбите. Для такой орбиты в неаксиально-симметричном потенциале угловой момент L и радиальное действие звезды I не сохраняются, но сохраняется адиабатический инвариант $J_f = L/2 + I$. Линден-Белл обратил внимание, что если скорость прецессии орбиты $\Omega_{\text{пр}}$ уменьшается при уменьшении углового момента при фиксированном J_f , то большие оси эллипсов прецессирующих орбит могут оказаться *запертыми* в потенциале возмущения, тем самым его усиливая и формируя бар. В случае же, когда скорость прецессии растет с уменьшением углового момента, большие оси орбит будут стремиться выстроиться поперек возмущения, и тогда ожидать образования бара нельзя.

Ключевую роль в поддержании бара в механизме Линден-Белла играет знак производной угловой скорости прецессии по угловому моменту при фиксированном значении адиабатического инварианта J_f , т.е. $[\partial\Omega_{\text{пр}}(L, I)/\partial L]_{J_f}$. Эта величина получила в литературе название линден-белловской (ЛБ)

* Электронный адрес: epolyach@inasan.ru

** Электронный адрес: shukhman@iszf.irk.ru

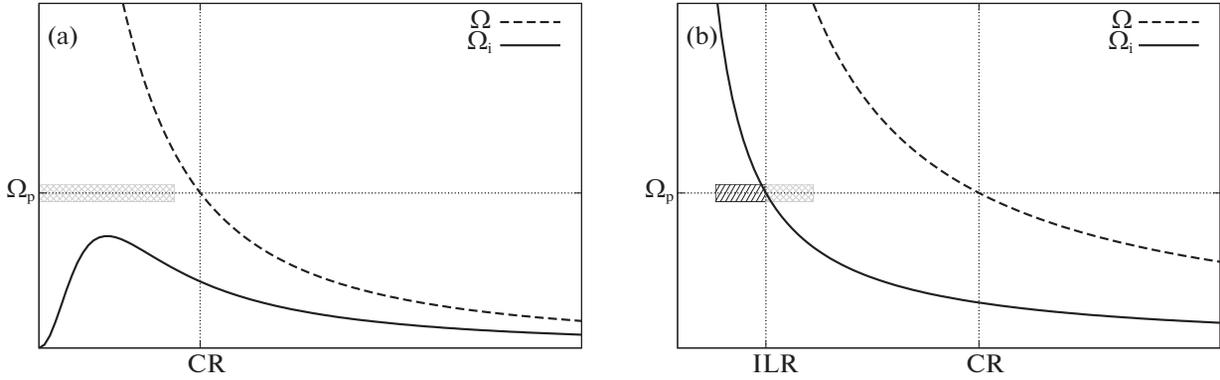


Рис. 1. Кривая вращения $\Omega(R)$ и кривая $\Omega_i(R)$ для моделей с несингулярным (а) и сингулярным (б) потенциалами в центре. Штриховые полосы показывают область применимости подхода, основанного на усреднении движения звезды по орбите.

производной, и она широко используется не только в литературе по динамике дисков, но и при обсуждении механизмов неустойчивости радиальных орбит (НРО) в сферических системах [см., например, дискуссию в статьях Поляченко, Поляченко и Шухмана (2015а) и Поляченко и Шухмана (2015b) и цитированные там работы]. Следует отметить, однако, что положительный знак ЛБ-производной в дисковых галактиках встречается довольно редко. Гораздо чаще имеет место противоположная ситуация, когда эта производная отрицательна. Поэтому орбиты с отрицательной ЛБ-производной называют *нормальными*, а с положительной ЛБ-производной — *аномальными*¹. Подчеркнем, что важность роли ЛБ-производной скорости прецессии жестко связана с условием (1), означающим медленность скорости прецессии в системе бара по сравнению с динамической частотой звезды. Однако такое условие может выполняться не всегда. Есть два очевидных случая, когда оно может быть выполнено.

Первый — когда угловая скорость вращения $\Omega(R)$ соответствует несингулярным в центре распределениям потенциала. В этом случае профиль

¹ В этом, кстати, отличие почти круговых орбит в дисках от почти радиальных орбит в сферических звездных системах, которые в основном являются аномальными. Аномальность почти радиальных орбит в сферических системах породила гипотезу, впервые сформулированную Мерриттом (1987), а затем поддержанную рядом других авторов (Вайнберг, 1991, Саха, 1991; Палмер, 1994), что НРО имеет ту же природу, что и линден-белловский механизм выстраивания орбит вдоль бара в дисках. В работе Поляченко и Шухмана (2015b) показано, что справедливость такой гипотезы верна лишь отчасти, а именно только для некоторого класса функций распределения звезд, для которых НРО достаточно медленная по сравнению с характерным динамическим временем $T_{\text{дин}} \sim (GM/R^3)^{-1/2}$. В противном случае представление об орбите как отдельном объекте, которое эксплуатируется в этой гипотезе, становится неоправданным.

кривой $\Omega_i(R) \equiv \Omega(R) - \frac{1}{2}\varkappa(R)$, где \varkappa — эциклическая частота, определяющей скорость прецессии почти круговых орбит в системе бара

$$\Omega_{\text{пр}} = \Omega_i - \Omega_p, \quad (2)$$

имеет невысокий максимум.

На рис. 1а показаны типичные кривые для угловой скорости $\Omega(R)$ и кривая $\Omega_i(R)$ для несингулярных моделей.

Если $\max\{\Omega_i(R)\} \ll \Omega(R)$, то при $\Omega_p \gtrsim \max\Omega_i$, условие (1) будет выполнено. В этом случае адиабатический подход действительно оправдан в широкой области по радиусу (почти до радиуса коротации), то есть можно работать с усредненным вдоль орбиты потенциалом и считать, что сохраняется адиабатический инвариант J_f . Для примера потенциала с аномальными орбитами Линден-Белл (1979) использовал изохронный потенциал: $\Phi_0(r) = -GM/[b + \sqrt{r^2 + b^2}]$. Согласно его расчетам, для этой модели $\max\{\Omega_i\} \approx 0.05(GM/b^3)^{1/2}$ и достигается при $R \approx 1.5b$ (угловая скорость на этом радиусе $\Omega \approx 0.3(GM/b^3)^{1/2} \gg \max\{\Omega_i\}$), а область, в которой почти круговые орбиты ведут себя аномально, простирается примерно до $R = 4b$. В этой области все орбиты могут выстроиться вдоль возмущения, вращающегося с угловой скоростью $\Omega_p \gtrsim 0.05(GM/b^3)^{1/2}$.

Второй случай, для которого адиабатический подход оправдан, это область вблизи внутреннего линдбладовского резонанса (ILR), $R = R_L$, где скорость прецессии в системе бара, равна нулю, $\Omega_{\text{пр}}(R_L) = 0$. Почти круговые орбиты, радиус ведущего центра которых, R , равен R_L представляют собой слабо эксцентричные 2:1 эллипсы, покоящиеся в системе бара. Орбиты, с радиусом ведущего центра, слегка отличающегося от R_L , прецессируют со скоростью

$$\Omega_{\text{пр}}(R) \approx \Omega'_i(R_L)(R - R_L).$$

Поскольку для моделей с сингулярным потенциалом (см. рис. 1b) Ω_i везде убывает с радиусом, $d\Omega_{\text{пр}}/dR < 0$, прецессия орбит в области снаружи от ILR ($R > R_L$) является ретроградной (вращение орбиты в системе бара в сторону, противоположную вращению самой звезды по орбите в покоящейся системе отсчета), а в области внутри ILR ($R < R_L$) — прямой, т.е. в сторону вращения звезды по орбите. Ниже мы увидим, что наряду с ЛБ-производной скорости прецессии, решающее значение для установления направления выстраивания орбит имеет знак прецессии, определяющий направление прецессии орбит в невозмущенном потенциале.

Ниже для удобства будем обозначать модели и кривые $\Omega_i(R)$, подобные изображенным на рис. 1a, типом I, а подобные изображенным на рис. 1b, типом II.

Цель предлагаемой статьи — детально проанализировать качественные рассуждения, касающиеся важности ЛБ-производной скорости прецессии для нахождения ориентации больших осей эллипсов запертых орбит. Для этого мы найдем устойчивые стационарные точки гамильтониана Якоби на фазовой плоскости переменных (I, ϕ) при фиксированном J_f , где ϕ — угол, характеризующий ориентацию эллипса, и выясним, при каких условиях этот угол соответствует выстраиванию орбит вдоль, а при каких — поперек бара. Мы рассмотрим оба упомянутых выше вида потенциала при выполнении условий применимости усреднения потенциала по орбите и покажем, что хотя для типа I характерно выстраивание аномальных орбит вдоль бара, главной причиной этого является не положительный знак ЛБ-производной, а ретроградность прецессии в системе бара, которая имеет место для достаточно быстрых баров, $\Omega_p \gtrsim \max\{\Omega_i\}$. То же касается и моделей типа II. Орбиты снаружи от ILR благодаря ретроградности прецессии в этой области, выстраиваются вдоль бара, а внутри ILR — перпендикулярно бару. Знак ЛБ-производной играет второстепенную роль, так что даже нормальная орбита может оказаться ориентированной вдоль бара. Мы покажем также, что если скорость убывания на периферию амплитуды потенциала бара достаточно велика, это может привести к изменению полученных результатов, касающихся ориентации орбит, на противоположные (ориентация вдоль бара поменяется на ориентацию поперек бара и наоборот при тех же знаках прецессии и ЛБ-производной скорости прецессии).

ГАМИЛЬТониАН ЯКОБИ И УСРЕДНЕНИЕ ПОТЕНЦИАЛА

Пусть на фоне равновесного аксиально-симметричного потенциала диска $\Phi_0(r)$ имеется слабое овальное возмущение потенциала $\delta\Phi$, вращающееся с угловой скоростью Ω_p , которое в этой системе отсчета имеет вид

$$\delta\Phi(r, \varphi) = A(r) \cos(2\varphi). \quad (3)$$

Будем считать, что $A < 0$. Тогда впадины потенциала вытянуты вдоль оси OX , а гребни — вдоль оси OY . Соответственно большая ось овального возмущения поверхностной плотности σ (то есть, бара, порождающего этот потенциал), ориентирована вдоль оси OX .

Исследуем орбиты звезд, близких к круговым, в потенциале $\Phi(r, \varphi) = \Phi_0(r) + \delta\Phi(r, \varphi)$. Поскольку потенциал стационарен в системе отсчета бара, при движении звезды сохраняется интеграл Якоби

$$H_J(L, I, r, \phi) = H_0(L, I) + \delta\Phi(r, \phi), \quad (4)$$

где H_0 — невозмущенный гамильтониан, записанный в системе отсчета, вращающейся со скоростью Ω_p , который в эпициклическом приближении ($I \ll \ll L$) имеет вид

$$H_0(L, I) = \frac{1}{2}\Omega^2(R)R^2 + \Phi_0(R) + \varkappa(R)I + \beta(R)I^2 - \Omega_p L. \quad (5)$$

Здесь

$$R = R(L), \quad L = L(R) = \Omega^2(R)R,$$

$$\Omega^2(R) = \frac{1}{R} \frac{d\Phi_0(R)}{dR},$$

$$\varkappa(R) = \left(4\Omega^2 + R \frac{d\Omega^2}{dR}\right)^{1/2},$$

R — радиус ведущего центра. Далее в зависимости от удобства, мы будем в качестве независимой переменной использовать либо угловой момент L , либо R . Малое слагаемое $\beta(R)I^2$, соответствующее пост-эпициклическому приближению, включено в гамильтониан для того, чтобы можно было учесть с одинаковой точностью зависимость от I радиальной $\Omega_1(L, I)$ и азимутальной $\Omega_2(L, I)$ частот, отвечающих переменным действия $I_1 \equiv I$ и $I_2 \equiv L$ соответственно:

$$\Omega_1(L, I) = \frac{\partial H_0(L, I)}{\partial I} = \varkappa + 2\beta I + \mathcal{O}(I^2), \quad (6)$$

$$\Omega_2(L, I) = \frac{\partial H_0(L, I)}{\partial L} = \Omega - \Omega_p + \frac{d\varkappa}{dL}I + \mathcal{O}(I^2).$$

Явный вид β можно получить, пользуясь вычислениями, приведенными, например, в работах Шу (1969), Марка (1976) или Бертина (2014):

$$\beta = \frac{1}{8R^2} \left(3q - \frac{1}{3}q^2 + \frac{1}{2}R \frac{dq}{dR}\right), \quad (7)$$

$$q = \frac{d \ln(\varkappa^2)}{d \ln R}.$$

В дальнейшем будем считать, что условие (1) выполнено. Это означает возможность усреднить потенциал $\delta\Phi$ по быстрому движению:

$$V(L, J_f, \phi) = \quad (8)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \oint \delta\Phi(r(L, J_f, w_1), \varphi(L, J_f, w_1, \phi)) dw_1,$$

где мы, аналогично Поляченко (2004, 2005), ввели вместо переменных действия $I_1 = (2\pi)^{-1} \oint \dot{r} dr$ и $I_2 = L$, и соответствующих им угловых переменных w_1 и w_2 , новые переменные действие-угол, а именно, угловые переменные

$$w_1, \phi = w_2 - \frac{1}{2}w_1, \quad (9)$$

которые являются сопряженными переменным действия $J_f (= \frac{1}{2}L + I)$ и L соответственно. Смысл введения этих переменных в том, что таким образом отделяется быстрое орбитальное движение, w_1 , от медленного прецессионного, ϕ . Действительно,

$$\frac{dw_1}{dt} = \Omega_1, \quad \frac{d\phi}{dt} = (\Omega_2 - \Omega_p) - \frac{1}{2}\Omega_1 \ll \Omega_1.$$

Величина $d\phi/dt$ представляет собой (малую) скорость прецессии орбиты в невозмущенном потенциале во вращающейся системе отсчета или, что то же самое, скорость изменения угла ориентации большой оси эллиптической орбиты ϕ .

Используя эпициклическую связь между переменными в реальном пространстве (r, φ) и переменными в пространстве действие-угол (см., например, Бинни, Тримейн, 2008)

$$r = R - \rho \cos w_1, \quad \varphi = w_2 + \frac{2\Omega}{\kappa} \frac{\rho}{R} \sin w_1, \quad (10)$$

найдем явный вид усредненного вдоль орбиты потенциала:

$$V = B(L, J_f) \cos(2\phi), \quad (11)$$

где

$$B(L, J_f) = -\frac{A(R)}{2} \left(\frac{\rho}{R} \right) \left(\frac{R}{A} \frac{dA}{dR} + \frac{4\Omega}{\varkappa} \right), \quad (12)$$

$\rho = \sqrt{2I/\varkappa}$ — размер эпицикла. Если абсолютная величина амплитуды потенциала бара убывает с радиусом не слишком быстро, так что

$$\left| \frac{d \ln |A|}{d \ln R} \right| < \frac{4\Omega}{\varkappa},$$

то знак амплитуды усредненного потенциала B положителен, $B > 0$:

$$B(L, J_f) \approx -A(R) \left[\sqrt{\frac{2I}{\varkappa R^2}} \frac{2\Omega}{\varkappa} \right] \equiv \quad (13)$$

$$\equiv b(R)I^{1/2} > 0,$$

в отличие от знака амплитуды A . Здесь $I = I(J_f, L) = J_f - \frac{1}{2}L$. В результате мы получаем усредненный потенциал Якоби

$$\begin{aligned} \bar{H}_J(L, I(L, J_f), \phi) &= \quad (14) \\ &= H_0(L, I) + B(L, I) \cos(2\phi). \end{aligned}$$

Согласно (10), направлению большой оси орбиты отвечает значение $w_1 = \pi$, и из (9) видно, что соответствующее значение угловой переменной ϕ сдвинуто относительно азимута апоцентра φ на $\pi/2$. Поэтому положению апоцентров орбиты на оси OX , т.е. вдоль бара, отвечают значения $\phi = \frac{1}{2}\pi; \frac{3}{2}\pi$. В следующем разделе мы исследуем стационарные точки гамильтониана и найдем возможные стационарные ориентации орбит. Положение стационарных точек зависит, в том числе, от знака величины B .

СТАЦИОНАРНЫЕ ТОЧКИ ГАМИЛЬТониАНА ЯКОБИ

Стационарные точки определяются из условия

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial \bar{H}_J(L, I, \phi)}{\partial L} \right]_{J_f} &= 0, \quad (15) \\ \frac{\partial \bar{H}_J(L, I, \phi)}{\partial \phi} &= 0, \end{aligned}$$

что дает

$$\begin{aligned} \Omega_{\text{pr}}(L, I) + \left(\frac{\partial B}{\partial L} \right)_{J_f} \cos 2\phi &= 0, \quad (16) \\ \sin(2\phi) &= 0, \end{aligned}$$

где

$$\Omega_{\text{pr}}(L, I) = \Omega_2(L, I) - \Omega_p - \frac{1}{2}\Omega_1(L, I). \quad (17)$$

Учитывая, что $(\partial/\partial L)_{J_f} = (\partial/\partial L)_I - \frac{1}{2}(\partial/\partial I)_L$, и что для орбит, близких к круговым, $(\partial/\partial L)_I \ll \ll (\partial/\partial I)_L$, запишем условия (16) в виде

$$\Omega_{\text{pr}}(L, I) = \pm \frac{1}{4}I^{-1/2}b(L); \quad (18)$$

$$\phi = 0; \pi; \quad \phi = \frac{1}{2}\pi; \frac{3}{2}\pi. \quad (19)$$

Верхний знак, (+), в правой части (18) соответствует случаю $\phi = 0; \pi$, т.е., как мы установили выше, выстраиванию орбиты перпендикулярно бару, а нижний знак, (−), соответствует случаю $\phi = \frac{1}{2}\pi; \frac{3}{2}\pi$, т.е. выстраиванию орбиты вдоль бара. Дальнейшая задача состоит в том, чтобы выяснить, при каких условиях реализуется тот или иной из этих двух случаев. Рассмотрим модели I и II по отдельности.

Стационарные точки для моделей типа I

Имеем из (6) для скорости прецессии в невозмущенном потенциале в системе бара:

$$\begin{aligned} \Omega_{\text{pr}} &\equiv \Omega_2 - \Omega_p - \frac{1}{2}\Omega_1 = & (20) \\ &= \left[\Omega(L) + \frac{d\chi}{dL}I - \Omega_p \right] - \\ &\quad - \left[\frac{1}{2}\chi(L) + \beta(L)I \right], \end{aligned}$$

или

$$\Omega_{\text{pr}} = \Omega_{\text{pr}}^{(0)}(L) + \mu(L)I, \quad (21)$$

где введены новые обозначения $\Omega_{\text{pr}}^{(0)}(L) \equiv \Omega_i(L) - \Omega_p = [\Omega(L) - \Omega_p] - \frac{1}{2}\chi(L)$ для скорости прецессии в системе бара в пределе $I \rightarrow 0$ и величина $\mu(L) \equiv d\chi/dL - \beta$.

Для слабо-эллиптических орбит с ведущим центром в окрестности некоего радиуса $R = R_0$ (с соответствующим угловым моментом $L = L_0 = \Omega(R_0)R_0^2$) имеем

$$\begin{aligned} \Omega_{\text{pr}}(L, I) &\approx \Omega_{\text{pr}}^{(0)}(L_0) + & (22) \\ &+ \left(\frac{d\Omega_{\text{pr}}^{(0)}}{dL} \right)_{L_0} \Delta L + \mu(L_0)I, \\ \Delta L &= L - L_0. \end{aligned}$$

Вместо адиабатического интеграла J_f удобно ввести его “усеченный” вариант:

$$\mathcal{J}_f \equiv I + \frac{1}{2}\Delta L = J_f - \frac{1}{2}L_0,$$

полагая, что ΔL и I — величины одного порядка. Подставляя вместо ΔL его выражение через \mathcal{J}_f и I , найдем:

$$\begin{aligned} \Omega_{\text{pr}}(L, I) &\approx \Omega_{\text{pr}}^{(0)}(L_0) + \\ &+ 2 \left(\frac{d\Omega_{\text{pr}}^{(0)}}{dL} \right)_{L_0} (\mathcal{J}_f - I) + \mu(L_0)I, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \Omega_{\text{pr}}(L, I) &\approx \Omega_{\text{pr}}^{(0)}(L_0 + 2\mathcal{J}_f) - & (23) \\ &- 2 \left[\left(\frac{d\Omega_{\text{pr}}^{(0)}}{dL} \right)_{L_0} - \frac{1}{2}\mu(L_0) \right] I = \\ &= \Omega_{\text{pr}}^{(0)}(L_0 + 2\mathcal{J}_f) - 2\mathcal{P}I. \end{aligned}$$

Из (21), легко видеть, что величина

$$\mathcal{P} = \left(\frac{d\Omega_{\text{pr}}^{(0)}}{dL} \right)_{L_0} - \frac{1}{2}\mu(L_0)$$

есть не что иное, как ЛБ-производная скорости прецессии в пределе малых I . Таким образом, уравнение для стационарных точек (18) приобретает вид

$$\mathcal{Q}I^{1/2} - 2\mathcal{P}I^{3/2} = \pm \frac{1}{4}b, \quad (24)$$

где $\mathcal{Q} = \Omega_{\text{pr}}^{(0)}(L_0 + 2\mathcal{J}_f)$ — скорость прецессии орбиты в невозмущенном потенциале в системе бара и пределе $I \rightarrow 0$, с радиусом ведущего центра, соответствующим угловому моменту $L_0 + 2\mathcal{J}_f$. Для моделей типа I в случае, когда $\Omega_p \gtrsim \max\{\Omega(R) - \frac{1}{2}\chi(R)\}$, величина \mathcal{Q} везде отрицательна, т.е. прецессия всегда ретроградная. Однако, знак \mathcal{P} может быть как положительным (аномальная орбита), так и отрицательным (нормальная орбита).

Заметим, что усредненный гамильтониан Якоби $\overline{\mathcal{H}}_J$ в переменных (I, ϕ) при фиксированном \mathcal{J}_f (в котором опущен постоянный вклад, зависящий только от \mathcal{J}_f и L_0) можно представить в виде²:

$$\mathcal{H}_J = -2\mathcal{Q}I + 2\mathcal{P}I^2 + bI^{1/2} \cos(2\phi). \quad (25)$$

Проанализируем решения уравнения (24). Имеем $f(I^{1/2}) = \pm \frac{1}{4}b$, где

$$f(z) = \mathcal{Q}z - 2\mathcal{P}z^3. \quad (26)$$

Положение стационарных точек зависит от относительных знаков \mathcal{Q} и \mathcal{P} .

(i). В случае $\mathcal{Q} < 0, \mathcal{P} < 0$ кривая $f(I^{1/2})$ имеет отрицательный минимум при $I^{1/2} = \sqrt{\frac{1}{6}\mathcal{Q}/\mathcal{P}}$, равный

$$f_{\text{min}} = \frac{2\mathcal{Q}}{3} \left(\frac{\mathcal{Q}}{6\mathcal{P}} \right)^{1/2} < 0.$$

В этом случае возможны либо одна, либо три стационарных точки в зависимости от величины амплитуды b (пока считаем ее положительной). При $b < b_{\text{crit}} \equiv 4|f_{\text{min}}|$ имеем три стационарные точки:

² Запись гамильтониана в виде (25) означает, что мы принимаем следующий скейлинг малых величин по отношению к малой амплитуде потенциала бара A , которую мы полагаем величиной порядка $\varepsilon \ll 1$: $b = \mathcal{O}(\varepsilon)$, $I^{1/2} = \mathcal{O}(\varepsilon^{1/3})$, $\mathcal{Q} \equiv \Omega_{\text{pr}} = \mathcal{O}(\varepsilon^{2/3})$, $\mathcal{P} \equiv (\partial\Omega_{\text{pr}}/\partial L)_{J_f} = \mathcal{O}(1)$, $\mathcal{J}_f = \mathcal{O}(I) = \mathcal{O}(\Delta L) = \mathcal{O}(\varepsilon^{2/3})$, так что $\mathcal{H}_J = \mathcal{O}(\varepsilon^{4/3}) + \dots$, где многоточие означает вклады более высокого порядка по ε . Выбранное упорядочение позволяет избежать необходимости учета более высоких порядков эпитциклического приближения (выше, чем $\mathcal{O}(I^{1/2})$) при вычислении невозмущенных орбит и усредненного потенциала бара $V(L, I, \phi)$, что привело бы к гораздо более громоздким вычислениям и формулам (см., например, работу Контопулоса (1975), в которой рассчитаны траектории орбит вблизи внутреннего линдбладовского резонанса для случая возмущающего потенциала в виде спирали).

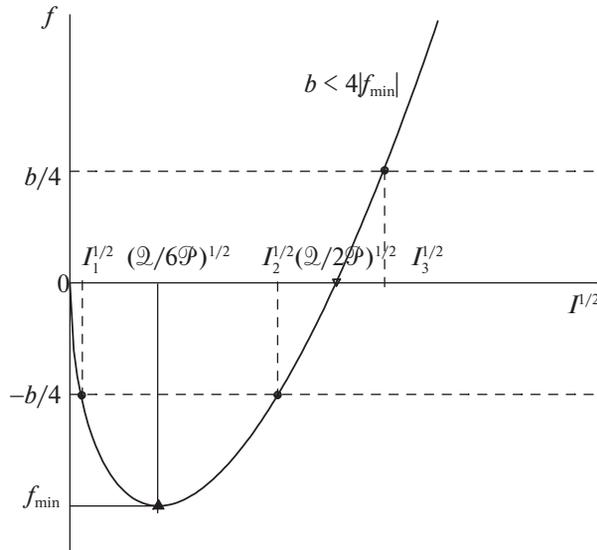


Рис. 2. Функция $f(I^{1/2})$ для случая $\mathcal{Q} < 0, \mathcal{P} < 0$ и $b < 4|f_{\min}|$. Здесь возможны 3 стационарные точки: две для знака $-$ и одна для знака $+$ в правой части (24). Из них устойчивыми являются только две, I_1 и I_3 . Первая из них дает ориентацию вдоль бара, вторая — поперек бара. Точка I_2 соответствует седловой точке гамильтониана и является неустойчивой. При $b > 4|f_{\min}| = b_{\text{crit}}$ возможна только одна стационарная точка, соответствующая знаку $+$ (в области $f > 0$). Она устойчива и дает ориентацию поперек бара.

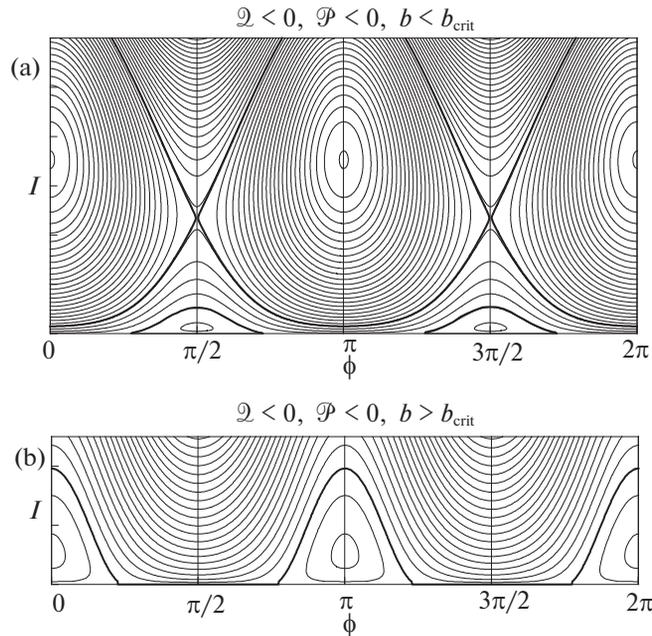


Рис. 3. Изолинии гамильтониана Якоби $\mathcal{H}_J(I, \phi)$ (25) для кривых вращения типа I для случая нормальных орбит, ЛБ-производная скорости прецессии отрицательна, $\mathcal{P} < 0$. (a) — $b < b_{\text{crit}}$, (b) — $b > b_{\text{crit}}$.

$I_1 < I_2 < I_3$, причем, две из них, I_1 и I_2 , соответствуют выбору знака минус в правой части (24), а третья, I_3 соответствует выбору знака плюс. На рис. 2 показано взаимное расположение точек в случае $b < b_{\text{crit}}$.

При $b > b_{\text{crit}}$ есть только одна стационарная точка, соответствующая знаку плюс.

На рис. 3а показаны фазовые портреты (изо-

линии $\mathcal{H}_J(I, \phi)$) для случая нормальных орбит, $\mathcal{P} < 0$, для кривых вращения типа I. Видно, что если $b < b_{\text{crit}}$ существуют два вида стационарных орбит, соответствующих экстремумам гамильтониана — вытянутые вдоль бара ($\phi = \frac{1}{2}\pi; \frac{3}{2}\pi$), и вытянутые, перпендикулярно бару ($\phi = 0; \pi$). Имеется две сепаратрисы (показаны жирными линиями),

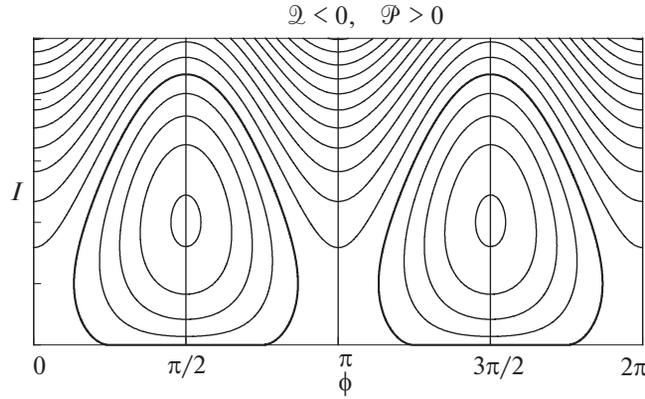


Рис. 4. То же, что на рис. 3 для случая аномальных орбит, $\mathcal{P} > 0$. Стационарные точки соответствуют орбитам, вытянутым вдоль бара: ($\phi = \frac{1}{2}\pi; \frac{3}{2}\pi$).

разделяющие области либрирующих (запертых) и циркулирующих (пролетных) орбит. Верхняя сепаратрисса состоит из двух ветвей, пересекающихся в седловых точках, которые соответствуют неустойчивым стационарным точкам $I = I_2, \phi = \frac{1}{2}\pi; \frac{3}{2}\pi$ (см. рис. 2). Нижняя сепаратрисса соответствует $\mathcal{H}_J = 0$. При $b > b_{\text{crit}}$ (рис. 3b) сепаратрисса состоит из одной ветви, соответствующей $\mathcal{H}_J = 0$. Замкнутые изолинии, окружающие экстремальные точки, отвечают орбитам, запертым в потенциале бара.

(ii). В случае аномальной орбиты, $\mathcal{Q} < 0, \mathcal{P} > 0$ кривая $f(I^{1/2})$ везде отрицательна и монотонно убывает. Здесь, вне зависимости от величины b возможна только одна стационарная точка, соответствующая выбору знака минус в (24), т.е. ориентации вдоль бара. Фазовый портрет для случая аномальных орбит $\mathcal{Q} < 0, \mathcal{P} > 0$ показан на рис. 4. Видно, что здесь единственная возможная ориентация периодических орбит — вдоль бара ($\phi = \frac{1}{2}\pi; \frac{3}{2}\pi$).

Таким образом, аномальные орбиты действительно ориентируются вдоль бара, в согласии с идеей Линден-Белла (1979). Однако, как мы видели выше, даже в случае нормальной орбиты, $\mathcal{P} < 0$, если амплитуда бара ниже критической, наряду со стационарными периодическими орбитами, вытянутыми перпендикулярно бару, существуют стационарные периодические орбиты, вытянутые вдоль бара. Их эксцентриситет, $e \propto I^{1/2}$, меньше, чем у орбит, ориентированных перпендикулярно бару: $I_1^{1/2} < I_3^{1/2}$. Но если в диске нет или мало орбит с достаточно большими эксцентриситетами, единственно возможной ориентацией орбит остается ориентация вдоль бара.

Стационарные точки для моделей типа II

Как мы уже отмечали выше, для кривых типа II адиабатический подход возможен вблизи

внутреннего линдбладовского резонанса. Имеем из (21) вблизи $R = R_L$, или, что то же самое, вблизи L_{ILR} , где $[\Omega(R_L) - \Omega_p] - \frac{1}{2}\varkappa(R_L) = 0, L_{\text{ILR}} = (\Omega R^2)_{R=R_L}$:

$$\Omega_{\text{pr}} = \left(\frac{d\Omega_{\text{pr}}^{(0)}}{dL} \right)_{\text{ILR}} \Delta L + \mu_{\text{ILR}} I, \quad (27)$$

где нижний индекс означает, что соответствующая величина берется при $L = L_{\text{ILR}}$. Подставляя сюда $\Delta L = 2\mathcal{J}_f - 2I$, получим уравнение для нахождения стационарных точек:

$$2 \left(\frac{d\Omega_{\text{pr}}^{(0)}}{dL} \right)_{\text{ILR}} \mathcal{J}_f - 2\mathcal{P}I = \pm \frac{1}{4} b I^{-1/2}, \quad (28)$$

$$\mathcal{P} = \left(\frac{d\Omega_{\text{pr}}^{(0)}}{dL} - \frac{\mu}{2} \right)_{\text{ILR}},$$

где \mathcal{P} снова означает ЛБ-производную скорости прецессии. Если теперь переобозначить величину \mathcal{Q} :

$$\mathcal{Q} \equiv 2 \left(\frac{d\Omega_{\text{pr}}^{(0)}}{dL} \right)_{\text{ILR}} \mathcal{J}_f, \quad (29)$$

мы снова получим уравнение вида (24), как и для случая кривых типа I. Однако теперь \mathcal{Q} : имеет несколько иной смысл и она может иметь как отрицательный, так и положительный знак. Несложно видеть, что эта величина представляет собой скорость прецессии орбит в невозмущенном потенциале в пределе $I \rightarrow 0$ с радиусом ведущего центра, соответствующим угловому моменту $L_{\text{ILR}} + 2\mathcal{J}_f$. Поскольку $2\mathcal{J}_f = \Delta L + 2I$, то при $\Delta L \gtrsim 2I$ имеем

$$\mathcal{Q} \approx \left(\frac{d\Omega_{\text{pr}}^{(0)}}{dL} \right)_{\text{ILR}} \Delta L =$$

$$= \left(\frac{d\Omega_{\text{пр}}^{(0)}}{dR} \right)_{R_L} \Delta R \approx \Omega_{\text{пр}}^{(0)}(R_L + \Delta R).$$

Отсюда видно, что величина \mathcal{Q} фактически представляет скорость ретроградной прецессии невозмущенной орбиты снаружи от ILR, т.е. при $\Delta R > 0$ и прямой прецессии внутри ILR, т.е. при $\Delta R < 0$, поскольку $d\Omega_{\text{пр}}^{(0)}/dR < 0$.³ Кроме того, в отличие от случая кривых типа I, для любых реальных кривых типа II знак ЛБ-производной \mathcal{P} всегда отрицателен, а орбиты всегда нормальны.

Аналогично (24), имеем

$$f(I^{1/2}) \equiv \mathcal{Q}I^{1/2} + 2|\mathcal{P}|I^{3/2} = \pm \frac{1}{4}b, \quad (30)$$

В области снаружи от ILR, где $\mathcal{Q} < 0$, кривая $f(I^{1/2})$ имеет тот же вид, что и на рис. 2. Это значит, что и здесь при $b < b_{\text{crit}} = \frac{2}{3}(|\mathcal{Q}|^3/6|\mathcal{P}|)^{1/2}$ существуют три стационарные точки, $I_1 < I_2 < I_3$ две из которых, I_1 и I_3 соответствуют экстремумам гамильтониана (25), т.е. устойчивы, а точка I_2 является седловой точкой, т.е. неустойчива. При этом стационарная точка с $I = I_1$ отвечает знаку $(-)$ в правой части (30), т.е. периодическим орбитам, вытянутым вдоль бара, а точка $I = I_3$ отвечает знаку $(+)$, т.е. орбитам, ориентированным поперек бара. Фазовый портрет в этом случае совпадает с изображенным на рис. 3а.

Итак, мы установили, что если невозмущенные орбиты всех звезд системы очень близки к круговым, то единственно возможными стационарными периодическими орбитами являются орбиты с $I = I_1$, вытянутые вдоль бара. Это полностью согласуется с результатом, впервые полученным Сандерсом и Хантли (1976) (изложенном также в обзоре Селвуда и Уилкинсона, 1993, и монографии Бинни и Тримейна, 2008), которые в рамках *линейной нерезонансной* теории показали, что в диске с почти круговыми орбитами с кривыми вращения типа II для любого R в области между радиусом внутреннего линдбладовского резонанса R_L и радиусом коротации R_C (но не слишком близко к ним) существует периодическая орбита, ориентированная вдоль бара. Можно даже показать, что если (средний) радиус этой орбиты приближается к ILR, ее эксцентриситет $e = 2\rho/R = 2\sqrt{I/\varkappa R^2}$ точно соответствует I_1 , получаемому из уравнения (30) в пределе очень малых I :

$$I^{1/2} = I_1^{1/2} \approx -\frac{b}{4\mathcal{Q}}.$$

³ В принципе, знак величины $\mathcal{J}_f (= \frac{1}{2}\Delta L + I)$ может положительным даже для отрицательных ΔL , если $|\Delta L| < 2I$. Тогда знак \mathcal{Q} окажется отрицательным не только снаружи, но и внутри ILR, хотя и в очень узкой области.

Этот результат согласуется также с результатом Голдрейха и Тримейна (1981), которые пытались объяснить появление конечного эксцентриситета орбит частиц, вращающихся вблизи ILR в кольцах Урана, за счет возмущающего воздействия гравитационного потенциала спутника.

Если же амплитуда потенциала бара превышает критическую, $b > b_{\text{crit}}$, возможна только единственная стационарная точка, отвечающая знаку $(+)$ в правой части (30), т.е. периодическим орбитам, ориентированным поперек бара. Фазовый портрет для этого случая показан на рис. 3б.

В области внутри ILR, где прецессия в невозмущенном потенциале проградная, $\mathcal{Q} > 0$, кривая $f(I^{1/2})$ везде положительна и монотонно растет от нуля. В этом случае критической амплитуды не существует. При любой амплитуде возможна стационарная точка, отвечающая знаку $(+)$. Это значит, что внутри ILR орбиты выстраиваются перпендикулярно бару. В случае малой амплитуды этот результат также сшивается с результатом линейной нерезонансной теории Сандерса и Хантли (1976). Фазовый портрет для этого случая показан на рис. 3б.

Роль знака амплитуды B усредненного потенциала бара

Выше мы везде считали, что знак амплитуды $B = b(L)I^{1/2}$ усредненного потенциала $V(L, I, \phi) = B(L, I) \cos(2\phi)$, где

$$b(L) = -A(R) \sqrt{\frac{1}{2\varkappa R^2}} \times \left[\frac{d \ln |A|}{d \ln R} + \frac{4\Omega(R)}{\varkappa} \right] \cos(2\phi), \quad R = R(L), \quad (31)$$

положителен, предполагая, что скорость изменения потенциала достаточно мала. Однако, если $\alpha \equiv d \ln |A|/d \ln R < 0$ и по абсолютной величине превосходит отношение $4\Omega/\varkappa$, т.е., если в какой-то области по R

$$|\alpha(R)| > 4\Omega(R)/\varkappa(R), \quad (32)$$

то амплитуда b становится отрицательной. Смена знака амплитуды усредненного потенциала бара приводит к изменению всех выводов, касающихся ориентации стационарных периодических орбит, на противоположные. Действительно, поскольку $V \propto b \cos(2\phi)$, то смена знака b эквивалентна замене $\cos(2\phi) \rightarrow \cos[2(\phi + \frac{1}{2}\pi)]$. Это означает, что при тех же самых соотношениях между \mathcal{P} и \mathcal{Q} , при которых в случае $b > 0$ стационарными являлись точки $\phi = 0; \pi$, соответствующие орбитам, ориентированным перпендикулярно бару, в случае $b < 0$

стационарными станут точки $\phi = \frac{1}{2}\pi; \frac{3}{2}\pi$, соответствующие орбитам, вытянутым вдоль бара. И наоборот. В частности, для модели изохронного потенциала, рассмотренного Линден-Беллом (1979), то есть для кривых вращения типа I, где возможны нормальные орбиты, $\mathcal{P} > 0$, они окажутся ориентированы поперек, а не вдоль бара.

Проанализируем теперь возможность выполнения неравенства (32) для достаточно разумных распределений поверхностной плотности бара $\sigma(r)$. Поскольку для любой возможной кривой вращения галактики $\Omega < \kappa < 2\Omega$, то отношение $4\Omega/\kappa$ может варьироваться в пределах $2 < 4\Omega/\kappa < 4$. Так, для модели Местеля (1963), $\Omega(r) \propto 1/r$, $\kappa = \sqrt{2}\Omega$ и $4\Omega/\kappa = 2^{3/2} = 2.83$.

Рассмотрим несколько естественных моделей распределения поверхностной плотности бара $\sigma(r, \phi) = \sigma_B(r) \cos(2\varphi)$, и найдем соответствующие им распределения потенциала $\delta\Phi(r, \varphi) = A(r) \cos(2\varphi)$. Можно показать, что $A(r)$ и $\sigma_B(r)$ связаны следующим интегральным соотношением:

$$A(r) = -\frac{4}{3}G \int_0^\infty \frac{r' \sigma_B(r')}{r_>} \times \left[\left(\frac{2}{z^2} + 1 \right) \mathbf{K}(z) - 2 \left(\frac{1}{z^2} + 1 \right) \mathbf{E}(z) \right] dr', \quad (33)$$

где $z = r_</r_>$, $r_< = \min(r, r')$, $r_> = \max(r, r')$, а $\mathbf{K}(z)$ и $\mathbf{E}(z)$ — полные эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно. Мы численно⁴ рассчитали амплитуды потенциала $A(r)$ для четырех достаточно плавно спадающих распределений $\sigma_B(r)$:

- (i) — $\sigma_B^{(I)}(r) = \sigma_0 \exp(-r^2/a^2)$,
- (ii) — $\sigma_B^{(II)}(r) = \sigma_0 \exp(-r/a)$,
- (iii) — $\sigma_B^{(III)}(r) = \frac{\sigma_0}{(1 + r^2/a^2)^2}$,
- (iv) — $\sigma_B^{(IV)}(r) = \frac{\sigma_0}{1 + r^2/a^2}$.

На рис. 5а показаны профили амплитуд $A(r)$ для этих распределений, а на рис. 5б — их логарифмические производные $\alpha(r) = d \ln |A|/d \ln r$.

⁴ Для гауссовой модели $\sigma_B^{(I)}$ удается найти аналитическое выражение для потенциала:

$$A(r) = -\frac{4}{3}\pi G \sigma_0 a \sqrt{2\zeta} \left\{ 1 - e^{-\zeta} \sqrt{\frac{1}{2}\pi\zeta} \left[I_0(\zeta) + I_1(\zeta) + \frac{1}{4}I_1(\zeta)/\zeta \right] \right\}, \quad \zeta = \frac{1}{2}(r/a)^2,$$

где $I_n(z)$ — модифицированные функции Бесселя 1-го рода.

Из рис. 5а следует, что скорость убывания абсолютной величины $|A(r)|$ зависит от распределения поверхностной плотности. Однако асимптотически, при $r/a \gg 1$, она одинакова для хорошо локализованных баров (т.е. таких баров, плотность $\sigma_B(r)$ которых спадает быстрее, чем $1/r^4$). Несложно показать, что для хорошо локализованных баров асимптотика $A(r)$ есть

$$A(r) \approx -\frac{3\pi}{4r^3}G \int_0^\infty \sigma_B(r')r'^3 dr'.$$

В частности, для (I) и (II), имеем при $r \gg a$:

$$A^{(I)}(r)/(G\sigma_0 a) \approx -\frac{3}{8}\pi(a/r)^3,$$

$$A^{(II)}(r)/(G\sigma_0 a) \approx -\frac{9}{2}\pi(a/r)^3.$$

Для модели (III) с пограничной асимптотикой, $\sigma_B^{(III)} \sim r^{-4}$, получим

$$A^{(III)}(r)/(G\sigma_0 a) \approx -\frac{9}{16}\pi(a/r)^3 \ln(1.862r/a),$$

т.е. она спадает немного медленней, чем для моделей I и II.

Для плохо локализованной модели плотности IV скорость спадания самая медленная, $\sim 1/r$:

$$A^{(IV)}(r)/(G\sigma_0 a) \approx -\pi(a/r).$$

На рис. 5б видно, что самое большое отрицательное значение $\alpha(r) \equiv d \ln |A(r)|/d \ln r$ для экспоненциальных моделей I и II приходится не на их далекий асимптотический хвост, где оно равно -3 , а на область, следующую за минимумом $A(r)$, и достигается не на периферии диска, а в области, примыкающей к минимуму амплитуды потенциала. Для модели I оно равно примерно $\alpha_{\min} \approx -3.56$ и достигается при $r/a \approx 2.35$. Для модели II $\alpha_{\min} \approx -3.29$ и достигается при $r/a \approx 8.5$. Это означает, по-видимому, что при достаточно резкой границе поверхностной плотности бара возможны довольно большие отрицательные значения $\alpha(r)$ в окрестности этой границы.

Мы проверили это утверждение, рассмотрев ступенчатую модель распределения плотности. Ступенька предполагалась с небольшим сглаживанием:

$$\sigma_B^{(V)}(r) = \sigma_0 / \{ 1 + \exp[(r - a)/\delta] \}. \quad (34)$$

На рис. 6 показаны профили амплитуды потенциала $A(r)$ для пяти значений параметра $\delta = 0.025a; 0.05a; 0.1a; 0.2a; 0.4a$. Видно, что чем меньше δ , там больше по абсолютной величине значение α в области, примыкающей к краю бара

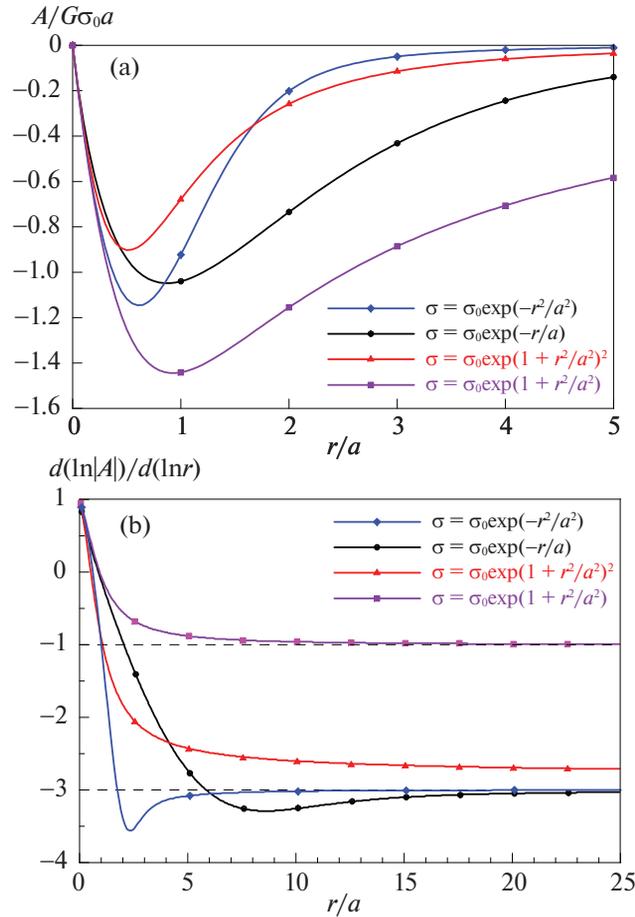


Рис. 5. (а) — Амплитуда потенциала $A(r)$, создаваемая барообразным возмущением поверхностной плотности диска $\sigma(r, \varphi) = \sigma_B(r) \cos(2\varphi)$ для четырех моделей $\sigma_B(r)$, (б) — логарифмическая производная амплитуды потенциала $\alpha = d \ln |A|/d \ln r$ для этих профилей.

$r \approx a$. Так, для $\delta = 0.025a$ $\alpha_{\min} = \alpha(r = 1.03a) = -5.4$. Однако видно также, что с уменьшением δ происходит одновременное сужение по радиусу области больших отрицательных α . Вся эта область сосредоточена вблизи скачка плотности.

Таким образом, отрицательные значения амплитуды усредненного потенциала бара $b = |A|(\alpha + 4\Omega/\kappa)$, в принципе, возможны, поскольку отрицательные значения α могут превышать по абсолютной величине характерные значения отношения $4\Omega/\kappa$, которые, как правило, не выше трех. Однако такое превышение происходит либо довольно далеко от границ бара, $r \gg a$, где $\alpha = -3$, либо в узкой области вблизи границы, если она очень резкая. В области, где сосредоточено основное тело бара, $r \lesssim a$, амплитуда усредненного потенциала бара b , действительно, положительна, как мы (и, по-видимому, Линден-Белл, 1979) полагали выше.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы показали, что слабое овальное возмущение гравитационного потенциала $\delta\Phi(r, \varphi) =$

$= A(r) \cos[2(\varphi - \Omega_p t)]$, $A < 0$, создаваемого вращающимся с угловой скоростью Ω_p барообразным возмущением поверхностной плотности $\sigma(r, \varphi) = \sigma_B(r) \cos[2(\varphi - \Omega_p t)]$ на фоне аксиально-симметричного потенциала галактик может приводить к запираанию прецессирующих орбит звезд и выстраиванию их вдоль бара, приводя к его усилению. Продемонстрировано, что хотя при положительном знаке ЛБ-производной угловой скорости прецессии, $[\partial\Omega_{\text{пр}}(L, I)/\partial L]_{J_f} > 0$, запертые орбиты, действительно, могут выстраиваться вдоль бара, этот знак не является единственным, и даже не является доминирующим фактором, определяющим ориентацию запертых орбит (как считалось ранее). Важную роль играют знак самой прецессии орбит в невозмущенном потенциале, $\Omega_{\text{пр}}$, а также величина амплитуды бара.

Так, в случае, когда (положительная) амплитуда b усредненного по быстрому орбитальному движению потенциала бара $V = bI^{1/2} \cos(2\phi)$ существенно ниже критической, а прецессия орбит в

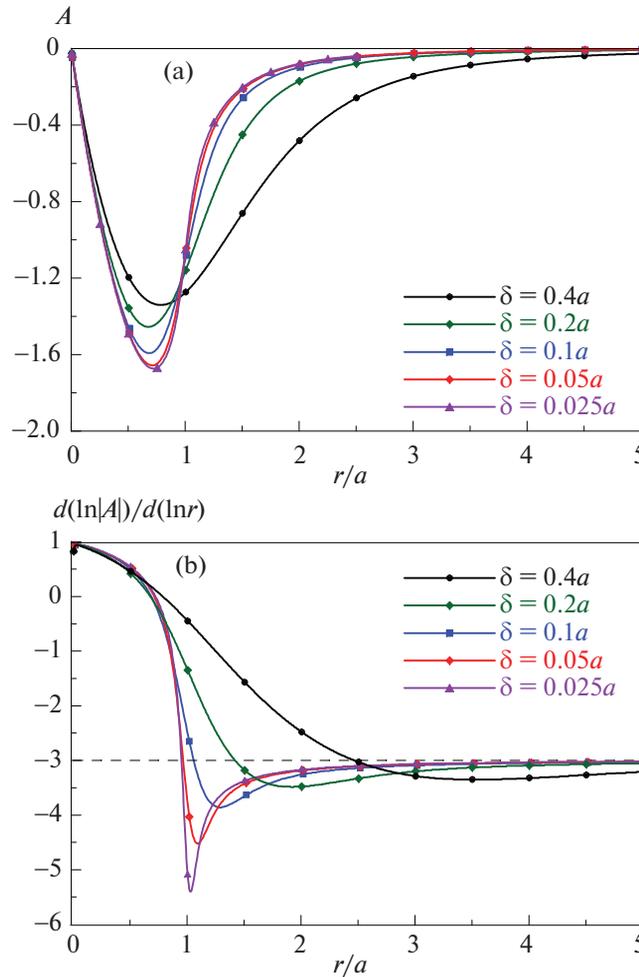


Рис. 6. Амплитуда потенциала $A(r)$, соответствующая ступенчатой функции $\sigma_B^{(V)}(r) = \sigma_0 / \{1 + \exp [(r - a)/\delta]\}$ (a), и ее логарифмическая производная $\alpha = d \ln |A| / d \ln r$ (b), для пяти значений параметра сглаживания $\delta/a = 0.025; 0.5; 0.1; 0.2; 0.4$.

невозмущенном потенциале ретроградная, $\Omega_{gr} < 0$, выстраивание запертых орбит происходит вдоль бара, независимо от знака ЛБ-производной. При этом, если ЛБ-производная отрицательна, наряду с орбитами, вытянутыми вдоль бара, присутствуют также более эксцентричные орбиты, вытянутые поперек бара, при условии, что популяция звезд диска содержит такие орбиты (см. рис. 2 и рис. 3а).

Ориентация запертых орбит, действительно, определяется знаком ЛБ-производной, но только при условии, что амплитуда бара достаточно велика. Тогда при отрицательной ЛБ-производной запертые орбиты вытянуты перпендикулярно бару (см. рис. 3б), а при положительной ЛБ-производной — вдоль бара, как это и следует из качественных рассуждений Линден-Белла (1979).

Мы показали также, что ориентация больших осей орбит может поменяться на противоположную в определенных областях диска при тех же соотношениях между знаками скорости прецессии

и ее ЛБ-производной, если спадание плотности бара $\sigma_B(r)$ на периферию диска достаточно быстрое. В этом случае в области границы, $r \sim a$, а в некоторых случаях и далее к периферии диска, амплитуда усредненного потенциала бара $b < 0$, в отличие от $b > 0$ в области основного тела бара, $r \lesssim a$, что приводит к смене ориентации орбит в этих областях.

Проведенное рассмотрение справедливо в области, где эпициклическое движение звезд можно разделить на быстрое (орбитальное) и медленное (прецессионное). Мы рассмотрели два типа характерных кривых вращения, в одном из которых такое разделение возможно в широкой по радиусу области (вплоть до радиуса коротации), а в другом — в окрестности внутреннего линдбладовского резонанса.

Работа поддержана КП19-270 “Вопросы происхождения и эволюции Вселенной с применением

методов наземных наблюдений и космических исследований” (подпрограмма II “Астрофизические объекты как космические лаборатории”), грантом Немецкого исследовательского фонда DFG — Project-ID 138713538 — SFB 881 (“The Milky Way System”, subproject A06), грантом фонда “Volkswagen Foundation” No. 90411, а также в рамках базового финансирования программы ФНИ И. 16 (И.Ш.).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бертин (G. Bertin), *Dynamics of Galaxies* (2nd ed., Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK, 2014).
2. Бинни, Тримейн (J. Binney and S. Tremaine), *Galactic Dynamics* (2nd ed., Princeton Univ. Press, NJ, 2008).
3. Вайнберг (M.D. Weinberg), *Astrophys. J.* **368**, 66 (1991).
4. Голдрейх, Тримейн (P. Goldreich and S. Tremaine), *Astrophys. J.* **243**, 1062 (1981).
5. Контопулос (G. Contopoulos), *Astrophys. J.* **201**, 566 (1975).
6. Линден-Белл (D. Lynden-Bell), *MNRAS* **187**, 101 (1979).
7. Марк (J.W.-K. Mark), *Astrophys. J.* **203**, 81 (1976).
8. Мерритт (D. Merritt), *IAUS* **127**, 315 (1987).
9. Местель (L. Mestel), *MNRAS* **126**, 553 (1963).
10. Палмер (P.L. Palmer), *Stability of collisionless stellar systems: mechanisms for the dynamical structure of galaxies* (Astrophys. Sp. Sci. Library, Dordrecht; Boston: Kluwer Acad. Publ., 1994).
11. Поляченко В.Л. и Фридман А.М., *Равновесие и устойчивость гравитирующих систем* (М.: Наука, 1976).
12. Поляченко (E.V. Polyachenko), *MNRAS* **348**, 345 (2004).
13. Поляченко (E.V. Polyachenko), *MNRAS* **357**, 559 (2005).
14. Поляченко В.Л., Поляченко Е.В., Шухман И.Г., Письма в Астрон. журн. **41**, 3 (2015a). [V.L. Polyachenko et al., *Astron. Lett.* **41**, 1 (2015a)].
15. Поляченко, Шухман (E.V. Polyachenko and I.G. Shukhman), *MNRAS* **451**, 5120 (2015b).
16. Поляченко, Берцик, Юст (E.V. Polyachenko, P. Berczik, and A. Just), *MNRAS* **462**, 3727 (2016).
17. Сандерс, Хантли (R.H. Sanders and J.M. Huntley), *Astrophys. J.* **209**, 53 (1976).
18. Саха (P. Saha), *MNRAS* **248**, 494 (1991).
19. Селвуд, Уилкинсон (J.A. Sellwood and A. Wilkinson), *Rep. Progress Phys.* **56**, 173 (1993).
20. Спарк, Селвуд (L.S. Sparke and J.A. Sellwood), *MNRAS* **225**, 653 (1987).
21. Шу (F.H. Shu), *Astrophys. J.* **158**, 505 (1969).