ПИСЬМА В АСТРОНОМИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2020, том 46, № 11, с. 783–791

ЭВОЛЮЦИОННЫЙ СТАТУС ПУЛЬСИРУЮЩИХ ПЕРЕМЕННЫХ ТИПА W Vir

© 2020 г. Ю. А. Фадеев[1*]

[1] Институт астрономии РАН, Москва, Россия

Поступила в редакцию 12.10.2020 г.
После доработки 16.10.2020 г.; принята к публикации 27.10.2020 г.

Проведены расчеты эволюции звезд населения II от главной последовательности до стадии белого карлика при начальном химическом составе звездного вещества $Y_0 = 0.25$, $Z_0 = 10^{-3}$ и начальной массе звезды $M_0 = 0.82\ M_\odot$. Рассчитаны 12 эволюционных последовательностей AGB и post–AGB звезд при различных значениях параметра скорости потери массы ($0.01 \leq \eta_{\rm B} \leq 0.12$) в формуле Блокера. Отдельные модели эволюционных последовательностей с массами $M = 0.536\ M_\odot$, $0.530\ M_\odot$ и $0.526\ M_\odot$, в которых финальная тепловая вспышка стала причиной возникновения петли на диаграмме Герцшпрунга–Рассела, были использованы как начальные условия при решении уравнений гидродинамики, описывающих радиальные звездные пульсации. Показано, что для рассмотренных эволюционных последовательностей область неустойчивости относительно радиальных пульсаций в фундаментальной моде простирается на диаграмме Герцшпрунга–Рассела от области красных гигантов до эффективной температуры $T_{\rm eff} \approx 6 \times 10^3$ K. Периоды пульсаций большинства гидродинамических моделей составляют от 15 до 50 сут, что находится в хорошем согласии с наблюдаемыми периодами звезд типа W Vir. Модели промежуточных спектральных классов с периодом $\Pi > 50$ сут располагаются в верхней части диаграммы Герцшпрунга–Рассела в области полуправильных пульсирующих переменных. Таким образом, пульсирующие переменные типа W Vir являются маломассивными post-AGB звездами на стадии финальной тепловой вспышки гелиевого слоевого источника.

Ключевые слова: звездная эволюция, пульсации звезд, звезды — переменные и пекулярные, цефеиды населения II.

DOI: 10.31857/S0320010820110029

ВВЕДЕНИЕ

Пульсирующие переменные типа W Wir принадлежат к цефеидам второго типа населения и наблюдаются как среди звезд сферической составляющей галактического поля, так и в составе шаровых звездных скоплений. Характерные значения периода изменения блеска этих пульсирующих переменных составляют от 8 до 35 сут (Самусь и др., 2017). Примечательной особенностью звезд W Vir являются сильные эмиссионные линии водорода, возникающие при возрастании блеска (Джой, 1937). Расщепление линий поглощения металлов, наблюдаемое одновременно с водородной эмиссией, находит объяснение в рамках модели ударной волны, периодически распространяющейся в звездной атмосфере на стадии расширения ее внешних слоев (Абт, 1954; Уитни, 1956; Валлерстейн, 1959). Периодические ударные волны в звездной атмосфере свидетельствуют о нелинейности радиальных колебаний большой амплитуды во внешних слоях пульсирующей звезды. Более сильные эффекты ударноволновой эмиссии наблюдаются в переменных типа RV Tau, которые являются продолжением звезд W Vir в сторону более длинных периодов и более высоких значений светимости (Валлерстейн, 2002).

По современным представлениям переменность типа W Vir возникает в маломассивных звездах с низким содержанием металлов, находящихся на эволюционной стадии двойного слоевого источника (Валлерстейн, Кокс, 1984). Согласно результатам эволюционных расчетов Шварцшильда и Херма (1970), такая звезда может на непродолжительное время покинуть асимптотическую ветвь гигантов (AGB) и переместиться на диаграмме Герцшпрунга–Рассела (ГР) в пределы полосы пульсационной неустойчивости цефеид. Из результатов более поздних расчетов следует, что необходимым условием образования петли эволюционно-

*Электронный адрес: fadeyev@inasan.ru

го трека на диаграмме ГР является возникновение тепловой вспышки гелиевого слоевого источника в момент времени, когда масса водородной оболочки уменьшается до значения $M_{\rm env} \approx 0.02M$, где M — масса звезды (Гингольд, 1974, 1976; Свейгарт и др., 1974).

Все выполненные до сих пор исследования эволюционного статуса звезд W Vir основывались на результатах расчетов звездной эволюции, а заключение о возникновении радиальных пульсаций делалось из сопоставления положения эволюционного трека звезды на диаграмме ГР относительно границ полосы пульсационной нестабильности цефеид и переменных типа RR Lyr. Например, Гингольд (1976) для этой цели использовал экстраполяцию результатов расчетов пульсационной неустойчивости переменных типа RR Lyr (Тагл, Ибен, 1972) в сторону более высоких значений светимости. С другой стороны, расчеты нелинейных пульсаций моделей звезд типа W Vir (Фадеев, Фокин, 1985; Бюхлер, Ковач, 1987; Ковач, Бюхлер, 1988; Фадеев, Мутсам, 1990; Сер и др., 1996 Смолец, 2016) проводились при отсутствии непосредственной связи между принятыми значениями массы и светимости гидродинамических моделей с результатами расчетов звездной эволюции, что также не позволяло уверенно определить эволюционный статус этих пульсирующих переменных. Как показано ниже, пульсационная переменность звезд W Vir в значительной степени зависит от соотношения массы и светимости, вследствие низкой плотности газа в оболочке пульсирующей звезды и значительного вклада поля излучения во внутренней энергии вещества. Более того, вариации массы звезды в пределах 4% сопровождаются приблизительно двукратным изменением ее светимости.

Целью данной работы является установление эволюционного статуса пульсирующих переменных типа W Vir на основе согласованных расчетов звездной эволюции и нелинейных звездных пульсаций. Общие принципы используемого подхода излагались в предыдущих статьях автора, посвященных исследованию классических цефеид (Фадеев, 2018) и post-AGB звезд (Фадеев, 2019а,б).

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ ЗВЕЗДНОЙ ЭВОЛЮЦИИ

В данной работе звездная эволюция рассматривалась от главной последовательности до стадии белого карлика со светимостью $L \sim L_\odot$ при начальных относительных массовых содержаниях гелия и более тяжелых элементов, соответствующих типичным шаровым звездным скоплениям: $Y_0 = 0.25$ (Саларис и др., 2004) и $Z_0 = 0.001$ (Кателан, 2004). Предполагалось, что масса звезды на начальной главной последовательности составляет $M_0 = 0.82\ M_\odot$, так что возраст рассматриваемых ниже моделей звезд W Vir составляет $t_{\rm ev} = 1.244 \times \times 10^{10}$ лет.

Расчеты эволюционных последовательностей проводились с помощью программы MESA версии 12778 (Пакстон и др., 2019). При решении уравнений нуклеосинтеза использовалась сетка реакций ‘pp_cno_extras_o18_ne22.net’ с 26 изотопами от водорода ^{1}H до магния ^{24}Mg, связанными 81 реакцией. Скорости термоядерных реакций рассчитывались с использованием базы данных JINA Reaclib (Сайбурт и др., 2010). Конвективное перемешивание звездного вещества рассматривалось по теории Бём–Витензе (1958) при отношении длины пути перемешивания к шкале высот по давлению $\alpha_{\rm MLT} = \Lambda/H_{\rm P} = 2.0$. Дополнительное перемешивание на границах конвективной неустойчивости рассчитывалось по формуле Хервига (2000) при значениях параметров $f = 0.016$ и $f_0 = 0.004$. Расчеты эволюционной стадии термоядерного горения гелия в ядре проводились с использованием опции ‘conv_premix_avoid_increase’, что позволило почти полностью исключить резкие изменения центрального содержания гелия и избежать возникновения ложных петель эволюционного трека на диаграмме ГР. Скорость потери массы на стадии, предшествующей AGB, рассчитывалась по формуле Раймерса (1975) при значении параметра $\eta_{\rm R} = 0.5$, тогда как на более поздних стадиях эволюции использовалась формула Блокера (1995). Приняв во внимание существующие неопределенности в наблюдательных оценках скорости потери массы на стадии AGB, мы рассчитали двенадцать эволюционных последовательностей при значениях параметра формулы Блокера $0.01 \le \eta_{\rm B} \le 0.12$, распределенных с постоянным шагом $\Delta\eta_{\rm B} = 0.01$.

Результаты эволюционных расчетов иллюстрируются на рис. 1, где показаны треки эволюционных последовательностей на стадиях AGB и post-AGB, рассчитанные при значениях параметра скорости потери массы в формуле Блокера $\eta_{\rm B} = 0.03$, 0.07 и 0.1. Следуя Миллеру Бертолами (2016), мы полагаем, что переход из стадии AGB в стадию post-AGB происходит при массе водородной оболочки $M_{\rm env} \le 0.01M$. На рис. 1 этот этап эволюции отмечен на каждом треке незаполненным кружком, тогда как заполненным кружком указан максимум генерации энергии гелиевого слоевого источника финальной тепловой вспышки.

Наибольший интерес для данной работы представляют эволюционные изменения в звезде, происходящие в интервале эффективных температур 4×10^3 K $\lesssim T_{\rm eff} \lesssim 6 \times 10^3$ K. Поэтому на рис. 2 эволюционные треки показаны в увеличенном масштабе для соответствующей области диаграммы ГР.

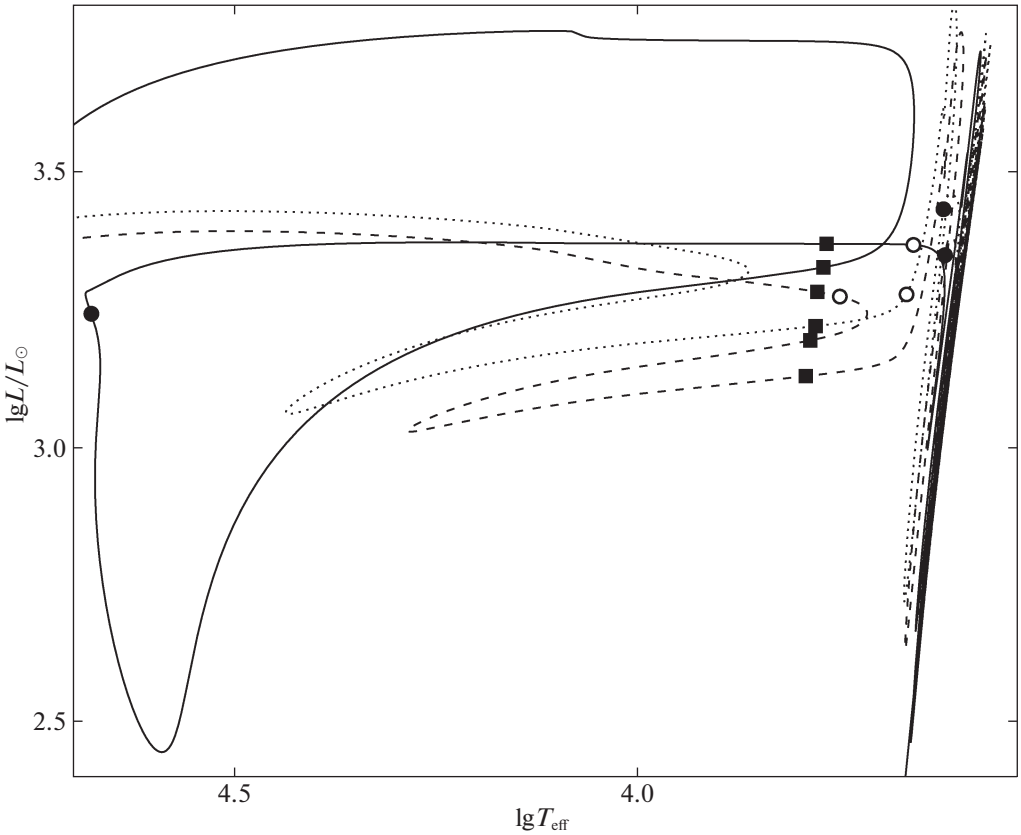

Рис. 1. Эволюционные треки звезд на диаграмме ГР при значениях параметра скорости потери массы $\eta_{\rm B} = 0.1$ (сплошная линия), $\eta_{\rm B} = 0.07$ (штриховая линия) и $\eta_{\rm B} = 0.03$ (пунктирная линия). Заполненными кружками отмечены максимумы светимости гелиевого слоевого источника финальной тепловой вспышки, незаполненными кружками — начало стадии post-AGB, заполненными квадратами — голубая граница области пульсационной неустойчивости, определенная из гидродинамических расчетов.

Основные характеристики эволюционных моделей перечислены в табл. 1, где $n_{\rm TP}$ и $\langle \Delta t_{ip} \rangle$ — число тепловых вспышек на стадии AGB и средний интервал времени между вспышками, M и L — масса и светимость звезды в начале стадии post−AGB при массе водородной оболочки звезды $M_{\rm env} = 0.01M$, $M^{\star}_{\rm env}$ — масса водородной оболочки в момент максимума светимости гелиевого слоевого источника. Знак '−' в последней колонке таблицы означает отсутствие петли на диаграмме ГР, связанной с финальной тепловой вспышкой.

Таблица 1. Основные характеристики эволюционных последовательностей

$\eta_{\rm B}$	$n_{\rm TP}$	$\langle \Delta t_{\rm ip} \rangle$, 10^6 лет	$M/M_\odot$	$L/L_\odot$	$M^{\star}_{\rm env}/M_\odot$	
0.01	7	0.234	0.550	3342	0.009	
0.02	6	0.236	0.541	3093	0.005	
0.03	5	0.237	0.536	1883	0.025	
0.04	5	0.238	0.535	2818	0.004	
0.05	4	0.235	0.533	2637	0.062	–
0.06	3	0.376	0.531	2291	0.033	–
0.07	4	0.233	0.529	1866	0.035	
0.08	4	0.232	0.529	5448	0.020	–
0.09	4	0.237	0.528	2372	0.005	
0.10	4	0.236	0.528	2315	0.004	
0.11	4	0.235	0.527	2218	0.004	
0.12	3	0.233	0.526	2040	0.061	–

Уменьшение числа тепловых вспышек $n_{\rm TP}$ с ростом скорости потери массы связано с сокращением времени жизни звезды на стадии AGB. На рис. 3 показаны графики изменения светимости гелиевого слоевого источника $L_{\rm He}$ для эволюционных последовательностей $\eta_{\rm B} = 0.01$ и $\eta_{\rm B} = 0.1$, где для удобства графического представления время эволюции вдоль горизонтальной оси отсчитывается от момента времени $t_{\rm TP1}$ первой тепловой вспышки гелиевого слоевого источника. Из представленных на рис. 3 зависимостей видно, что при десятикратном увеличении скорости потери массы время жизни на стадии AGB сокращается приблизительно вдвое при почти неизменном среднем интервале времени между вспышками.

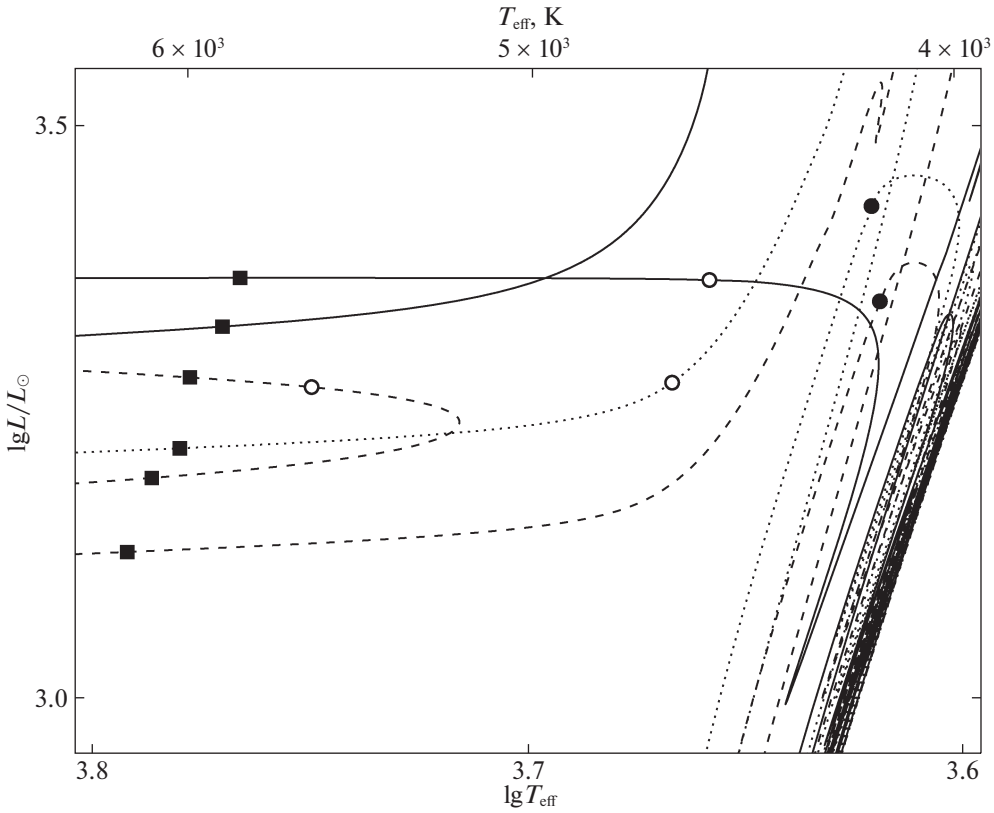

Рис. 2. То же, что на рис. 1, но в увеличенном масштабе для области диаграммы ГР, ограниченной асимптотической ветвью гигантов и границей пульсационной неустойчивости.

Для возникновения петли эволюционного трека на стадии post-AGB необходимо, чтобы финальная тепловая вспышка гелиевого слоевого источника происходила при массе водородной оболочки $M_{\rm env} \approx 0.02M$ (Гингольд, 1974). Как видно из табл. 1, результаты проведенных в данной работе расчетов находятся в согласии с этим условием, поскольку в трех эволюционных последовательностях ($\eta_{\rm B} = 0.05$, 0.06 и 0.12), помеченных знаком '–', масса оболочки во время финальной тепловой вспышки оказывается значительно больше. Следует заметить, что при $\eta_{\rm B} = 0.08$ масса оболочки в момент финальной тепловой вспышки составляет $M_{\rm env} = 0.020M$, однако петля эволюционного трека простирается на диаграмме ГР только до эффективных температур $T_{\rm eff} \approx 5000$ K. Поэтому в табл. 1 эта эволюционная последовательность помечена как не имеющая петли эволюционного трека. Данный случай иллюстрирует тот факт, что для образования протяженной петли эволюционного трека на диаграмме ГР, помимо достаточно малого значения массы водородной оболочки в момент финальной тепловой вспышки, необходимо выполнение ряда других условий. В частности, появление петли зависит от скорости изменения массы водородной оболочки, скоростей изменения массовой координаты водородного и гелиевого слоевых источников, плотности и температуры в слое газа, где может произойти тепловая вспышка.

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ ЗВЕЗДНЫХ ПУЛЬСАЦИЙ

В согласованных расчетах звездной эволюции и нелинейных звездных пульсаций отдельные модели эволюционной последовательности, описывающие строение звезды в гидростатическом равновесии, используются как начальные условия при решении уравнений радиационной гидродинамики. Система уравнений гидродинамики расширена транспортными уравнениями нестационарной турбулентной конвекции (Куфюс, 1986) и описана в более ранней статье автора (Фадеев, 2013).

При решении задачи Коши для уравнений гидродинамики предполагается, что роль начальных возмущений играют погрешности интерполирования, сопровождающие пересчет значений физических величин (радиус r, светимость L_r, давление P, температура T) эволюционной модели в лагранжеву систему координат гидродинамической модели.

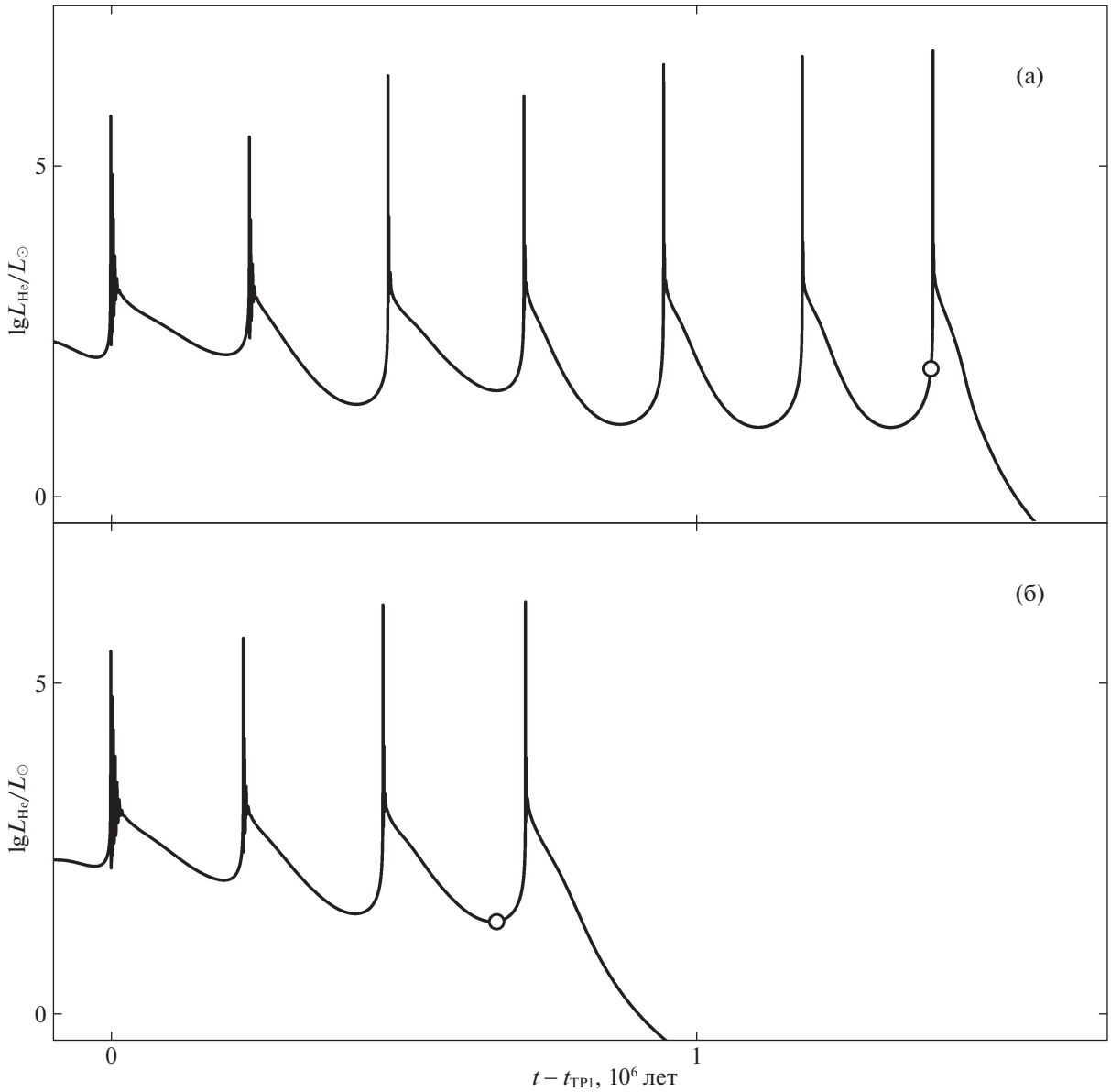

Рис. 3. Светимость гелиевого слоевого источника L_{He} на стадии AGB при значениях параметра скорости потери массы $\eta_B = 0.01$ (а) и $\eta_B = 0.1$ (б). Незаполненным кружком на графиках отмечен момент времени $M_{env} = 0.01M$, соответствующий началу стадии post-AGB. Время вдоль горизонтальной оси отсчитывается от первой тепловой вспышки в момент времени t_{TP1}.

Расчеты звездной эволюции на заключительной стадии AGB проводились при числе массовых зон $N_{MESA} \sim 10^4$, тогда как число лагранжевых узлов гидродинамических моделей составляло $N = 500$. Внутренняя граница гидродинамической модели определялась в слоях с лучистым переносом энергии, температурой газа $T \sim 10^6$ K и радиусом слоя $r \lesssim 0.05R$, где R — радиус внешней границы эволюционной модели. Гидродинамические расчеты проводилсь в предположении, что радиус и светимость на внутренней границе остаются неизменными на всем отрезке решения задачи Коши.

Если звезда устойчива относительно радиальных колебаний, то решение уравнений гидродинамики описывает затухающие колебания и, как в случае пульсационной неустойчивости, амплитуда колебаний экспоненциально возрастает со временем. Основное отличие пульсирующих переменных типа W Vir от классических цефеид заключается в высоких темпах как затухания, так и роста амплитуды. Например, типичные значения

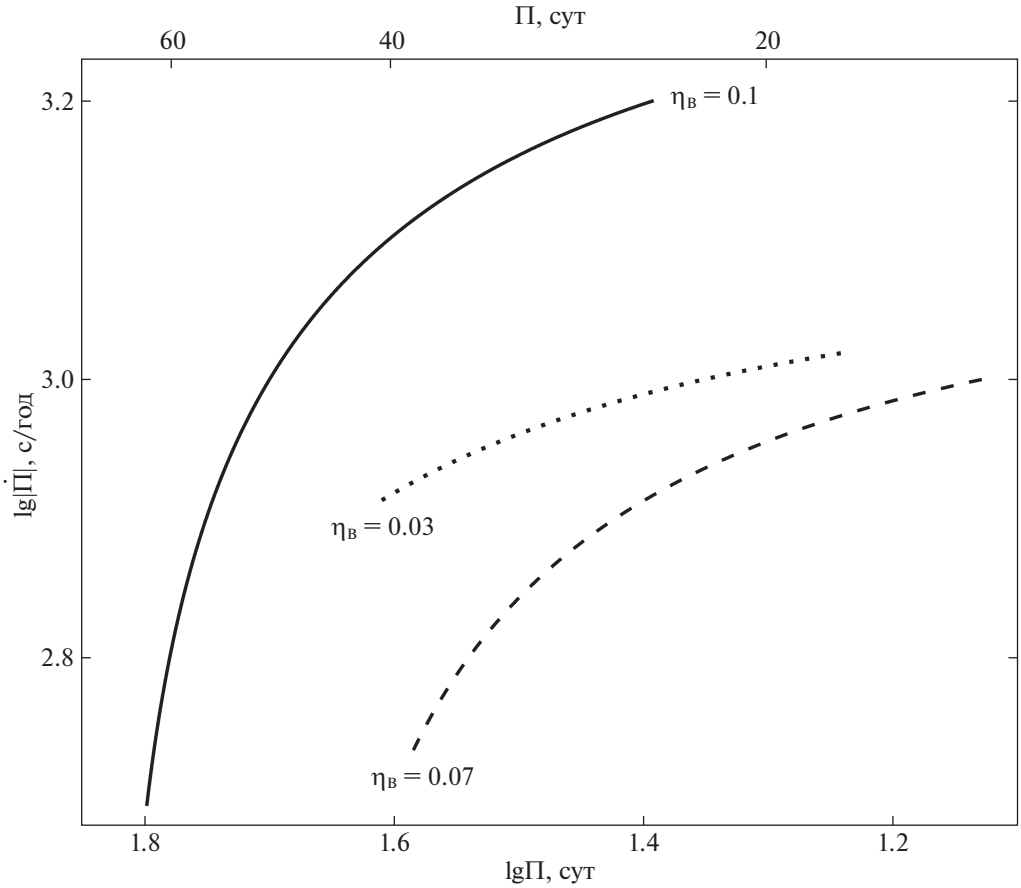

Рис. 4. Диаграмма период — скорость изменения периода для стадии эволюции от AGB до первого пересечения голубой границы пульсационной неустойчивости.

темпа роста кинетической энергии пульсационных движений моделей звезд W Vir составляют $\eta = \Pi d \ln E_{\mathrm{K,max}}/dt \approx 1$, где П — период пульсаций, $E_{\mathrm{K,max}}$ — максимальное за период значение кинетической энергии.

Гидродинамические расчеты нелинейных звездных пульсаций были проведены для отдельных моделей звезд эволюционных последовательностей, рассчитанных при значениях параметра скорости потери массы $\eta_{\mathrm{B}} = 0.03$, 0.7 и 0.1. Анализ пульсационной неустойчивости показал, что область неустойчивости относительно радиальных колебаний в фундаментальной моде простирается от AGB до эффективных температур $T_{\mathrm{eff}} \approx 6000$ K. Оценки T_{eff}, соответствующие границе пульсационной неустойчивости ($\eta = 0$), показаны на рис. 1 и 2.

Для установления эволюционного статуса звезд W Vir необходимо сопоставление теоретически рассчитанных значений периода пульсаций гидродинамических моделей с наблюдаемыми периодами изменения блеска. Как видно из рис. 1, при значении параметра $\eta_{\mathrm{B}} = 0.03$ звезда лишь один раз пересекает границу нестабильности во время эволюции из области красных гигантов. Петля эволюционного трека, связанная с финальной тепловой вспышкой, оказывается недостаточно протяженной, и поворот эволюционного трека происходит при эффективной температуре $T_{\mathrm{eff}} \approx 7300$ K до пересечения голубой границы области пульсационной неустойчивости. Гидродинамические модели эволюционных последовательностей $\eta_{\mathrm{B}} = 0.07$ и $\eta_{\mathrm{B}} = 0.1$ оказываются в пределах области пульсационной неустойчивости дважды: при эволюции от AGB и затем во время эволюции вдоль петли эволюционного трека, когда их эффективная температура падает ниже $T_{\mathrm{eff}} \approx 6000$ K.

На рис. 4 приведена диаграмма период–скорость изменения периода для стадии эволюции от AGB до первого пересечения голубой границы полосы нестабильности. Начальная точка каждого графика представляет собой гидродинамическую модель с эффективной температурой $T_{\mathrm{eff}} \approx 5000$ K ($\eta_{\mathrm{B}} = 0.03$ и 0.07) и $T_{\mathrm{eff}} \approx 4500$ ($\eta_{\mathrm{B}} = 0.1$). Эволюция вдоль кривых на рис. 4 слева направо

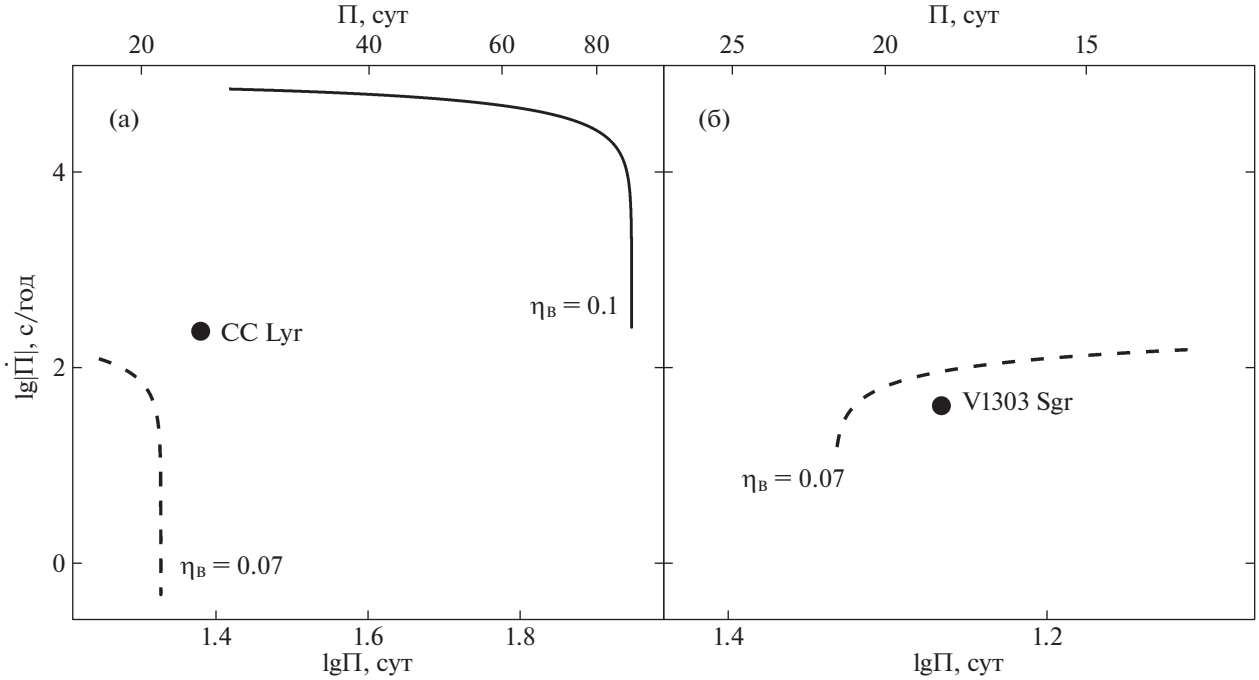

Рис. 5. Диаграммы период — скорость изменения периода после второго пересечения голубой границы полосы нестабильности на стадии возрастания (а) и убывания (б) периода. Наблюдательные оценки П и $\dot{\Pi}$ звезд CC Lyr и V1303 Sgr приведены по данным работ Бердникова и др. (2020) и Бартона (1986). Сплошной и штриховой линиями показаны эволюционные последовательности $\eta_B = 0.07$ и $\eta_B = 0.1$.

связана с уменьшением периода, а конечная точка каждого графика соответствует голубой границе пульсационной неустойчивости. Время эволюции возрастает от 2200 лет при $\eta_B = 0.03$ до 3200 лет при $\eta_B = 0.1$.

Изменения П и $\dot{\Pi}$, связанные с эволюцией вдоль петлеобразного эволюционного трека после второго пересечения голубой границы пульсационной неустойчивости до достижения максимального периода, показаны на рис. 5а. В моделях эволюционной последовательности $\eta_B = 0.07$ период пульсаций увеличивается от $\Pi = 17.6$ сут до $\Pi = 21.2$ сут. Эти изменения происходят при массе водородной оболочки $M_{\rm env} = 0.011M$ и продолжаются $\approx$5800 лет. В моделях эволюционной последовательности $\eta_B = 0.1$ масса оболочки уменьшается от $M_{\rm env} = 4.3 \times 10^{-3}$ до $M_{\rm env} \approx 10^{-3}$, а период радиальных пульсаций возрастает от 26.3 до 89 сут в течение 165 лет. Таким образом, звезда с массой $M = 0.526\ M_\odot$ за полтора столетия из переменной типа W Vir превращается в полуправильную пульсирующую переменную.

Гидродинамические расчеты звездных пульсаций на стадии сокращающегося периода после второго пересечения границы пульсационной неустойчивости были проведены только для эволюционной последовательности $\eta_B = 0.07$, поскольку при $\eta_B = 0.1$ периоды пульсаций значительно превосходят верхний предел периодов звезд W Vir. Результаты расчетов показаны на рис. 5б. Масса водородной оболочки изменяется от $M_{\rm env} = 0.011M$ до $4.6 \times 10^{-3}M$, а период сокращается от 21.4 до 12.7 сут в течение $\approx 9 \times 10^3$ лет.

Нелинейность радиальных пульсаций переменных типа W Vir является причиной отсутствия строгой повторяемости изменений блеска, которая характерна для большинства классических цефеид. Это существенно затрудняет наблюдательные оценки скорости изменения периода, и до сегодняшних дней известно всего несколько звезд типа W Vir с измеренными значениями $\dot{\Pi}$. Для сравнения результатов данной работы с наблюдениями мы выбрали две переменных типа W Vir с наиболее надежными $O - C$ диаграммами и определенными на их основе значениями скорости изменения периода. Одна из этих звезд CC Lyr с периодом $\Pi = 24.01$ сут и скоростью возрастания периода $\dot{\Pi} = 229.3$ с/год (Бердников и др., 2020) показана на рис. 5а, другая — V1303 Cyg с периодом $\Pi = 18.45$ сут и скоростью сокращения периода $\dot{\Pi} = -40$ с/год (Бартон, 1986) показана на рис. 5б. Положение наблюдательных оценок П и $\dot{\Pi}$ отно-

сительно графиков на рис. 5 свидетельствует об отсутствии явного противоречия между теорией и наблюдениями.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Результаты согласованных расчетов звездной эволюции и нелинейных звездных пульсаций позволяют уверенно заключить, что пульсирующие переменные типа W Vir являются звездами post-AGB, претерпевающими финальную тепловую вспышку гелиевого слоевого источника. Только в этом случае светимость звезды после оставления ею области красных гигантов находится в пределах $10^3 L_\odot \lesssim L \lesssim 2 \times 10^3 L_\odot$, а периоды радиальных пульсаций (10 сут $\lesssim \Pi \lesssim$ 50 сут) соответствуют периодам изменения блеска звезд W Vir. Необходимо заметить, что приведенные результаты подтверждают выводы Гингольда (1974) о тепловой вспышке непосредственно перед переходом звезды в стадию post-AGB как необходимом условии появления пульсационной переменности типа W Vir. Термин финальная тепловая вспышка появился позднее (Ибен, 1982; Шонбернер, 1983).

Перемещение звезды по диаграмме ГР после финальной тепловой вспышки обусловлено изменениями, которые происходят в тепловой шкале времени водородной оболочки звезды. Малая масса оболочки и значительный вклад поля излучения во внутренней энергии вещества являются причиной значительной скорости этих изменений. Наглядной иллюстрацией ускорения эволюции звезды являются гидродинамические модели эволюционной последовательности $\eta_{\rm B} = 0.1$ после второго пересечения границы пульсационной неустойчивости. Подобным объектом, период пульсаций которого увеличивается на шкале времени $\sim 10^2$ лет, является V725 Sgr. В начале XX века эта пульсирующая переменная принадлежала к цефеидам населения II, тогда как в настоящее время превратилась в полуправильную пульсирующую переменную с периодом 80 сут $< \Pi <$ 100 сут (Перси и др., 2006).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абт (H.A. Abt), Astrophys. J. Suppl. Ser. **1**, 63 (1954).
2. Бартон (A.S. Barton), J. Am. Associat. Var. Star Observ. 15, 246 (1986).
3. Бердников Л.Н., Якоб А.М., Пастухова Е.Н., Письма в Астрон. журн. **46**, 669 (2020) [L.N. Berdnikov, A.M. Yakob, and E.N. Pastukhova, Astron. Lett. **46**, 630 (2020)].
4. Бём–Витензе (E. Böhm–Vitense), Zeitschrift für Astrophys. **46**, 108 (1958).
5. Блокер (T. Blöcker), Astron. Astrophys. **297**, 727 (1995).
6. Бюхлер, Ковач (J.R. Buchler and G. Kovacs), Astrophys. J. **320**, L57 (1987).
7. Валлерстейн (G. Wallerstein), Astrophys. J. **130**, 560 (1959).
8. Валлерстейн (G. Wallerstein), Publ. Astron, Soc. Pacific **114**, 689 (2002).
9. Валлерстейн, Кокс (G. Wallerstein and A.N. Cox), Publ. Astron, Soc. Pacific **96**, 677 (1984).
10. Гингольд (R.A. Gingold), Astrophys. J. **193**, 177 (1974).
11. Гингольд (R.A. Gingold), Astrophys. J. **204**, 116 (1976).
12. Джой (A.H. Joy), Astrophys. J. **86**, 363 (1937).
13. Ибен (I. Iben), **260**, 821 (1982).
14. Кателан (M. Catelan), Astrophys. J. **600**, 409 (2004).
15. Ковач, Бюхлер (G. Kovacs and J.R. Buchler), Astrophys. J. **334**, 971 (1988).
16. Куфюс (R. Kuhfuß), Astron. Astrophys. **160**, 116 (1986).
17. Миллер Бертолами (M.M. Miller Bertolami), Astron. Astrophys. **588**, A25 (2016).
18. Пакстон и др. (B. Paxton, R. Smolec, J. Schwab, A. Gautschy, L. Bildsten, M. Cantiello, A. Dotter, R. Farmer, J.A. Goldberg, A.S. Jermyn, S.M. Kanbur, P. Marchant, A. Thoul, R.H.D. Townsend, W.M. Wolf, M. Zhang, and F.X. Timmes), Astrophys. J. Suppl. Ser. **243**, 10 (2019).
19. Перси и др. (J.R. Percy, A. Molak, H. Lund, D. Overbeek, A.F. Wehlau, and P.F. Williams), Publ. Astron. Soc. Pacific **118**, 805 (2006).
20. Раймерс (D. Reimers), *Problems in stellar atmospheres and envelopes* (Ed. B. Baschek, W.H. Kegel, G. Traving, New York: Springer-Verlag, 1975), p. 229.
21. Сайбурт и др. (R.H. Cyburt, A.M. Amthor, R. Ferguson, Z. Meisel, K. Smith, S. Warren, A. Heger, R.D. Hoffman, T. Rauscher, A. Sakharuk, H. Schatz, F.K. Thielemann, and M. Wiescher), Astrophys. J. Suppl. Ser. **189**, 240 (2010).
22. Саларис и др. (M. Salaris, M. Riello, S. Cassisi, and G. Piotto), Astron. Astrophys. **420**, 911 (2004).
23. Самусь Н.Н., Казаровец Е.В., Дурлевич О.В., Киреева Н.Н., Пастухова Е.Н., Астрон. журн. **94**, 87 (2017) [N.N. Samus', E.V. Kazarovets, O.V. Durlevich, N.N. Kireeva, and E.N. Pastukhova, Astron. Rep. **61**, 80 (2017)].
24. Свейгарт и др. (A.V. Sweigart, J.G. Mengel, and P. Demarque), Astron. Astrophys. **30**, 13 (1974).
25. Сер и др. (T. Serre, Z. Kollath and J.R. Buchler), Astron. Astrophys. **311**, 845 (1996).
26. Смолец (R. Smolec), MNRAS **456**, 3475 (2016).
27. Тагл, Ибен (R.S. Tuggle and I. Iben), Astrophys. J. **178**, 455 (1972).
28. Уитни (C. Whitney), Annales d'Astrophysique **19**, 142 (1956).

29. Фадеев Ю.А., Письма в Астрон. журн. **39**, 342 (2013) [Yu.A. Fadeyev, Astron. Lett. **39**, 306 (2013)].
30. Фадеев Ю.А., Письма в Астрон. журн. **44**, 851 (2018) [Yu.A. Fadeyev, Astron. Lett. **44**, 782 (2018)].
31. Фадеев Ю.А., Письма в Астрон. журн. **45**, 578 (2019а) [Yu.A. Fadeyev, Astron. Lett. **45**, 521 (2019a)].
32. Фадеев Ю.А., Письма в Астрон. журн. **45**, 706 (2019б) [Yu.A. Fadeyev, Astron. Lett. **45**, 655 (2019b)].
33. Фадеев, Фокин (Yu.A. Fadeyev and A.B. Fokin), Astrophys. Space Sci. **111**, 355 (1985).
34. Фадеев, Мутсам (Yu.A. Fadeyev and H. Muthsam), Astron. Astrophys. **234**, 188 (1990).
35. Хервиг (F. Herwig), Astron. Astrophys. **360**, 952 (2000).
36. Шварцшильд, Херм (M. Schwarzschild and R. Härm), Astrophys. J. **160**, 341 (1970).
37. Шонбернер (D. Schoenberner), Astrophys. J. **272**, 708 (1983).