

## КАРТИРОВАНИЕ БЕЛЫХ КАРЛИКОВ В СИСТЕМАХ ТИПА АМ НЕР

© 2020 г. А. И. Колбин<sup>1,2\*</sup>, Н. В. Борисов<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Специальная астрофизическая обсерватория РАН, Нижний Архыз, Россия

<sup>2</sup>Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань, Россия

Поступила в редакцию 25.08.2020 г.

После доработки 04.11.2020 г.; принята к публикации 26.11.2020 г.

Описываются два алгоритма восстановления распределения аккреционных пятен по поверхности белых карликов в переменных типа АМ Нер. Оба алгоритма предполагают использование фотополариметрических наблюдений. В первом используется предположение геометрической тонкости пятен, а путем описания наблюдательных данных находится ориентация магнитного диполя белого карлика и положение аккреционного пятна. Во втором варианте проводится поиск непрерывного распределения яркости по звездной поверхности методом регуляризации Тихонова. Выполнены симуляции картирования аккреционных пятен обоими алгоритмами с демонстрацией их перспективности для изучения звезд типа АМ Нер.

*Ключевые слова:* звезды типа АМ Нер, поляриметрия, аккреция.

DOI: 10.31857/S0320010820120025

### ВВЕДЕНИЕ

Поляры (или переменные типа АМ Нер) представляют собой тесные двойные системы, где первичным компонентом является сильно замагниченный белый карлик ( $B \sim 10\text{--}100$  МГс), а вторичным — холодная звезда главной последовательности, заполняющая свою полость Роша. Вторичный компонент инжектирует материал из окрестностей точки Лагранжа  $L_1$  в полость Роша первичного компонента, где он начинает движение по баллистической траектории. После достижения области стагнации, где динамическое давление струи сравнивается с магнитным давлением ( $\rho v^2 = B^2/8\pi$ ), ионизированное вещество перетекает вдоль линий магнитного поля на поверхность аккретора. Благодаря сильному магнитному полю, область стагнации находится на достаточно большом удалении от белого карлика и не позволяет аккрецируемому веществу обернуться вокруг аккретора с образованием аккреционного диска.

При взаимодействии падающего со сверхзвуковой скоростью газа с поверхностью белого карлика образуется ударный фронт, после которого вещество разогревается до высоких температур ( $T \sim 10\text{--}50$  кэВ) путем преобразования части кинетической энергии в тепловую. Высота ударного фронта над поверхностью звезды определяется темпом аккреции и эффективностью охлаждения

газа в послеударной области. Существуют два основных механизма охлаждения вещества в послеударной области: тормозное рентгеновское излучение и циклотронное излучение в оптическом диапазоне. Согласно современным гидродинамическим расчетам, высота ударного фронта над поверхностью белого карлика в полярах составляет  $H \sim 0.01\text{--}0.1 R_{WD}$  ( $R_{WD}$  — радиус белого карлика). Наименьшие значения  $H$  соответствуют высоким темпам аккреции и сильным магнитным полям, когда эффективность охлаждения рентгеновским и циклотронным излучением наиболее высока. Более подробно с физикой ударных областей в полярах можно ознакомиться в обзорной работе Ву (2000).

Согласно расчетам Мукаи (1988), взаимодействие падающего газа с поверхностью белого карлика происходит в довольно растянутой области. Это объясняется неоднородным распределением плотности в сечении струи, благодаря чему менее плотная оболочка “захватывается” магнитным полем на большем удалении от аккретора, а более плотное ядро проникает глубже в магнитосферу звезды. Таким образом, в случае малых  $H$  ударную область можно рассматривать как протяженное пятно на поверхности белого карлика (далее аккреционное пятно). Восстановление же распределения аккреционных пятен по звездной поверхности может дать важную информацию о структуре аккреционной струи в ее сечении и об особенностях взаимодействия сверхзвуковой плазмы с магнитным полем в области стагнации.

\*Электронный адрес: kolbinalexander@mail.ru

В оптических спектрах поляров часто доминирует циклотронное излучение, рождающееся в аккреционном пятне. Кванты циклотронного излучения испускаются электронами, вращающимися вокруг линий магнитного поля на циклотронных частотах  $\omega_c = eB/m_e c$ . Частота излучения электронов кратна  $\omega_c$ , благодаря чему в спектрах поляров наблюдаются гармоники циклотронной линии, уширенные тепловым движением электронов. Разность коэффициентов поглощения обыкновенных и необыкновенных волн приводит к высокой степени поляризации излучения полярных ( $\sim 10\%$ ). Интенсивность циклотронного излучения и его поляризационные характеристики сильно зависят от ориентации силовых линий по отношению к наблюдателю (Чэнмьюгэм, Далк, 1981). Последнее дает возможность восстановления координат и формы пятен на основе фотополариметрических наблюдений.

В работах Поттера и др. (1997), Туохи и др. (1988) было показано, что используемые ранее модели с полярным аксисимметричным пятном являются слишком простыми для описания кривых блеска полярных, а наблюдения лучше описываются растянутыми аркообразными пятнами. К такому же заключению пришли Бойерманн, Стелла и др. (1987) при интерпретации рентгеновских наблюдений полярной звезды EF Eri. Аркообразные пятна также успешно применялись Рамсаем и др. (1996) для интерпретации фотополариметрических наблюдений RE J1844-74. Усовершенствованный вариант картирования был предложен Поттером и др. (1998). Их подход предполагал поиск непрерывного распределения яркости по поверхности белого карлика с описанием фотополариметрических наблюдений. Данный метод использовался для исследования полярных с различными параметрами компонентов и ориентацией орбитальной плоскости: V834 Cen (Поттер и др., 2004), ST LMi (Поттер, 2000), HU Aqr (Харроп-Аллин и др., 2001), CP Tuc (Рамсэй и др., 1999) и некоторых других.

В настоящей работе описываются алгоритмы, используемые в разработанных нами программных кодах фотополариметрического картирования белых карликов в полярных. Предлагаются два подхода к описанию фотополариметрических наблюдений. Первый основан на модели геометрически тонкого аккреционного пятна, положение которого согласуется с приближением траектории струи баллистической частью и магнитной частью, где аккрецируемый газ движется вдоль магнитных линий. Второй вариант не использует никаких предположений о форме пятен, а их распределение ищется на основе метода регуляризации Тихонова, обеспечивающего гладкость искомого решения и описание наблюдательных данных в пределах ошибок измерений.

Данная работа структурирована следующим образом. В разделе 1 описана методика расчета коэффициентов циклотронного поглощения, необходимых для определения интенсивности и поляризации излучения аккреционных пятен. Предположения о структуре аккреционных пятен, используемые для вычисления параметров Стокса, разобраны в разделе 2. Далее, в разделе 3 описываются модель магнитного белого карлика и способ интегрирования параметров Стокса по его наблюдаемому диску. В разделе 4 дается описание метода моделирования фотополариметрических наблюдений полярных в рамках простой модели аккреционного пятна, предполагающей его геометрическую тонкость. Приводятся примеры моделирования кривых блеска и поляризации излучения, представлены результаты тестирования алгоритма поиска положения пятен и ориентации магнитного диполя на зашумленных модельных данных. В разделе 5 излагаются детали картирования поверхности белого карлика при помощи метода регуляризации Тихонова. Приводятся результаты симуляций картирования белого карлика на зашумленных модельных данных. В заключение резюмируются результаты выполненной работы.

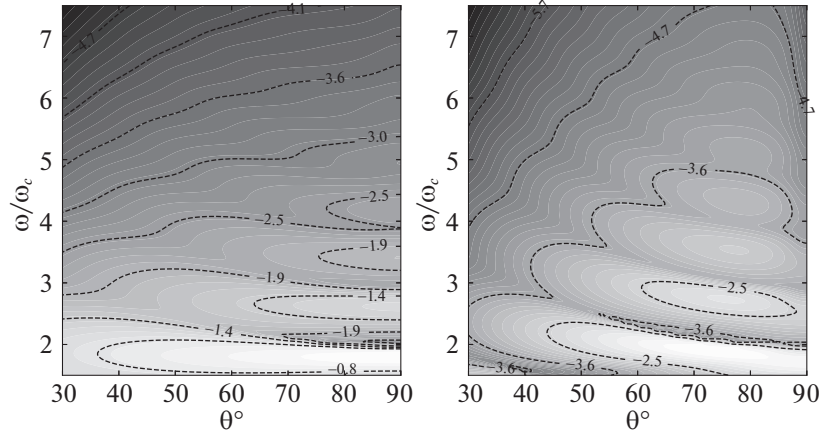
## 1. КОЭФФИЦИЕНТЫ ПОГЛОЩЕНИЯ

Как было сказано ранее, частоты циклотронного излучения примерно равны кратностям циклотронной частоты  $\omega_c$ . В условиях горячей плазмы необходимо учитывать смещение частоты излучения, вызванное релятивистским эффектом Доплера. Так, электрон, движущийся со скоростью  $\mathbf{v}$ , излучает на частотах

$$\omega = \frac{n\omega_c}{\gamma[1 - \beta_{\parallel} \cos \theta]}, \quad (1)$$

где  $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$  — фактор Лоренца,  $\beta = \mathbf{v}/c$  — безразмерная скорость,  $\beta_{\parallel}$  — компонента  $\beta$ , параллельная силовым линиям поля,  $\theta$  — угол между линией магнитного поля и направлением на наблюдателя,  $n$  — целое число ( $n > 0$ ). Допплеровские смещения частот излучения тепловых электронов приводят к уширению гармоник циклотронной линии.

Вычисление коэффициентов циклотронного излучения тепловых электронов  $j_{\pm}$  проводилось сверткой коэффициентов излучения единичных электронов с релятивистским распределением Максвелла для двух нормальных мод поляризации (см., например, работы Чэнмьюгэма, Далка, 1981; Вэета, Чэнмьюгэма, 1995). Здесь и далее обыкновенные волны будут обозначаться символом “+”, а необыкновенные — символом “-”. Для



**Рис. 1.** Карты зависимости  $\log \Psi_{\pm}$  от направления излучения, характеризуемого углом  $\theta$ , и отношения частот  $\omega/\omega_c$  для  $T_e = 25$  кэВ. Слева представлена карта функции  $\Psi_-$ , а справа — функции  $\Psi_+$ .

определения коэффициентов поглощения  $\alpha_{\pm}$  предполагается выполнение закона Кирхгофа  $\alpha_{\pm} = j_{\pm}/I_{RJ}$ , где  $I_{RJ} = k_B T_e \omega^2 / 8\pi^3 c^2$  — интенсивность Рэлея—Джинса на поляризационную моду. Итоговые выражения для определения коэффициентов поглощения имеют вид

$$\alpha_{\pm}(\omega/\omega_c, \theta, T_e) = \frac{\omega_p^2}{\omega_c c} \Psi_{\pm}(\omega/\omega_c, \theta, T_e), \quad (2)$$

$$\Psi_{\pm}(\omega/\omega_c, \theta, T_e) = \frac{\pi^2 \mu^2}{K_2(\mu)} \int_{-1}^1 d\beta_{\parallel} \times \quad (3)$$

$$\times \sum_{n=n_1}^{\infty} \frac{1}{1+a_{\pm}^2} \left( -\beta_{\perp} J'_n(n\xi) + [a_{\pm}(\cot \theta - \beta_{\parallel} \csc \theta) J_n(n\xi)] \right)^2 \times \exp(-\mu\gamma) \frac{\gamma^4}{n},$$

$$\xi = \frac{\beta_{\perp} \sin \theta}{(\omega/\omega_c)(1 - \beta_{\parallel} \cos \theta)}, \quad (4)$$

где  $J_n$  и  $J'_n$  — функция Бесселя  $n$ -го порядка и ее производная,  $K_2$  — модифицированная функция Бесселя второго рода,  $\mu = m_e c^2 / k_B T_e$ ,  $\omega_p = (4\pi N_e e^2 / m_e)^{1/2}$  — плазменная частота,  $\beta_{\perp}$  — компонента  $\beta$ , перпендикулярная линиям магнитного поля. Выражение для определения  $\beta_{\perp}$  следует из (1):  $\beta_{\perp}^2 = 1 - \beta_{\parallel}^2 - (\omega/\omega_c)^2 (1 - \beta_{\parallel} \cos \theta)^2 / n^2$ . Суммирование в (3) ведется от  $n$ , для которого  $\beta_{\perp}^2 \geq 0$ . Коэффициенты поляризации  $a_{\pm}$  определяются как

$$a_{\pm} = \frac{2(\omega/\omega_c) \cos \theta}{-\sin^2 \theta \pm [\sin^4 \theta + 4(\omega/\omega_c)^2 \cos^2 \theta]^{1/2}}, \quad (5)$$

где предполагается, что  $\omega \gg \omega_p$ .

Пример зависимости  $\Psi_{\pm}$  от отношения частот  $\omega/\omega_c$  и угла  $\theta$  представлен на рис. 1. Функции  $\Psi_{\pm}$  рассчитаны для температуры  $T_e = 25$  кэВ смещены относительно  $n\omega_c$  ( $n > 0$ ), благодаря релятивистскому эффекту Доплера. Видность максимумов уменьшается с увеличением номера гармоники. Прослеживается сильная зависимость коэффициентов поглощения от угла  $\theta$ . Значения  $\Psi_-$  значительно больше  $\Psi_+$ ,  $\Psi_-$  растет с увеличением  $\theta$ , однако этот рост в общем немонотонный, благодаря чувствительности частот гармоник к  $\theta$ , обусловленной эффектом Доплера. Продемонстрированная чувствительность коэффициентов поглощения к углу  $\theta$  является причиной сильной вращательно-модулированной переменности, наблюдаемой у полярных. Заметим, что рассчитанные нами коэффициенты хорошо согласуются с таблицами Вэета и Чэньюгэма (1995).

## 2. ЛОКАЛЬНЫЕ ПАРАМЕТРЫ СТОКСА

В настоящей работе предполагается, что аккреционные пятна на поверхности белого карлика состоят из множества малых источников циклотронного излучения (циклотронных источников). Так же как и Поттер и др. (1998), будем считать, что данные источники являются однородными по температуре и плотности. Кроме того, мы будем предполагать постоянную глубину источников вдоль луча зрения, не зависящую от ракурса, под которым проводятся наблюдения. Это приближение часто используется при анализе кривых блеска и фотополариметрических наблюдений (Поттер и др., 1997, 1998, 2004). Таким образом, циклотронные источники характеризуются электронной температурой  $T_e$  и безразмерным плазменным параметром  $\Lambda = \omega_p^2 \ell / c \omega_c$ , где  $\ell$  — геометрическая глубина источника вдоль луча зрения. Для упрощения задачи

будем считать, что все циклотронные источники имеют одинаковую температуру, плотность и геометрические размеры. При таких предположениях плазменный параметр источников  $\Lambda$  меняется лишь за счет магнитного поля ( $\Lambda \sim 1/B$ ).

Перенос поляризованного излучения в магнитоактивной плазме циклотронных источников описывается системой четырех взаимосвязанных уравнений переноса для параметров Стокса  $I, Q, U, V$  (см., например, Вэет, Чэнмыюгэм, 1995). В случае сильного фарадеевского вращения ( $\Phi \approx \omega_p^2 \omega_c \ell / \omega^2 c \gg 1$ ) и однородного магнитного поля параметры Стокса могут быть найдены путем решения независимых уравнений переноса для обыкновенных и необыкновенных волн. Для однородной среды их решение имеет вид

$$I_{\pm}(\omega, \theta) = I_{RJ} [1 - \exp(-\Psi_{\pm}(\omega, \theta, \Lambda))], \quad (6)$$

где  $I_{\pm}$  — интенсивности обыкновенных и необыкновенных волн,  $\Psi_{\pm}$  — коэффициенты поглощения в единицах  $\omega_p^2/c\omega_c$  (см. (3)). В настоящей работе мы учитываем только циклотронное поглощение, как наиболее сильное в условиях аккреционных пятен полярных в оптическом диапазоне (Меггитт, Викрамазингх, 1982). Согласно Рамати (1969), параметры Стокса циклотронного источника могут быть найдены как

$$\begin{aligned} I' &= I_+ + I_-, & (7) \\ Q' &= I_+ \left( \frac{1 - a_+^2}{1 + a_+^2} \right) + I_- \left( \frac{1 - a_-^2}{1 + a_-^2} \right), \\ U' &= 0, \\ V' &= 2 \left( \frac{I_+ a_+}{1 + a_+^2} + \frac{I_- a_-}{1 + a_-^2} \right), \end{aligned}$$

где коэффициенты поляризации  $a_{\pm}$  определяются по формуле (5). Локальные параметры Стокса  $S_s^{\ell}$ , т.е. параметры Стокса поверхности единичной площади, связаны с параметрами Стокса циклотронных источников как  $S_s^{\ell} = S'_s X$ , где  $X$  — плотность источников, а индекс  $s$  определяет тип параметра Стокса ( $s = \{I, Q, U, V\}$ ).

Параметры Стокса в фотометрической полосе вычисляются путем свертки спектров Стокса с функцией пропускания фильтра. Для ускорения вычислений параметров Стокса формируются трехмерные сетки параметров Стокса в фотометрических полосах (для напряженности магнитного поля  $B$ , углов  $\theta$  и параметров  $\Lambda$ ), которые затем интерполируются.

### 3. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ СТОКСА

Модель белого карлика представляет собой сферу единичного радиуса, которая вращается

против часовой стрелки, если смотреть со стороны полюса вращения  $P_r$ , обращенного к наблюдателю (рис. 2). Ось вращения звезды перпендикулярна орбитальной плоскости и наклонена на угол  $i$  ( $0^\circ \leq i \leq 90^\circ$ ) по отношению к лучу зрения. Предполагается, что магнитное поле белого карлика является дипольным. Ориентация магнитного диполя определяется наклоном его оси к оси вращения звезды  $\beta$  ( $0^\circ \leq \beta \leq 180^\circ$ ) и долготой магнитного полюса  $\psi$  ( $0^\circ \leq \psi \leq 360^\circ$ ). Долгота  $\psi$  отсчитывается от направления на центр масс вторичного компонента по направлению вращения белого карлика и, соответственно, по направлению орбитального движения вторичного компонента, ввиду синхронности вращения компонентов в полярках. Центр диполя может быть смещен относительно центра белого карлика в направлении магнитного полюса на расстояние  $a$  ( $-1 \leq a \leq 1$ ). Таким образом, модель может быть применена к белым карликам с разной напряженностью магнитного поля на противоположных полюсах, которые часто встречаются в полярках.

Введем три правые прямоугольные системы координат, которые назовем наблюдательной, вращающейся и магнитной. Некоторые их оси отмечены на рис. 2 подписями  $(o)$ ,  $(r)$  и  $(m)$  для наблюдательной, вращающейся и магнитной систем координат соответственно. Начало всех систем совпадает с геометрическим центром белого карлика. Ось  $X^{(o)}$  наблюдательной системы координат параллельна лучу зрения, а оси  $Y^{(o)}$  и  $Z^{(o)}$  лежат в картинной плоскости так, что  $Z^{(o)}$  совпадает с проекцией оси вращения звезды на эту плоскость. Во вращающейся системе координат ось  $Z^{(r)}$  совпадает с осью вращения, а ось  $X^{(r)}$  направлена на центр вторичного компонента. Эта система образуется из наблюдательной поворотом последней на угол  $90^\circ - i$  вокруг оси  $Y^{(o)}$  и дальнейшим поворотом вокруг оси  $Z^{(r)}$  на фазовый угол  $\varphi$  ( $0^\circ \leq \varphi \leq 360^\circ$ ). Магнитная система координат получается из орбитальной путем ее поворота вокруг оси вращения на угол  $\psi$  и дальнейшим поворотом вокруг оси  $Y^{(r)}$  на угол  $\beta$  так, чтобы ось  $Z^{(r)}$  совместились с осью магнитного диполя.

Перевод координат произвольного вектора  $\mathbf{r}$  из магнитной системы координат в наблюдательную выполняется посредством преобразований

$$\mathbf{r}^{(o)} = \mathbf{T}_i \mathbf{T}_\varphi \mathbf{T}_\psi \mathbf{T}_\beta \mathbf{r}^{(m)}, \quad (8)$$

где матрицы поворота

$$\mathbf{T}_\beta = \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix}, \quad (9)$$

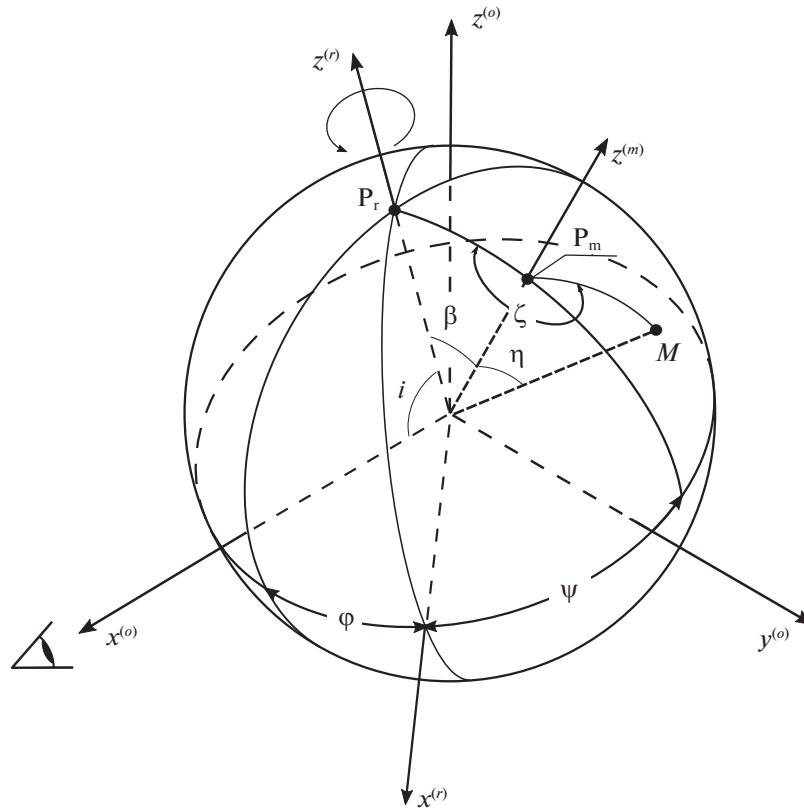


Рис. 2. Геометрия задачи.

$$\mathbf{T}_\psi = \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

выполняют преобразование магнитных координат в координаты вращающейся системы, а матрицы

$$\mathbf{T}_\varphi = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (10)$$

$$\mathbf{T}_i = \begin{pmatrix} \sin i & 0 & \cos i \\ 0 & 1 & 0 \\ -\cos i & 0 & \sin i \end{pmatrix},$$

используются для перехода из вращающейся системы координат в наблюдательную.

Положение источников излучения на поверхности звезды удобно характеризовать сферическими магнитными координатами  $\eta$  и  $\zeta$  (рис. 2). Магнитная долгота  $\zeta$  ( $0^\circ \leq \zeta \leq 360^\circ$ ) отсчитывается от направления на ось вращения  $P_r$  против часовой стрелки, если смотреть со стороны магнитного полюса  $P_m$ . Вторая координата,  $\eta$  ( $0^\circ \leq \eta \leq 180^\circ$ ),

представляет собой угловое расстояние, отсчитываемое от магнитного полюса. Сферические координаты источника связаны с его декартовыми магнитными координатами как

$$\begin{aligned} x^{(m)} &= -\sin \eta \cos \zeta, \\ y^{(m)} &= -\sin \eta \sin \zeta, \quad z^{(m)} = \cos \eta. \end{aligned} \quad (11)$$

Условие видимости некоторой точки  $M$  поверхности звезды определяется углом  $\gamma$  между внешней нормалью к поверхности звезды, исходящей из этой точки, и направлением на наблюдателя. Этот угол определяется как  $\cos \gamma = x^{(o)} / [(x^{(o)})^2 + (y^{(o)})^2 + (z^{(o)})^2]^{1/2}$ , где  $\{x^{(o)}, y^{(o)}, z^{(o)}\}$  — координаты точки  $M$  в системе координат наблюдателя. Если  $\cos \gamma \geq 0$ , то точка  $M$  расположена на видимом диске звезды. В противном случае, она находится за лимбом звезды.

Напряженность дипольного магнитного поля на поверхности звезды определяется как

$$B = \frac{B_m}{2} \left( \frac{1-a}{s} \right)^3 (3 \cos^2 \epsilon + 1)^{1/2}, \quad (12)$$

где  $B_m$  — напряженность магнитного поля на магнитном полюсе,  $s$  — расстояние до рассматриваемой точки поверхности от центра диполя ( $0 \leq s \leq 1$ ,  $s = 1$  для центрального диполя),  $\epsilon$  — угол,

между направлением на рассматриваемую точку и осью диполя, отсчитываемый из центра диполя ( $0 \leq \epsilon \leq 180^\circ$ ). Параметры  $s$  и  $\epsilon$  связаны с координатой  $\eta$  точки поверхности посредством соотношений

$$s = (1 + a^2 - 2a \cos \eta)^{1/2}, \quad (13)$$

и

$$\sin \epsilon = \sin \eta / s. \quad (14)$$

Как было показано ранее, интенсивность циклотронного излучения сильно зависит от угла  $\theta$  между линией магнитного поля и лучом зрения. Для определения этого параметра вспомним, что силовая линия магнитного диполя может быть параметризована как  $r = r_0 \sin^2 \epsilon$ , где  $r$  — расстояние до произвольной точки силовой линии, расположенной на угловом расстоянии  $\epsilon$  от оси диполя, а  $r_0$  — постоянная величина. В магнитной системе координат силовая линия лежит в плоскости  $\zeta = \text{const}$ . Таким образом, радиус-вектор  $\mathbf{r}^{(m)} = (x^{(m)}, y^{(m)}, z^{(m)})^T$  произвольной точки силовой линии в магнитной системе координат будет определяться как

$$\mathbf{r}^{(m)} = r_0 \begin{pmatrix} -\sin^3 \epsilon \cos \zeta \\ -\sin^3 \epsilon \sin \zeta \\ \sin^2 \epsilon \cos \epsilon + a \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Направление  $\mathbf{l}$  силовой линии может быть найдено путем дифференцирования радиус-вектора  $\mathbf{r}$  по углу  $\epsilon$ :

$$\mathbf{l}^{(m)} = \frac{d\mathbf{r}^{(m)}}{d\epsilon} = r_0 \begin{pmatrix} -3 \sin^2 \epsilon \cos \epsilon \cos \zeta \\ -3 \sin^3 \epsilon \cos \epsilon \sin \zeta \\ 2 \sin \epsilon \cos^2 \epsilon - \sin^3 \epsilon \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Для определения направления силовой линии в точке звездной поверхности  $M(\eta, \zeta)$  последнее выражение должно быть использовано с формулами (13), (14) для вычисления угла  $\epsilon$ . Для определения угла  $\theta$  необходимо найти направление  $\mathbf{l}^{(o)}$  в наблюдательной системе координат с использованием преобразований (8). Далее искомым углом может быть найден как  $\theta = \arccos[l_x^{(o)} / ((l_x^{(o)})^2 + (l_y^{(o)})^2 + (l_z^{(o)})^2)^{1/2}]$ . Кроме того, для определения параметров линейной поляризации необходимо учитывать угол  $\rho$  между проекцией вектора магнитного поля на картинную плоскость и осью  $Z^{(o)}$ . Этот угол можно определить как  $\rho = \arctg(l_y^{(o)} / l_z^{(o)})$ .

Нахождение параметров Стокса интегрального излучения системы в фазу вращения  $\varphi$  без учета

межзвездного и атмосферного поглощений, сводится к взятию поверхностного интеграла

$$S_{s\varphi} = \frac{R_{WD}^2}{D^2} \iint_{A \in A_\varphi^v} S_{s\varphi}^\ell \cos \gamma dA, \quad (17)$$

где интегрирование локальных параметров Стокса ведется по наблюдаемой в фазу вращения  $\varphi$  поверхности белого карлика  $A_\varphi^v$ , а  $R_{WD}$  и  $D$  — радиус белого карлика и расстояние до полюра соответственно. Отметим, что в выражении (17) мы учитываем только циклотронное излучение аккреционных пятен и не принимаем во внимание компоненты излучения другой природы.

Для вычисления интеграла (17) мы можем разбить поверхность звезды на  $L$  малых элементов, в пределах которых напряженность магнитного поля  $B$  можно считать постоянной. Тогда интеграл (17) можно приближенно заменить суммой вида

$$S_{s\varphi} \simeq \sum_{i=1}^L V_{\varphi i} \Omega_{\varphi i} S'_{s\varphi i} X_i, \quad (18)$$

где  $X_i$  — плотность циклотронных источников в  $i$ -м элементе разбиения (далее мы будем называть этот параметр яркостью),  $S'_{s\varphi i}$  — параметр Стокса циклотронного источника,  $\Omega_{\varphi i}$  — площадь проекции площадки на картинную плоскость. Множитель  $V_{\varphi i}$  равен нулю, если элемент разбиения находится за видимой поверхностью звезды ( $\cos \gamma < 0$ ). Если же он виден ( $\cos \gamma \geq 0$ ), то  $V_{\varphi i} = 1$  для параметров Стокса  $I$  и  $V$ , а для параметров Стокса  $Q$  и  $U$   $V_{\varphi i} = \cos(2\rho)$  и  $V_{\varphi i} = \sin(2\rho)$  соответственно. Поскольку регистрация параметров Стокса часто выполняется с точностью до множителя, мы положили, что  $R_{WD}^2/D^2 \equiv 1$ . Это означает, что яркость  $X$  будет находиться с точностью до множителя в процессе картирования. При вычислении параметров Стокса циклотронных источников учитывается зависимость  $\Lambda$ -параметра от магнитного поля  $\Lambda \sim 1/B$ . Заметим, что поскольку мы ограничиваемся моделированием циклотронного излучения аккреционных пятен, то ими можно было бы ограничить область интегрирования, как это сделано в следующем разделе.

Степень линейной поляризации излучения системы находится как  $p_l = \sqrt{Q^2 + U^2}/I$ , а ориентация плоскости поляризации определяется углом  $\chi = \frac{1}{2} \arctan(U/Q)$ , отсчитываемым от оси  $Z^{(o)}$ . Степень круговой поляризации равна  $p_c = |V|/I$ . Для перевода параметров Стокса в другую систему координат, главное направление в которой повернуто на угол  $\varrho$  относительно  $Z^{(o)}$ , можно воспользоваться известными преобразованиями

$$\hat{Q} = Q \cos 2\varrho + U \sin 2\varrho, \quad (19)$$

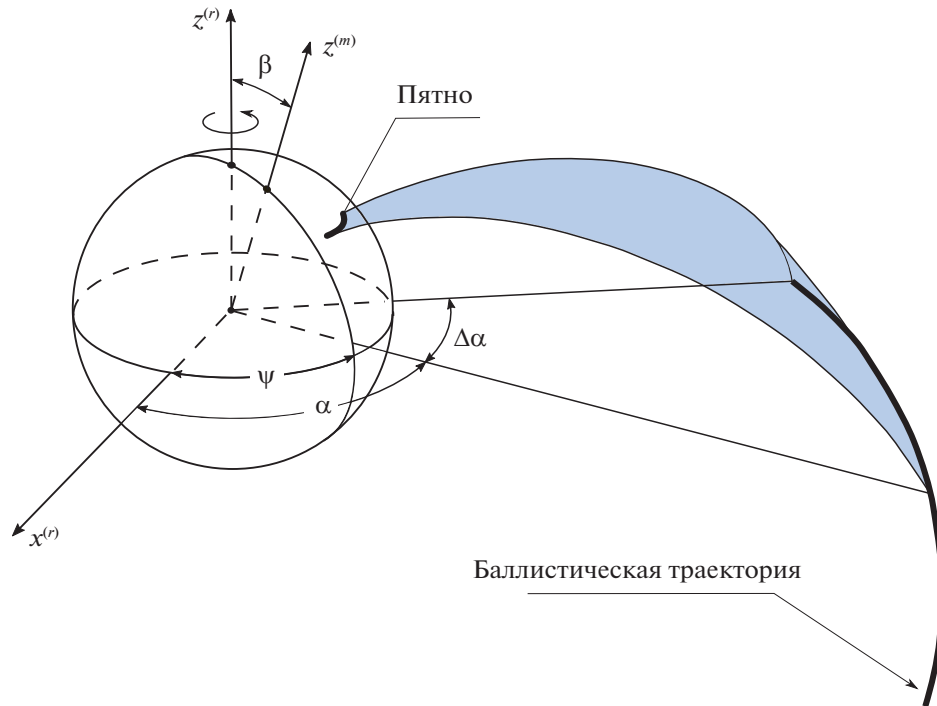


Рис. 3. Геометрия аккреционного течения.

$$\hat{U} = -Q \sin 2\varrho + U \cos 2\varrho,$$

в то время как параметры Стокса  $I$  и  $V$  остаются неизменными.

#### 4. ПРОСТАЯ МОДЕЛЬ ПЯТНА

Предлагаемая модель аккреционного пятна основана на приближении траектории аккреционной струи двумя составляющими: баллистической и магнитной. В баллистической части движение вещества не возмущается магнитным полем и определяется силами тяготения компонентов системы, а также силами инерции. Эта часть траектории лежит в орбитальной плоскости, начинается от точки Лагранжа  $L_1$  и заканчивается в области стагнации, где динамическое давление струи сравнивается с магнитным давлением ( $\rho v^2 = B^2/8\pi$ ). Положение этой области характеризуется азимутальным углом  $\alpha$ , который отсчитывается от направления на вторичный компонент по направлению его орбитального движения. Затем ионизированное вещество струи движется по магнитной траектории, которая совпадает с силовой линией магнитного поля белого карлика, приближаемой моделью диполя. Движение аккрецируемого газа может происходить как к одному, так и к обоим магнитным полюсам белого карлика. Поскольку вещество струи неоднородно по плотности, то переход на магнитную траекторию должен осуществляться в растянутой области, длина которой характеризуется углом  $\Delta\alpha$ .

Линии магнитного поля, пересекающие эту область, “вычерчивают” на поверхности звезды дуги, которые являются моделями аккреционных пятен (рис. 3).

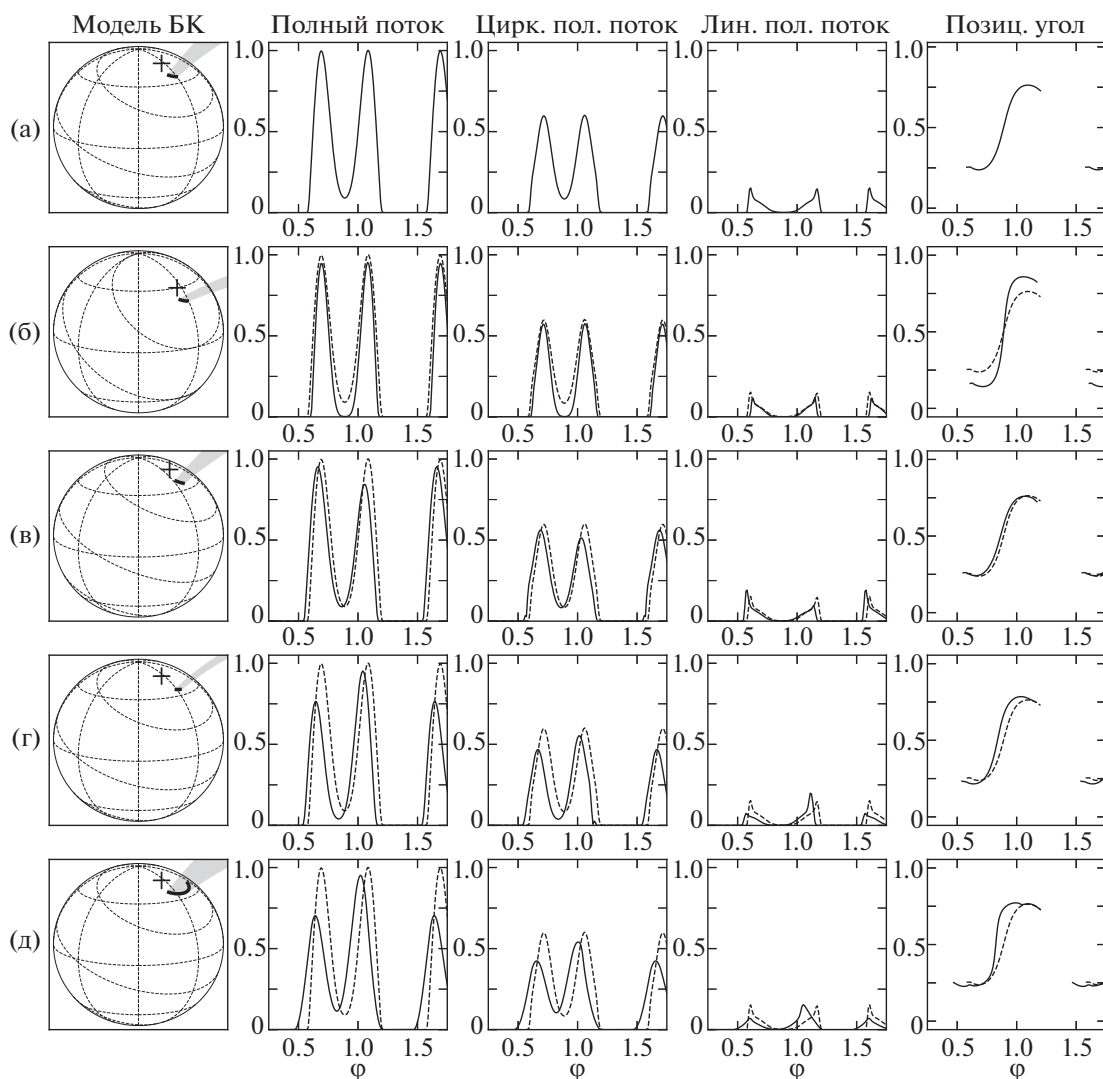
Расчет баллистической траектории выполняется в рамках ограниченной задачи трех тел (см., например, Фланнери, 1975), формулируемой системой дифференциальных уравнений вида

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= 2\dot{y} - (1 - \tau - x) - & (20) \\ & - \tau \frac{x}{r_1^3} + (1 - \tau) \frac{(1 - x)}{r_2^3}, \\ \ddot{y} &= -2\dot{x} + y - \tau \frac{y}{r_1^3} - (1 - \tau) \frac{y}{r_2^3}, \end{aligned}$$

где  $x$  и  $y$  — координаты точек струи во вращающейся системе координат,  $r_1$  и  $r_2$  — расстояние от точки струи до первичного и вторичного компонентов соответственно,  $\tau = M_1/(M_1 + M_2)$ , а  $M_1$  и  $M_2$  — массы первичного и вторичного компонентов соответственно. Решение последней системы уравнений проводится методом Рунге—Кутты четвертого порядка.

Для расчета кривых блеска и поляризации звезды пятно разбивается на  $L$  малых отрезков. Вычисление потока и поляризации излучения выполняется интегрированием параметров Стокса циклотронных источников, согласно формуле (18). Суммирование ведется по элементам разбиения пятна, площадь которых полагается равной их длине, а





**Рис. 4.** Примеры моделирования излучения полюра. В первом столбце показаны модели белого карлика с аккреционным пятном, видимые со стороны наблюдателя в фазе вращения  $\varphi = 0$ . Крестиком указано положение магнитного полюса. Черная жирная линия — аккреционное пятно, из которого исходят силовые линии диполя. Во втором столбце показано поведение полного потока излучения в течение периода вращения, в третьем — потока с круговой поляризацией, в четвертом — линейно поляризованного потока, в пятом столбце показано поведение позиционного угла плоскости поляризации. Строки (а)—(д) соответствуют разным значениям ориентации магнитного диполя и положениям области стагнации. Пунктирная линия в графиках (б)—(д) повторяет графики строки (а). Все приведенные потоки нормированы на значение максимума полного потока в случае (а).

яркости  $X_i$  ( $i = 1, 2, \dots, L$ ) имеют фиксированное значение.

Пример моделирования циклотронного излучения полюра в течение орбитального периода показан на рис. 4а. Масса белого карлика была принята равной  $M_1 = 0.7M_\odot$ , а отношение масс компонентов  $q = M_2/M_1 = 0.25$ . Относительный радиус белого карлика, необходимый для расчета положения пятна, вычислялся в предположении орбитального периода  $P_{\text{orb}} = 2^h$  и с использованием зависимости “радиус—масса” Нойнберга (1972). Наклонение орбитальной плоскости принято равным  $75^\circ$ . Такое же значение принимает угол  $i$  между осью враще-

ния белого карлика и лучом зрения. Магнитный диполь ориентирован углами  $\beta = 25^\circ$  и  $\psi = 40^\circ$ . Средняя напряженность магнитного поля в пятне была принята равной  $\langle B \rangle = 20$  МГц, а средний  $\Lambda$ -параметр был зафиксирован на значении  $\langle \Lambda \rangle = 10^4$ ; оба значения свойственны полюрам. Пятну задана температура  $T_e = 25$  кэВ, соответствующая тепловой скорости частиц газа  $\frac{3}{4}v_{ff}$  ( $v_{ff}$  — скорость свободного падения у поверхности белого карлика). Положение и размер области стагнации определены параметрами  $\alpha = 30^\circ$  и  $\Delta\alpha = 20^\circ$ , которые дают средние магнитные координаты пятна  $\langle \eta \rangle \approx 13.5^\circ$  и  $\langle \zeta \rangle \approx 180^\circ$ . Пятно разбивалось на  $L =$



= 500 отрезков. Вычисления проводились для фотометрической полосы  $V$  системы Джонсона. На рис. 4а виден двухпиковый профиль кривой блеска, свойственный многим звездам типа AM Her. Появление дипа происходит на фазе  $\varphi = 1 - \psi/360^\circ \approx 0.89$ , когда достигается наименьшее значение угла  $\theta$ . Такой же дип имеется в кривых циркулярно- и линейно-поляризованного потока. При движении пятна к краю диска происходит увеличение угла  $\theta$  и увеличение коэффициентов поглощения, что приводит к увеличению интенсивности излучения и наблюдаемого потока. Падение потока при подходе пятна к лимбу обусловлено уменьшением проекции пятна на картинную плоскость. Пятно видно на диске звезды в течение  $\Delta\varphi \approx 2 \arccos[-1/\text{tg}(\beta + \eta)]/360^\circ = 0.61$ . Поведение позиционного угла эллипсоида поляризации  $\chi$  близко к изменению проекции силовых линий на картинную плоскость (Кроппер, 1989). При появлении пятна на наблюдаемом диске линии отклонены влево от оси вращения ( $\rho < 0$ ), в момент наибольшего приближения к наблюдателю линии магнитного поля проецируются на ось вращения ( $\rho = 0$ ), а затем начинают уклоняться вправо ( $\rho > 0$ ).

Чувствительность поведения излучения к параметрам  $\beta$ ,  $\psi$ ,  $\alpha$ ,  $\Delta\alpha$  продемонстрирована на рис. 4б–д. Параметры полярности для рис. 4б такие же, как и для рис. 4а, за исключением угла  $\beta = 45^\circ$ . Видно, что кривые блеска имеют более глубокий дип, благодаря уменьшению нижнего порога  $\theta$ . Кроме того, уменьшение широты пятна способствовало сужению продолжительности наблюдения пятна. Благодаря уширению диапазона изменения  $\rho$ , позиционный угол плоскости поляризации варьируется в более широких пределах. На рис. 4в долгота магнитного полюса изменена на  $\psi = 60^\circ$  (все остальные параметры такие же, как для рис. 4а). Это приводит к более раннему появлению пятна на наблюдаемом диске звезды и асимметрии профиля максимума, так как в левой части диска угол  $\theta$  имеет большие значения, чем в правой части. Аналогичные эффекты наблюдаются на рис. 4г, где угол положения области стагнации сменился на  $\alpha = 60^\circ$ . Уширение области стагнации до  $\Delta\alpha = 90^\circ$ , продемонстрированное на рис. 4д, привело к растяжению пятна, увеличению продолжительности его наблюдения, а также к сглаживанию кривой блеска, ввиду большого разброса  $\theta$  в пределах пятна.

На рис. 5 показано поведение циклотронного излучения полярности при изменении угла наклона оси вращения белого карлика  $i$ . Параметры системы (кроме угла наклона  $i$ ) такие же, как для рис. 4а. При низких углах наклона ( $i = 30^\circ$ ,  $i = 45^\circ$ ) пятно находится на наблюдаемом диске звезды в течение всего вращательного периода. Главные минимумы

появляются во время наименьшего значения  $\theta$  около  $\varphi \approx 0.89$ . Вторичные минимумы появляются в момент наименьшего телесного угла пятна около фазы  $\varphi \approx 0.38$ . Для больших углов наклона ( $i = 60^\circ$ ,  $i = 75^\circ$ ,  $i = 90^\circ$ ) наблюдается заход пятна за диск звезды. Угол наклона  $\theta$  варьируется в меньших пределах, смещенных к  $\theta = 90^\circ$ . Минимум около  $\varphi \approx 0.89$  становится менее интенсивным, а интервал видимости пятна сужается при увеличении  $i$ . Также заметно сужение интервала изменения позиционного угла плоскости поляризации при возрастании  $i$ .

Картирование поверхности белого карлика заключается в поиске положения области стагнации, задаваемого азимутальными углами  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  ( $\alpha_2 > \alpha_1$ ), а также ориентации магнитного диполя, определяемой долготой  $\psi$  и наклоном  $\beta$ . Определение этих параметров выполняется методом наименьших квадратов, минимизирующим функцию

$$\chi^2 = \sum_s \sum_\varphi \left( \frac{cS_{s\varphi} - S_{s\varphi}^o}{\sigma_{s\varphi}} \right)^2, \quad (21)$$

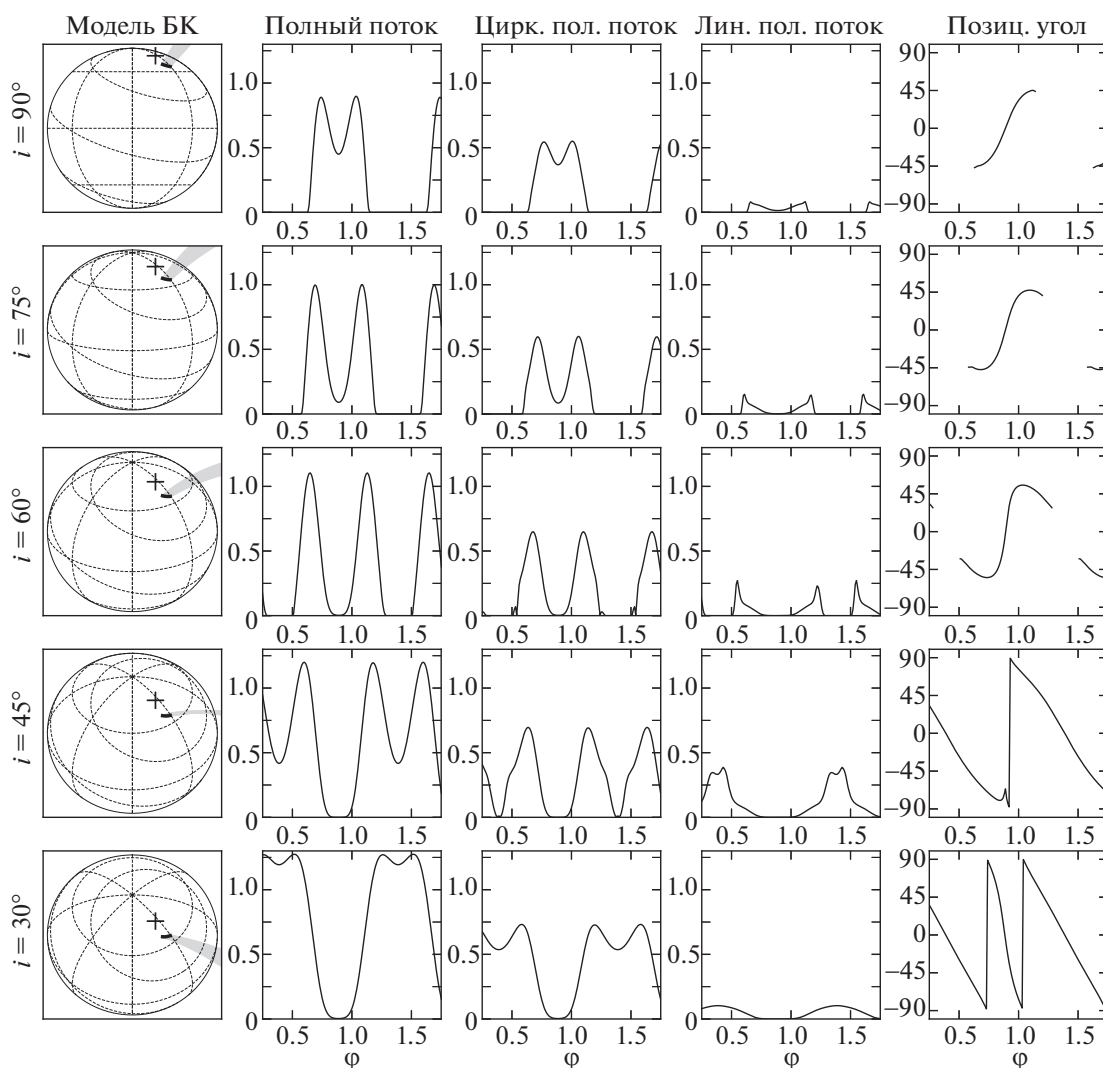
где  $S_{s\varphi}$  — теоретические параметры Стокса, определяемые выражением (18),  $S_{s\varphi}^o$  — наблюдаемые параметры Стокса, а  $\sigma$  — ошибка их определения. Индекс  $s$  ( $s = \{I, Q, U, V\}$ ) указывает тип параметра Стокса, для которого получено наблюдательное значение, а  $\varphi$  пробегается по фазам, для которых проводилась регистрация параметра Стокса типа  $s$ . Используемый в последнем выражении параметр  $c$  представляет масштабирующий множитель, учитывающий угловой размер аккреционного пятна и поглощение приходящего к наблюдателю излучения. Он определяется минимизацией члена суммы (21) для параметра Стокса  $s = I$ , т.е.

$$c = \frac{\sum_\varphi I_\varphi^o I_\varphi}{\sum_\varphi I_\varphi^2}, \quad (22)$$

где  $\varphi$  пробегается по всем фазам, для которых проводилась регистрация полного потока  $I^o$ .

Для минимизации функции (21) необходим метод, устойчивый по отношению к локальным минимумам и обеспечивающий надежное нахождение глобального минимума. Таким требованиям удовлетворяет генетический алгоритм (см., например, Колей, 1999). Он был реализован при помощи средств программной библиотеки GeneticSharp<sup>1</sup>. Сначала данный метод случайным образом создает множество (популяцию) решений в заранее определенной области поиска. Каждому решению задается индивидуальный бинарный код,

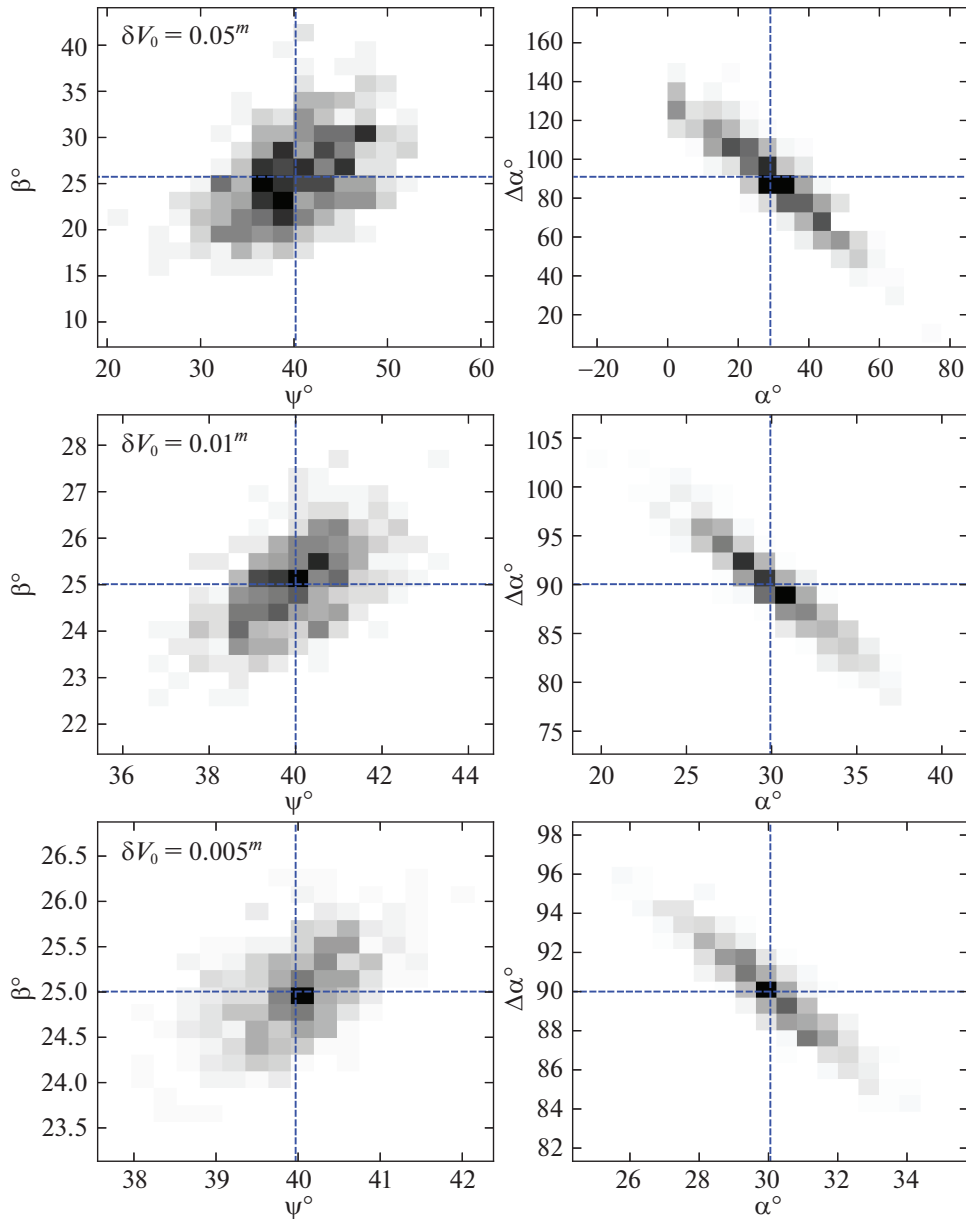
<sup>1</sup> Программная библиотека для построения генетического алгоритма GeneticSharp доступна по адресу: <https://github.com/giacomelli/GeneticSharp>



**Рис. 5.** Примеры моделирования излучения полюра для разных углов наклона орбитальной плоскости. Смысл столбцов такой же, как и на рис. 4. Каждая строка соответствует определенному углу наклона оси вращения белого карлика к лучу зрения  $i$ , указанному слева.

формируя генотип решения. Затем выполняется селекция решений, где отбираются члены популяции с наименьшим  $\chi^2$ . На основе отобранных решений создается следующее поколение, которое получается при помощи операций мутации и скрещивания в генотипах. После этого происходит возврат к процедуре отбора решений с наименьшим  $\chi^2$ . Через некоторое количество поколений члены популяции концентрируются вблизи глобального минимума. Генетический алгоритм надежно находит окрестности глобального минимума  $\chi^2$ , однако на некотором этапе медленно сходится к точному решению. Для ускорения вычислений мы ввели второй этап минимизации  $\chi^2$ , где для уточнения решения используется квазиньютоновский метод Бroyдена–Флетчера–Гольдфарба–Шанно (см., например, Флэтчер, 1987).

Оценка ошибок определения ориентации диполя и положения области стагнации может быть проведена методом Монте-Карло. Для примера мы выполнили эту процедуру для полюра с параметрами, для которых моделировалось поведение излучения, показанное на рис. 4а. Мы предположили светимость полюра  $V_0 = 15^m$  в отсутствие аккреционного пятна и амплитуду яркости  $\Delta V = 0.5^m$ , связанную с прохождением пятна по диску звезды. Система была наклонена на угол  $i = 75^\circ$ . Выполнено по 500 симуляций картирования белого карлика с тремя уровнями шума в минимуме блеска:  $\delta V_0 = 0.05, 0.01^m, 0.005^m$ . Распределение шумов в моделируемых параметрах Стокса предполагалось пуассоновским. Результаты определения параметров полюра резюмированы в двухмерных гистограммах на рис. 6. Видно естественное увеличение точности измерения параметров полюра с умень-



**Рис. 6.** Гистограммы распределения решений, полученные на основе зашумленных модельных фотополариметрических данных.

шением ошибки наблюдений. Распределение углов ориентации магнитного диполя ( $\beta$  и  $\psi$ ) практически симметрично относительно точного решения, что говорит о разности их влияния на фотополариметрические наблюдения. С другой стороны, заметны эффекты мультиколлинеарности в параметрах  $\alpha$  и  $\Delta\alpha$ , что следует из их сходного эффекта на вид наблюдательных данных (рис. 4). Видно, что при типичной ошибке наблюдений  $\delta V_0 = 0.01^m$  следует рассчитывать на наименьшую ошибку определения параметров области стагнации  $\sim 5^\circ$ . Более уверенно находится ориентация диполя с нижним значением ошибки около  $2^\circ$ . Заметим, что ошибки искомых параметров могут варьироваться в боль-

ших пределах при изменении параметров системы ( $i, M_1, M_2, T_e, \Lambda, B, \psi, \beta, \alpha, \Delta\alpha$ ), поэтому оценка точности должна проводиться индивидуально для каждого объекта. Также заметим, что помимо ошибок наблюдений вклад в высокочастотную составляющую наблюдательных данных дает переменность темпа аккреции, которую также следует учитывать при картировании.

## 5. НЕПРЕРЫВНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Рассмотренная выше простая модель аккреционного пятна имеет множество недостатков. Очевидно, что пятно должно иметь ненулевую ширину.

Распределение яркости вдоль пятна также должно быть сложным. Можно выполнить усложнение этой модели: задать ширину пятна, параметризовать распределение яркости по пятну. Однако такое усложнение модели приводит к большому количеству неизвестных и неоднозначностям в их определении. Кроме того, используемая модель аккреции с резким переходом струи с баллистической траектории на магнитную является упрощенной. Однако существует возможность восстановления распределения яркости по поверхности звезды, не прибегая к каким-либо предположениям о форме пятен. Суть альтернативного варианта картирования состоит в разбиении звездной поверхности на элементарные площадки и поиске распределения по ним циклотронных источников, которое могло бы описать наблюдаемые фотополариметрические данные. Хотя в таком случае задача имеет гораздо большее количество искомого параметров, проблема неоднозначности снимается путем введения априорных предположений об искомом решении: например, о его гладкости или неотрицательности. Такие способы картирования часто используются для восстановления поверхности запятанных звезд, а применение этого способа к полярам было предложено Поттером и др. (1998).

Разбиение звездной поверхности проводится на  $N$ -е количество широтных поясов ( $\eta = \text{const}$ ). Приэкваториальный пояс делится на  $M$ -е количество площадок. Разбиение оставшихся поясов проводится таким образом, чтобы площадь их элементов разбиения приближенно равнялась площади приэкваториальных элементов. Общее количество элементов разбиения равно  $L$ . Предложенный способ разбиения более предпочтителен по сравнению с простым вариантом, где поверхность делится на сферические прямоугольники одинаковой протяженности по полярному углу  $\eta$  и долготе  $\zeta$ . В отличие от него, используемый нами вариант разбиения не приводит к уплотнению площадок у полюсов с соответствующим увеличением времени интегрирования параметров Стокса. Вычисление площади проекции элемента разбиения на картинную плоскость  $\Omega$  выполняется его разбиением на “подплощадки”. Учитывается частичный захват площадок за лимб звезды, путем вычисления угла  $\gamma$  для подплощадок. Каждой площадке задаются напряженность и направление магнитного поля в соответствии с дипольной моделью, а также индивидуальное значение яркости. Так же как в случае рассмотренной выше простой модели пятен, температура и плотность источников излучения считаются одинаковыми.

Восстановление распределения яркости по поверхности белого карлика выполняется методом

регуляризации Тихонова (Тихонов, 1979), суть которого заключается в минимизации функции

$$V(\lambda, \mathbf{X}) = \sum_s \sum_{\varphi} \left( \frac{S_{s\varphi}(\mathbf{X}) - S_{s\varphi}^o}{\sigma_{s\varphi}} \right)^2 + \lambda \sum_{i=1}^L \|\nabla X_i\|^2. \quad (23)$$

Первый член этой функции представляет собой взвешенную на ошибки наблюдений  $\sigma_{s\varphi}$  сумму квадратов невязок между наблюдаемыми,  $S_{s\varphi}^o$ , и теоретическими,  $S_{s\varphi}$ , параметрами Стокса, вычисляемыми по формуле (18). Индекс  $s$  пробегается по параметрам Стокса ( $s = \{I, Q, U, V\}$ ), для которых проводились наблюдения, а  $\varphi$  принимает значения фаз вращения звезды, для которых получены измерения параметра Стокса  $s$ . Теоретические параметры Стокса зависят от вектора  $\mathbf{X}$ , который содержит яркости элементов разбиения  $X_i$  ( $i = 1, 2, \dots, L$ ). Второй (регуляризирующий) член предназначен для стабилизации решения относительно ошибок наблюдений. Он равен сумме квадратов модулей градиента яркости

$$\nabla X = \frac{1}{\sin \eta} \frac{dX}{d\zeta} \mathbf{e}_{\zeta} + \frac{dX}{d\eta} \mathbf{e}_{\eta} \quad (24)$$

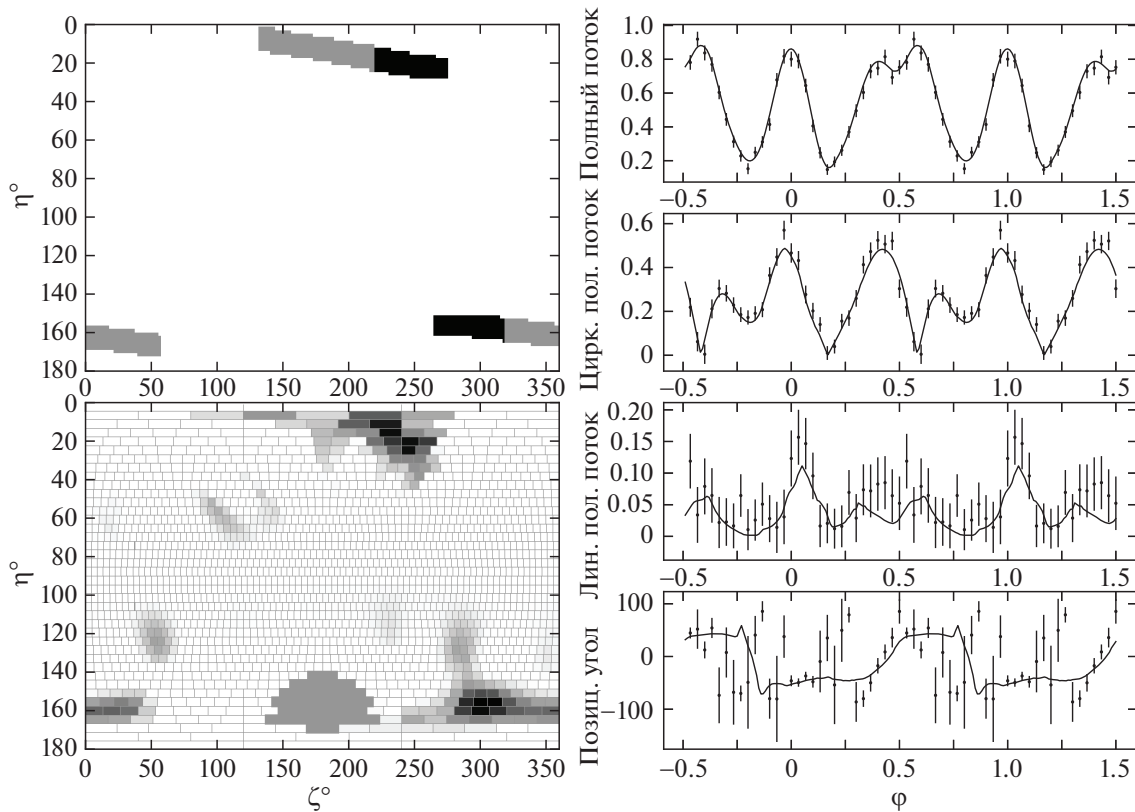
элементов разбиения поверхности. Таким образом, включение регуляризирующего члена в (23) приводит к выделению гладкого решения.

Вклад первого и второго членов на значение функции (23) определяется параметром регуляризации  $\lambda$ . Если  $\lambda = 0$ , то в регуляризирующей функции остается первый член, и метод Тихонова вырождается в метод наименьших квадратов. Ввиду большого количества искомого параметров, т.е. набора яркостей  $X_i$  ( $i = 1, 2, \dots, L$ ), метод будет давать решения, описывающие шумовую составляющую в  $S_{s\varphi}^o$ . Получаемые решения становятся неустойчивы к ошибкам наблюдений  $\sigma_{s\varphi}$  и непригодны для анализа. При  $\lambda \rightarrow \infty$  доминирует второй член, а яркости элементов разбиения стремятся быть одинаковыми. Таким образом, параметр регуляризации  $\lambda$  должен быть подобран так, чтобы найти гладкое решение, описывающее наблюдательные данные в пределах ошибок измерений. Для выбора такого  $\lambda$  мы используем критерий невязки (Тихонов, 1979), в котором для оптимального  $\lambda$  выполняется требование

$$\sum_s \sum_{\varphi} (S_{s\varphi}(\mathbf{X}_{\lambda}) - S_{s\varphi}^o)^2 = \sum_s \sum_{\varphi} \sigma_{s\varphi}^2, \quad (25)$$

где  $\mathbf{X}_{\lambda}$  — минимизатор (23) при параметре регуляризации  $\lambda$ .

Регуляризирующая функция (23) представляет собой квадратичную форму по  $X_i$  ( $i = 1, 2, \dots, L$ ).



**Рис. 7.** Симуляция восстановления распределения источников циклотронного излучения по поверхности белого карлика. Слева показана исходная карта распределения областей циклотронного излучения, а также результат ее восстановления методом Тихонова. Справа показано сравнение исходных зашумленных данных (кривой блеска, кривых циркулярно и линейно поляризованного излучения, а также излучения, позиционного плоскости поляризации) и их воспроизведения восстановленной моделью белого карлика. Закрашенная область вокруг точки с координатами  $\eta = 165^\circ$  и  $\zeta = 180^\circ$  скрыта от наблюдателя.

Поверхности равного  $V(\lambda, X)$  при постоянном  $\lambda$  представляют собой эллипсоиды в пространстве решений, центры которых находятся в единственной точке минимума  $V(\lambda, X)$ . Таким образом, при наложении условия неотрицательности решения  $X_i \geq 0$  ( $i = 1, 2, \dots, L$ ) минимум (23) также единственен. Поэтому, в отличие от работы Поттера и др. (1998), мы отказались от использования медленного генетического алгоритма для минимизации (23). Для оптимизации регуляризирующей функции мы используем более эффективный метод Левенберга–Марквардта. Для получения положительных яркостей, минимизация (23) проводится относительно параметров  $z_i$  ( $i = 1, 2, \dots, L$ ), которые связаны с яркостями площадок как  $X_i = \exp(wz_i)$ ,  $w > 0$ . Таким образом, выполняя безусловную оптимизацию по  $z_i$ , мы находим минимум в области  $X_i > 0$  ( $i = 1, 2, \dots, L$ ).

Для тестирования предложенного алгоритма мы взяли модель полюра, использованную в предыдущем разделе для построения рис. 4а. Отличие состоит лишь в распределении циклотронных источников по поверхности белого карлика. Предпола-

галось, что аккреция осуществляется с баллистической траектории в диапазоне углов  $\alpha = 0-360^\circ$  с образованием двух аккреционных пятен. Первое располагается у магнитного полюса с лучшими условиями видимости для наблюдателя, а второе — у полюса противоположной полярности. Пятна имеют ширину  $\approx 6^\circ$  и разделены на две области, различающиеся по яркости в два раза. При помощи данной модели белого карлика проведена симуляция фотополариметрических наблюдений в фотометрической полосе  $V$  системы Джонсона. Считалось, что поляр имеет блеск  $V_0 = 15^m$  в отсутствие излучения от аккреционных пятен, а разность максимального блеска и блеска  $V_0$  равна  $\Delta V = 1^m$ . Всего было получено 30 измерений поляризации, равномерно покрывающих орбитальный период и имеющих пуассоновское распределение шумов. На рис. 7 показаны результаты картирования белого карлика в предположении ошибки наблюдений в минимуме блеска  $\delta V_0 = 0.05^m$ . Картирование белого карлика проводилось при параметрах разбиения поверхности  $N = 40$  и  $M = 80$ . Видно хорошее воспроизведение яркой части обоих пятен как по

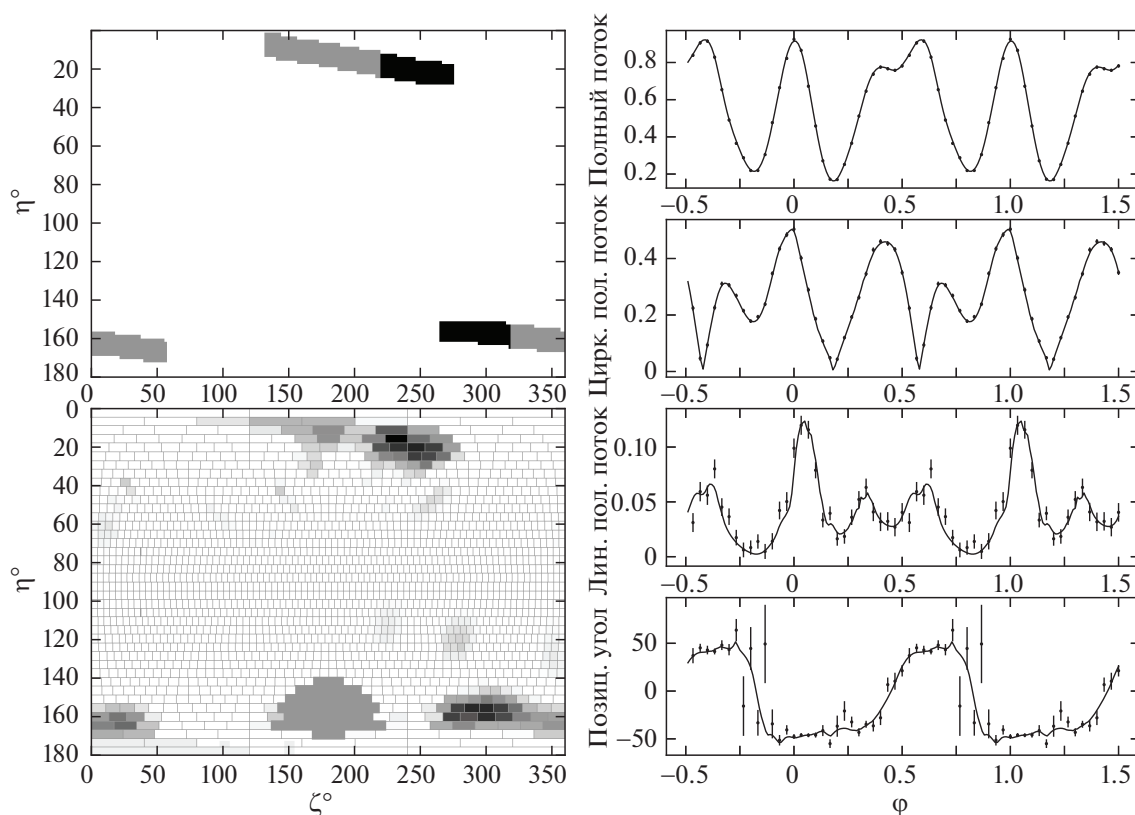


Рис. 8. То же, что и на рис. 7, но для  $\delta V_0 = 0.01^m$ .

широте, так и по долготе. Исходные фотополариметрические данные удовлетворительно описываются с использованием выбранного критерия параметра регуляризации. Результаты аналогичного тестирования иллюстрированы на рис. 8, однако в данном случае принята меньшая ошибка наблюдений  $\delta V_0 = 0.01^m$ . Как и следовало ожидать, наблюдается лучшее воспроизведение циклотронных источников: видна структура пятен с четким разделением на яркую и менее интенсивную составляющие, а также уменьшение артефактов восстановления, присутствующих в результатах предыдущего теста.

## 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработаны программные коды моделирования фотополариметрических наблюдений полярных с восстановлением распределения источников циклотронного излучения по поверхности белых карликов. Реализовано два подхода для картирования белого карлика. В первом случае используется метод, аналогичный предложенному Поттером и др. (1997). Он предполагает аркообразную структуру пятен и их однородность по яркости. Однако, в отличие от упомянутой работы, мы накладываем ограничения на положение пятен, удовлетворяющие картине аккреции вещества на поверхность

звезды вдоль линий магнитного диполя. Дополнительно мы проводим поиск ориентации магнитного диполя, которую трудно оценить независимым способом. Кроме того, картирование проводится при помощи генетического алгоритма, максимизирующего вероятность нахождения решения, соответствующего глобальному минимуму  $\chi^2$ . Идея второго подхода предложена Поттером и др. (1998) и заключается в разбиении поверхности белого карлика на малые площадки, по которым выполняется поиск гладкого распределения яркости методом регуляризации Тихонова. Отличие нашей реализации заключается в более эффективном способе картирования белого карлика, предполагающем разбиение звездной поверхности на элементы примерно одинаковой площади и использование метода оптимизации Левенберга–Марквардта. Оба подхода могут дополнять друг друга при моделировании фотополариметрических наблюдений полярных. Так, с помощью метода тонких пятен можно сделать оценку ориентации магнитного диполя и использовать ее для картирования белого карлика методом Тихонова, обеспечивающим лучшее описание наблюдательных данных. Несмотря на очевидные преимущества картирования методом Тихонова, мы полагаем, что метод тонких пятен будет очень полезным для анализа однополосной

долговременной фотометрии, накопившейся за десятилетия наблюдений полей.

В дальнейшем мы планируем усовершенствовать реализованные методы путем использования гидродинамических моделей аккреционных пятен для вычисления параметров Стокса (например, моделей Фишера, Бойерманна, 2001). Помимо применения более физически обоснованной модели, данный подход должен избавить от необходимости определения средней температуры  $T_e$  и параметра  $\Lambda$  независимыми способами. Кроме того, он позволил бы избавиться от предположения одинаковой температуры вдоль пятен и простого ( $\Lambda \sim 1/B$ ) поведения  $\Lambda$ -параметра. Картирование поверхности белого карлика будет осуществляться не по яркости, пропорциональной плотности абстрактных источников циклотронного излучения, а по локальному темпу аккреции, что дало бы способ оценки темпов аккреции в системах типа AM Her на основе оптических наблюдений.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19-32-60048). Часть работы выполнена за счет средств субсидии (проект № 0671-2020-0052), выделенной Казанскому федеральному университету, для выполнения государственного задания в сфере научной деятельности, а также гранта Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-42-160003).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бойерманн и др. (K. Beuermann, L. Stella, and J. Patterson), *Astrophys. J.* **316**, 360 (1987).
2. Ву (K. Wu), *Space Sci. Rev.* **93**, 611 (2000).
3. Вэет, Ченмьюгэм (H.M. Vaeth and G. Chanmugam), *Astrophys. J. Suppl. Ser.* **98**, 295 (1995).
4. Колей (D.A. Coley), *An introduction to genetic algorithms for scientists and engineers* (World Sci. Publ. Co., 1999).
5. Кроппер (M. Cropper), *MNRAS* **236**, 935 (1989).
6. Мукаи (K. Mukai), *MNRAS* **232**, 175 (1988).
7. Меггитт, Викрамазингх (S.M.A. Meggitt and D.T. Wickramasinghe), *MNRAS* **198**, 71 (1982).
8. Нойнберг (M. Nauenberg), *Astrophys. J.* **232**, 417 (1972).
9. Поттер и др. (S.B. Potter, M. Cropper, K.O. Mason, J.H. Hough, and J.A. Bailey), *MNRAS* **285**, 82 (1997).
10. Поттер и др. (S.B. Potter, P.J. Hakala, and M. Cropper), *MNRAS* **297**, 1261 (1998).
11. Поттер (S.B. Potter), *MNRAS* **314**, 672 (2000).
12. Поттер и др. (S. Potter, E. Romero-Colmenero, and D.A.H. Buckley), *Astronomische Nachrichten* **325**, 201 (2004).
13. Рамати (R. Ramaty), *Astrophys. J.* **158**, 753 (1969).
14. Рамсай и др. (G. Ramsay, M. Cropper, K. Wu, and S. Potter), *MNRAS* **282**, 726 (1996).
15. Рамсай и др. (G. Ramsay, S.B. Potter, D.A.H. Buckley, and P.J. Wheatley), *MNRAS* **306**, 809 (1999).
16. Тихонов (А.Н. Тихонов), *Методы решения некорректных задач* (М.: Наука, 1979).
17. Туохи и др. (I.R. Tuohy, L. Ferrario, D.T. Wickramasinghe, and M.R.S. Hawkins), *Astrophys. J.* **328**, L59 (1988).
18. Фишер, Бойерманн (A. Fischer and K. Beuermann), *Astron. Astrophys.* **373**, 211 (2001).
19. Фланнери (B.P. Flannery), *MNRAS* **170**, 325 (1975).
20. Флэтчер (R. Fletcher), *Practical methods of optimization* (2nd ed., John Wiley & Sons, 1987).
21. Харроп-Аллин и др. (M.K. Harrop-Allin, S.B. Potter, and M. Cropper), *MNRAS* **326**, 788 (2001).
22. Ченмьюгэм, Далк (G. Chanmugam and G.A. Dulk), *Astrophys. J.* **244**, 569 (1981).