

УПРАВЛЯЕМОЕ ДВИЖЕНИЕ СОЛНЕЧНОГО ПАРУСА В ОКРЕСТНОСТИ КОЛЛИНЕАРНОЙ ТОЧКИ ЛИБРАЦИИ

© 2020 г. Д. В. Шиманчук^{1*}, А. С. Шмыров¹, В. А. Шмыров¹

¹Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия

Поступила в редакцию 23.10.2019 г.

После доработки 25.02.2020 г.; принята к публикации 25.02.2020 г.

Рассматривается движение космического аппарата с солнечным парусом в рамках ограниченной задачи трех тел системы Солнце–Земля. Исследуются уравнения управляемого орбитального движения солнечного паруса в окрестности коллинеарной точки либрации L_1 системы Солнце–Земля. Для описания управляемого орбитального движения космического аппарата и разработки законов управления используются модифицированные уравнения круговой ограниченной задачи трех тел системы Солнце–Земля. Основным результатом работы является предложенный закон управления в виде обратной связи, обеспечивающий удержание космического аппарата окрестности точки либрации L_1 при использовании сил светового давления.

Ключевые слова: ограниченная задача трех тел, коллинеарная точка либрации, солнечный парус, орбитальное движение, управление.

DOI: 10.31857/S0320010820030055

ВВЕДЕНИЕ

Полеты в окрестности коллинеарной точки либрации (L_1 или L_2) системы Солнце–Земля (Маркеев, 1978) уже давно имеют практическое значение в связи с проектами, реализуемыми NASA и ESA (ISEE-3, SOHO, WIND, ACE, Genesis и т.д.).

Идея использования солнечного паруса для удержания космического аппарата (КА) в окрестности коллинеарной точки либрации была сформулирована в работе Буклесса, Макиннеса (2008). В этой работе были изучены возможности использования изменения площади паруса, а также изменение ориентации паруса для удержания космического аппарата на квази-периодической орбите. В нашей работе КА удерживается вблизи инвариантного многообразия в окрестности коллинеарной точки либрации.

Под солнечным парусом будем понимать КА с установленной и развернутой на нем зеркальной поверхностью, которая, отражая солнечный свет, сообщает КА управляющее ускорение.

Движение КА с солнечным парусом рассматривается в окрестности коллинеарной точки либрации во вращающейся геоцентрической системе координат в рамках хилловского приближения круговой ограниченной задачи трех тел Солнце–Земля–КА (Шмыров, 2005).

УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ И ИХ ХАРАКТЕРИСТИКА

В качестве основной динамической модели движения будем рассматривать ограниченную круговую задачу трех тел. Уравнения неуправляемого движения во вращающейся барицентрической системе координат представлены в работе Себехя (1967), уравнения управляемого движения во вращающейся барицентрической системе координат $Ox_1x_2x_3$ могут быть представлены в виде

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + y_1, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + y_2, \\ \dot{x}_3 = y_3, \\ \dot{y}_1 = -\mu \frac{x_1+1-\mu}{r_1^2} - (1-\mu) \frac{x_1-\mu}{r_2^2} + y_2 + u_1, \\ \dot{y}_2 = -\mu \frac{x_2}{r_1^2} - (1-\mu) \frac{x_2}{r_2^2} - y_1 + u_2, \\ \dot{y}_3 = -\mu \frac{x_3}{r_1^2} - (1-\mu) \frac{x_3}{r_2^2} + u_3, \end{cases} \quad (1)$$

где $\mathbf{x} = (x_1; x_2; x_3)$ — вектор координат КА, $\mathbf{y} = (y_1; y_2; y_3)$ — вектор сопряженных импульсов, $\mu = \frac{M_1}{M_1+M_2}$, M_1 — масса Земли, M_2 — масса Солнца, $r_1 = \sqrt{(x_1+1-\mu)^2 + x_2^2 + x_3^2}$, $r_2 = \sqrt{(x_1-\mu)^2 + x_2^2 + x_3^2}$, O — центр инерции Земли и Солнца, ось Ox_1 направлена вдоль оси, соединяющей O и центр масс Солнца; $\mathbf{u} = (u_1; u_2; u_3)$ — вектор управляющего воздействия. В принятой

* Электронный адрес: d.shimanchuk@spbu.ru

модели единицы времени и расстояния выбраны таким образом, что единица расстояния равна а. е., R — расстояние от Земли до Солнца, а единица времени — 58.0916 сут (год, деленный на 2π). Точка либрации L_1 во вращающейся системе неподвижна и имеет координаты $\mathbf{x}^* = (-0.9900265046; 0; 0)$, $\mathbf{y}^* = (0; -0.9900265046; 0)$.

В случае, когда $\mathbf{u} = 0$, будем иметь неуправляемую систему (1), которой будет отвечать неуправляемое движение. Неуправляемая система (1) — гамильтонова, с функцией Гамильтона

$$H = \frac{\|\mathbf{y}\|^2}{2} - \frac{\mu}{r_1} - \frac{1-\mu}{r_2} + x_2y_1 - x_1y_2,$$

где $\|\ast\|$ — евклидова норма вектора.

При построении законов управления ориентацией солнечного паруса будем использовать упрощенные уравнения, так называемое хилловское приближение уравнений движения. Эти уравнения получаются из (1), если перейти от барицентрической вращающейся системы координат к относительной вращающейся системе координат с началом в центре Земли и оставить два первых члена в разложении солнечного потенциала по степеням $\frac{\|\mathbf{x}\|}{R}$. Такой прием применил Хилл в своей теории движения Луны.

Уравнения управляемого движения КА во вращающейся системе координат в рамках хилловского приближения для солнечного потенциала могут быть представлены в виде (Шмыров, 2005)

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + y_1, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + y_2, \\ \dot{x}_3 = y_3, \\ \dot{y}_1 = -\frac{3x_1}{\|\mathbf{x}\|^3} + 2x_1 + y_2 + u_1, \\ \dot{y}_2 = -\frac{3x_2}{\|\mathbf{x}\|^3} - x_2 - y_1 + u_2, \\ \dot{y}_3 = -\frac{3x_3}{\|\mathbf{x}\|^3} - x_3 + u_3, \end{cases} \quad (2)$$

где $\mathbf{x} = (x_1; x_2; x_3)$ — вектор координат КА, $\mathbf{y} = (y_1; y_2; y_3)$ — вектор сопряженных импульсов, центр инерции Земли совпадает с началом системы координат, а ось Ox_1 направлена вдоль оси, соединяющей центры масс Земли и Солнца; $\mathbf{u} = (u_1; u_2; u_3)$ — вектор управляющего воздействия. В случае, когда $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, будем иметь неуправляемую систему (2), которая описывает неуправляемое движение. В принятой модели единицы времени и расстояния выбраны таким образом, что единица расстояния приблизительно равна 10^{-2} а. е. $\approx 1.5 \times 10^6$ км, а единица времени — 58.0916 сут (год, деленный на 2π). Точка либрации L_1 во вращающейся системе неподвижна и имеет координаты $\mathbf{x}^* = (1; 0; 0)$, $\mathbf{y}^* = (0; 1; 0)$.

Неуправляемая система (2) — гамильтонова, где функция Гамильтона

$$H = \frac{\|\mathbf{y}\|^2}{2} - \frac{3}{\|\mathbf{x}\|} - \frac{3x_1^2}{2} + \frac{\|\mathbf{x}\|^2}{2} + x_2y_1 - x_1y_2. \quad (3)$$

Известно, что гамильтониан (3) на траекториях движения сохраняет свое значение, т.е. является интегралом для системы (2). Этот факт может быть использован для оценки точности приводимых примеров численного интегрирования.

Система линеаризованных уравнений неуправляемой системы (2) в окрестности коллинеарной точки либрации L_1 имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + y_1, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + y_2, \\ \dot{x}_3 = y_3, \\ \dot{y}_1 = 8(x_1 - 1) + (y_2 - 1), \\ \dot{y}_2 = -4x_2 - y_1, \\ \dot{y}_3 = -4x_3. \end{cases} \quad (4)$$

Матрица неуправляемой линеаризованной системы (4) имеет набор собственных значений (Шмыров, 2005)

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= \pm\sqrt{1 + 2\sqrt{7}} = \pm l, \\ \lambda_{3,4} &= \pm i\sqrt{2\sqrt{7} - 1} = \pm i\omega_e, \\ \lambda_{5,6} &= \pm 2i = \pm 2i\omega_n. \end{aligned}$$

Замечание. Из положительности собственного значения $\lambda_1 = \sqrt{1 + 2\sqrt{7}}$ следует неустойчивость точки либрации L_1 .

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Коллинеарная точка либрации является неустойчивой (Маркеев, 1978), что, очевидно, приводит к задаче стабилизации небесных тел в окрестности коллинеарной точки либрации (Шмыров, 2005). С другой стороны, неустойчивость точки либрации может быть использована как положительный фактор при задаче маневрирования небесного тела в околоземном космическом пространстве (Шмыров и др., 2015; Шмыров, Шиманчук, 2015). Примером такого рода задач могут служить проекты, направленные на решение проблемы кометно-астероидной опасности, в частности, с целью мониторинга и перехватов космических объектов, опасно сближающихся с Землей.

В этом случае и возникает задача исследования движения КА с солнечным парусом в окрестности коллинеарной точки либрации L_1 .

Пусть солнечный парус с заданными характеристиками (m — масса КА с солнечным парусом, S — площадь солнечного паруса) находится в окрестности коллинеарной точки либрации L_1 с начальными данными $x_{10}, x_{20}, x_{30}, y_{10}, y_{20}, y_{30}$. Требуется определить закон изменения ориентации паруса с целью удержания КА в окрестности L_1 .

Предлагается закон управления орбитальным движением солнечного паруса в окрестности точки либрации. Этот закон получен как решение задачи оптимального демпфирования специальной функции от фазовых переменных (координат и сопряженных импульсов) — “функции опасности” в виде обратной связи, т.е. угол ориентации зависит от фазовых переменных.

ФУНКЦИЯ ОПАСНОСТИ

Важной характеристикой поведения решения как системы (4), так и системы (2) в окрестности коллинеарной точки либрации L_1 , является линейная форма фазовых переменных — функция опасности (Шмыров и др., 2015; Шмыров, Шиманчук, 2015; Поляхова и др., 2018; Шиманчук, Шмыров, 2013):

$$d_1 = \mathbf{a}_1 \mathbf{z},$$

где $\mathbf{a}_1 = (a_{11}; a_{12}; 0; a_{14}; a_{15}; 0)$ — собственный вектор-строка, соответствующий собственному значению l , $\mathbf{z} = (x_1 - 1; x_2; x_3; y_1; y_2 - 1; y_3)$ — вектор-столбец. Вектор \mathbf{a}_1 определяется с точностью до множителя, для определенности положим

$$a_{14}^2 + a_{15}^2 = 1, \tag{5}$$

и компонента $a_{11} > 0$.

На траекториях неуправляемой линеаризованной системы (4) функция опасности, как функция времени, имеет вид

$$d_1(t) = ce^{lt},$$

где c — действительное число, определяемое из начальных условий.

У неуправляемой системы уравнений (4) имеется инвариантное 5-мерное многообразие, заполненное ограниченными траекториями, асимптотически приближающимися к двухчастотным колебаниям с частотами ω_e и ω_e . Это многообразие определяется уравнением

$$d_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0.$$

В общем случае для неуправляемой нелинейной системы (2) знак функции опасности определяет направление ухода из окрестности коллинеарной

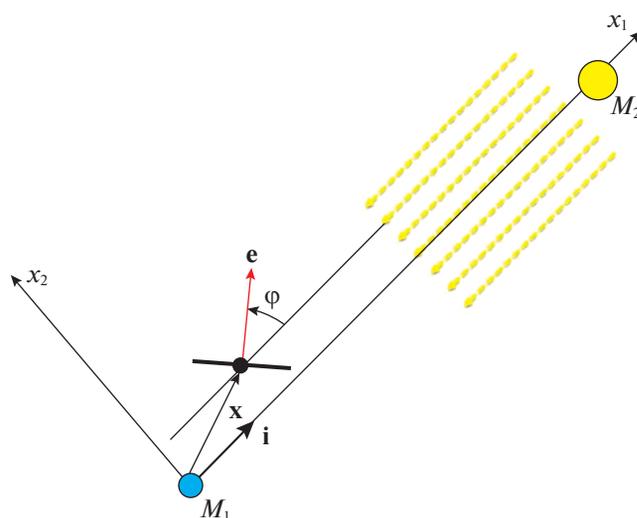


Рис. 1. Солнечный парус во вращающейся системе координат.

точки либрации L_1 к Земле или к Солнцу. Этот результат получен из численных экспериментов.

Для управляемой линеаризованной системы уравнений движения (4) поведение функции опасности d_1 на траекториях описывается уравнением

$$\dot{d}_1 = ld_1 + a_{14}u_1 + a_{15}u_2. \tag{6}$$

Уравнение (6) позволяет строить управления по методу оптимального демпфирования функции опасности. Эти управления могут использоваться как для стабилизации (Шмыров, 2005), так и для маневрирования (Шмыров и др., 2015; Шмыров, Шиманчук, 2015; Поляхова и др., 2018; Шиманчук, Шмыров, 2013).

УПРАВЛЯЕМОЕ ДВИЖЕНИЕ КА С СОЛНЕЧНЫМ ПАРУСОМ

Пусть КА с солнечным парусом движется таким образом, что орт вектора нормали паруса \mathbf{e} все время параллелен плоскости эклиптики. В этом случае управляющее ускорение, создаваемое направленным потоком фотонов от Солнца, также будет лежать в плоскости, параллельной плоскости эклиптики. Отраженный поток в случае идеально отражающей поверхности солнечного паруса сообщает небесному телу ускорение, которое определяется по формуле

$$-2\frac{pS}{m} \langle \mathbf{i}, \mathbf{e} \rangle^2 \mathbf{e},$$

где p — давление солнечного света; $\langle *, * \rangle$ — операция скалярного произведения векторов; \mathbf{i} — орт направления от Земли к Солнцу (рис. 1).

В таком случае можно определить компоненты вектора управления, создаваемого солнечным парусом:

$$\begin{aligned} u_1 &= -2\frac{pS}{m} \cos^3 \varphi, \\ u_2 &= -2\frac{pS}{m} \cos^2 \varphi \sin \varphi, \\ u_3 &= 0, \end{aligned} \quad (7)$$

где управляющий параметр φ — угол между векторами \mathbf{i} и \mathbf{e} . Угол φ при движении КА в достаточно малой окрестности точки либрации можно принять равным углу между направлением на Солнце и вектором нормали паруса.

Следует заметить, что реализация закона управления (7) отвечает плоскому развороту паруса вокруг нормали к плоскости эклиптики.

Если парус обладает односторонней отражающей поверхностью, то, согласно (7), управляющий параметр лежит в отрезке $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$.

Движению к Солнцу из окрестности L_1 соответствует траектория $d_1 > 0$, а движению к Земле — траектория с $d_1 < 0$. Для производной функции опасности (6), учитывая (5) и (7), тогда можем записать

$$\dot{d}_1 = ld_1 - 2\frac{pS}{m} f(\varphi), \quad (8)$$

где $f(\varphi) = \cos^2 \varphi \sin(\varphi + \varphi_0)$, $\varphi_0 = \arctg \frac{l^2+3}{2l} \approx 1.076$ рад.

Для удержания КА в области $d_1 < 0$ из равенства (8) и условия оптимального демпфирования функции опасности получаем

$$ld_1 - 2\frac{pS}{m} f(\beta) > 0, \quad (9)$$

где $\beta = -1.244$ рад (Поляхова и др., 2018). Аналогично для удержания КА в области $d_1 > 0$ можно получить

$$ld_1 - 2\frac{pS}{m} f(\alpha) < 0, \quad (10)$$

где $\alpha = 0.168$ рад. Если условия (9), (10) не выполняются для α и β , то они не выполняются для любого другого угла φ , что во многом обусловлено начальными данными и характеристикой солнечного паруса — парусностью $\frac{S}{m}$. В этом случае КА будет просто уходить к Земле или к Солнцу. Из условий (9) и (10) также можно получить оценку снизу и сверху для значения функции опасности, а следовательно, и оценку области управляемости:

$$\begin{aligned} d_1^{\min} &= \frac{2pS \cos^2 \beta \sin(\beta + \varphi_0)}{ml}, \\ d_1^{\max} &= \frac{2pS \cos^2 \alpha \sin(\alpha + \varphi_0)}{ml}. \end{aligned}$$

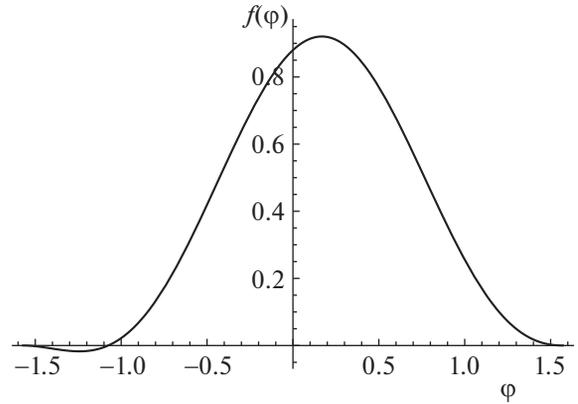


Рис. 2. График функции $f(\varphi)$.

Определим закон изменения угла φ как функцию от d_1 . Для этого зададимся некоторыми действительными числами δ и κ :

$$d_1^{\min} < \delta < d_1^{\max}, \quad \kappa > 0,$$

и определим вспомогательную функцию $\sigma(d_1)$ в виде логической функции сигмоида:

$$\sigma(d_1) = \frac{1}{1 + e^{-\kappa(d_1 - \delta)}}.$$

Режим изменения угла ориентации паруса в зависимости от функции опасности запишем в виде

$$\varphi(d_1) = \beta - (\beta - \alpha)\sigma(d_1). \quad (11)$$

На управляющий параметр может быть наложено ограничение вида $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$. Такую постановку задачи будем называть задачей управляемого движения солнечного паруса с ограничением, которое может быть обусловлено, например, необходимой ориентацией КА. Из равенства (8) и рис. 2 следует, что в области $d_1 < 0$ удержание с помощью управления (7) при данном ограничении не представляется возможным, но сама задача удержания в данном случае также будет иметь решение.

Если задать действительные числа δ и κ :

$$0 < \delta < d_1^{\max}, \quad \kappa > 0,$$

то режим изменения управляющего параметра представим в виде

$$\varphi(d_1) = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\sigma(d_1).$$

ЧИСЛЕННЫЙ ПРИМЕР

Проведем компьютерное моделирование движения солнечного паруса в окрестности коллинеарной точки либрации L_1 . Для моделирования движения используем параметры солнечного паруса $m = 300$ кг, $S = 225$ м². Выбор начальных данных для отработки управляющего воздействия

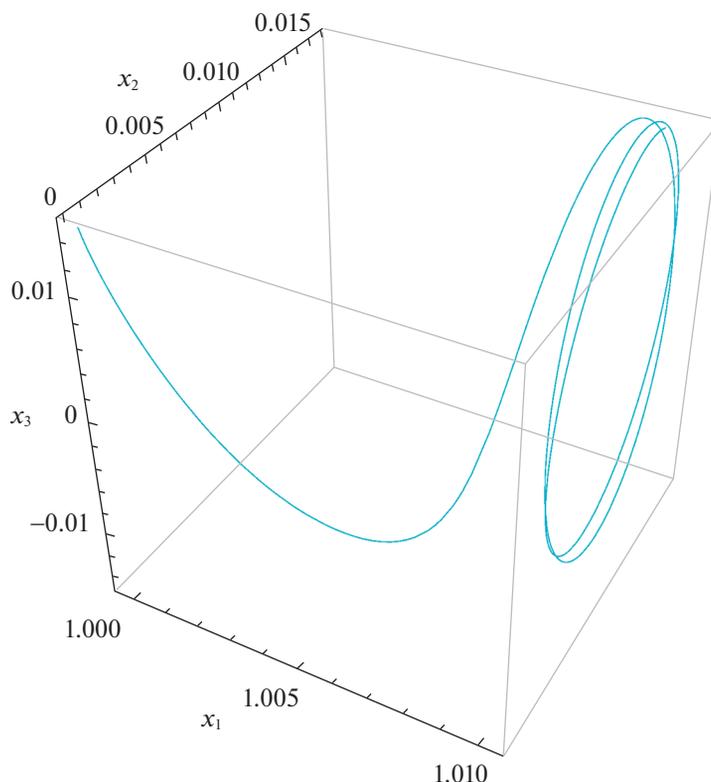


Рис. 3. Траектория управляемого движения КА с солнечным парусом на промежутке времени 3π единиц.

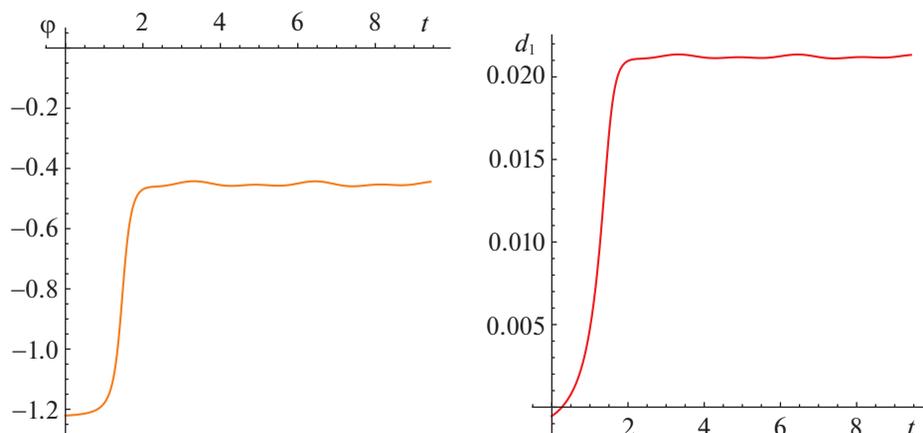


Рис. 4. График значения угла ориентации паруса (слева) и график значения функции опасности на траектории движения паруса (справа).

с точностью до линейного приближения будет обуславливаться областью управления $-0.00079 < \delta < 0.04221$. Отметим, что вопрос размещения такого объекта в окрестности точки либрации в данной работе не исследуется, формулировка идеи и возможный алгоритм решения такой задачи представлены в работе Шиманчука, Шмырова (2013).

Результаты численного моделирования управляемого движения солнечного паруса с начальными данными $x_{10} = 0.9998$, $x_{20} = 0$, $x_{30} = 0.015$, $y_{10} = 0$, $y_{20} = 1$, $y_{30} = 0$ при $\delta = 0.02$ и $\kappa = 200$ на промежутке времени 1.5 года приведены на рис. 3

и 4. На рис. 3 представлена траектория управляемого движения солнечного паруса. На рис. 4 представлены графики значений угла ориентации паруса и функции опасности при управляемом движении паруса.

На рис. 3 видно, что траектория управляемого движения состоит из двух этапов. Первый этап — переходный, который характеризуется временем около 4 мес. На этом этапе ориентация паруса меняется от -1.2209 рад до -0.45 рад. Второй этап — установившееся движение. На этом этапе

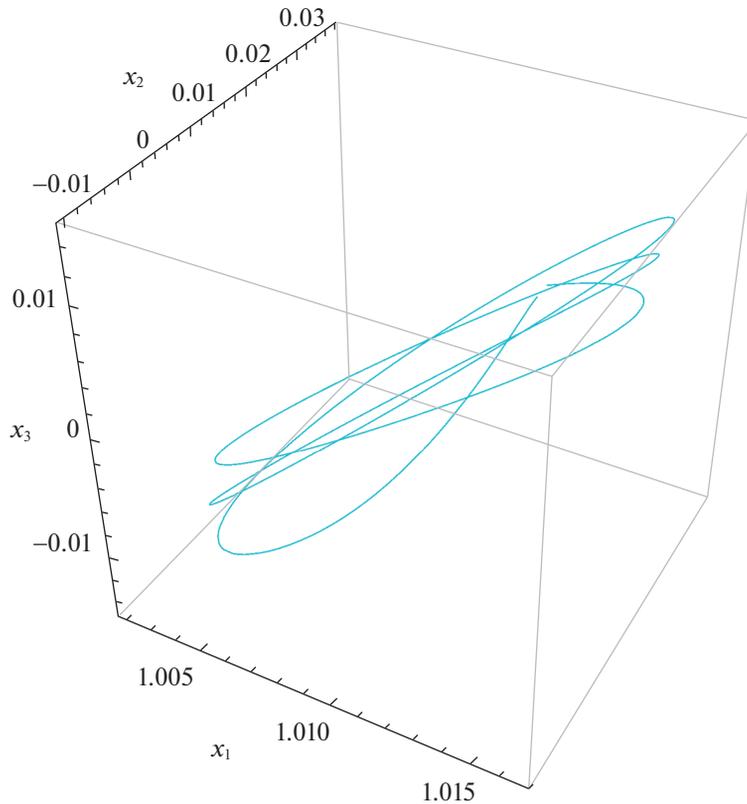


Рис. 5. Траектория управляемого движения КА с солнечным парусом на промежутке времени 3π единиц (см. текст).

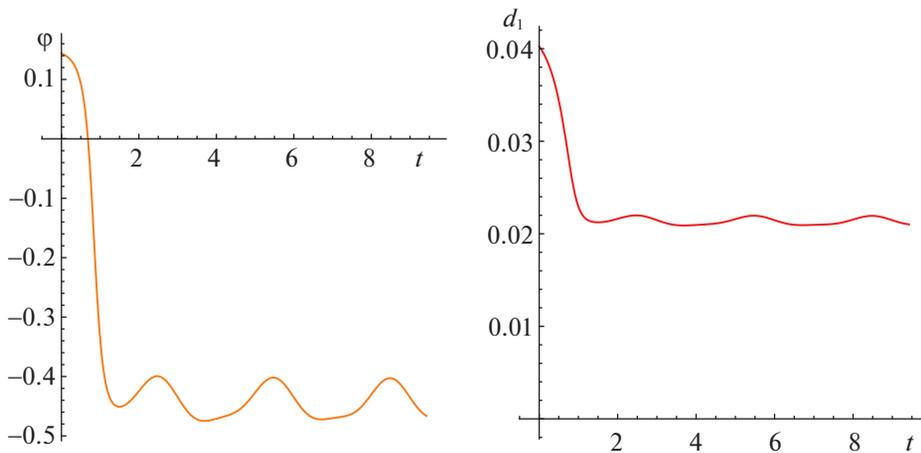


Рис. 6. График значения угла ориентации паруса (слева) и график значения функции опасности на траектории движения паруса (справа) (см. текст).

угол ориентации паруса колеблется около значения -0.45 рад. Амплитуда колебаний порядка 0.01 рад.

Результаты численного моделирования управляемого движения солнечного паруса с начальными данными $x_{10} = 1.015$, $x_{20} = 0$, $x_{30} = 0.015$, $y_{10} = 0$, $y_{20} = 1$, $y_{30} = 0$ при $\delta = 0.02$ и $\kappa = 200$ на промежутке времени 1.5 года приведены на рис. 5 и 6. На рис. 5 представлена траектория управляемого движения солнечного паруса. На рис. 6 представлены графики значений угла ориентации

паруса и функции опасности при управляемом движении паруса.

Аналогично рис. 3 движение на рис. 5 можно охарактеризовать двумя этапами. Переходному этапу на промежутке времени порядка 2 мес отвечает изменение ориентации паруса от 0.1438 рад до -0.44 рад. На установившемся этапе угол ориентации паруса колеблется около значения -0.44 рад. Амплитуда колебаний порядка 0.04 рад. Заметим, что наличие этих колебаний связано с нелинейностью модели движения.

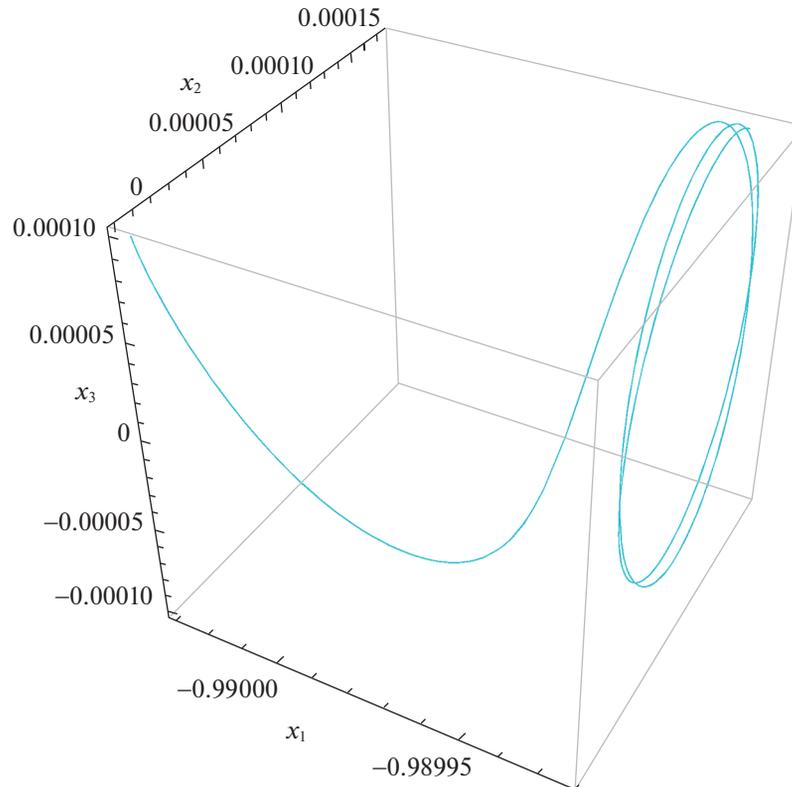


Рис. 7. Траектория управляемого движения КА с солнечным парусом (см. текст).

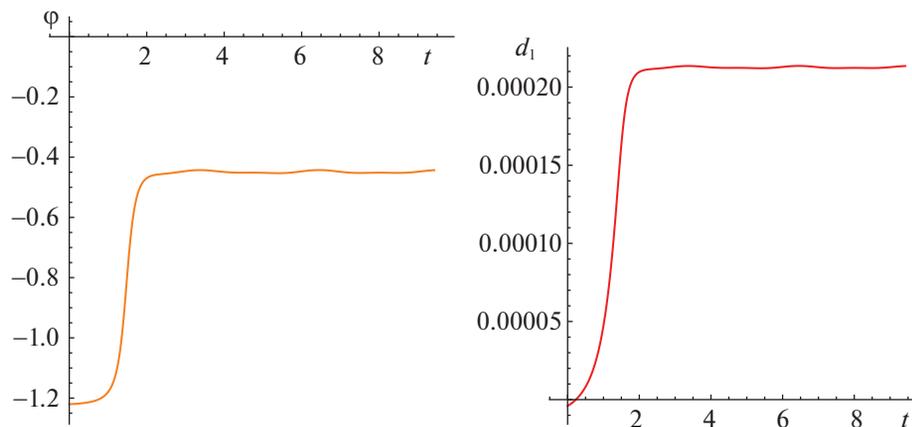


Рис. 8. График значения угла ориентации паруса (слева) и график значения функции опасности на траектории движения паруса (справа) (см. текст).

Таким образом, из результатов компьютерного моделирования управляемого движения солнечного паруса в точке либрации L_1 видно, что с помощью солнечного паруса можно обеспечить удержание КА в окрестности коллинеарной точки либрации L_1 при условиях (9), (10). Из результатов численного моделирования также можно сказать, что управляемому движению солнечного паруса с предложенными законами управления будет отвечать время переходного процесса, которое зависит от параметра κ , а установившемуся процессу будут отвечать колебания угла ориентации паруса отно-

сительно некоторого значения, которое зависит от параметра δ .

УПРАВЛЯЕМОЕ ДВИЖЕНИЕ ПАРУСА В КРУГОВОЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ЗАДАЧЕ ТРЕХ ТЕЛ

В данном пункте смоделируем орбитальное движение паруса с предложенными законами управления в круговой ограниченной задаче трех тел. На основании уравнений хилловского приближения

круговой ограниченной задачи трех тел примем в качестве функции опасности выражение

$$d_1 = \mathbf{a}_1 \mathbf{z},$$

где $\mathbf{z} = (x_1 + 0.9900265046; x_2; x_3; y_1; y_2 + 0.9900265046; y_3)$ — вектор-столбец.

Результаты численного моделирования управляемого движения солнечного паруса с начальными данными $x_{10} = -0.9900280046$, $x_{20} = 0$, $x_{30} = -0.015$, $y_{10} = 0$, $y_{20} = -0.9900265046$, $y_{30} = 0$ при $\delta = 0.0002$ и $\kappa = 20000$ на промежутке времени 1.5 года приведены на рис. 7 и 8. На рис. 7 представлена траектория управляемого движения солнечного паруса. На рис. 8 представлены графики значений угла ориентации паруса и функции опасности при управляемом движении паруса.

Графики на рис. 3, рис. 4, рис. 7, рис. 8 показывают идентичность результатов для модели круговой ограниченной задачи трех тел и модели хилловского приближения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработанный подход позволяет получить управление в форме обратных связей, решающее задачу удержания небесного тела с солнечным парусом вблизи коллинеарной точки либрации L_1 , учитывая свойство неустойчивости точки либрации и характеристику солнечного паруса — парусность. Предложенные законы управления движением КА с солнечным парусом, построенные в рамках хилловского приближения круговой ограниченной задачи трех тел, показали в ходе численных экспериментов свою эффективность в более общей модели движения. Эффективность управления солнечного паруса существенно выше в области $d_1 > 0$ по сравнению с управлением в области $d_1 < 0$. Это напоминает ситуацию с обычным парусником, когда движение против

ветра существенно труднее, хотя и возможно, чем движение по ветру.

Таким образом, предложенный закон управления ориентацией солнечного паруса с целью удержания КА в окрестности коллинеарной точки либрации заключается в том, чтобы обеспечить близость в фазовом пространстве КА к инвариантному многообразию. Ясно, что такое требование является менее жестким по сравнению с подходом, изложенным в работе Буклесса, Макиннеса (2008), и может быть реализовано при меньшей парусности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Буклесс, Макиннес (J. Bookless and C. McInnes), *Acta Astronautica* **62**, 159 (2008).
2. Маркеев А.П., *Точки либрации в небесной механике и космодинамике* (М.: Наука, 1978).
3. Поляхова и др. (E. Polyakhova, A. Shmyrov, and V. Shmyrov), *AIP Conf. Proceed.* (Ed. Kustova E.V., Leonov G.A., Yushkov M.P., Morosov N.F., Mekhonoshina M.A., St. Petersburg, AIP, 2018).
4. Себехей (V. Szebehely), *Theory of orbit — The restricted problem of three bodies* (Academic Press, New York, 1967).
5. Шиманчук Д.В., Шмыров А.С., *Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 10: Прикладная математика, информатика, процессы управления* **2**, 76 (2013).
6. Шмыров В.А., *Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления* **2**, 193 (2005).
7. Шмыров и др. (A. Shmyrov, D. Shymanchuk, and L. Sokolov), 2015 International Conference on “Stability and Control Processes” in Memory of V.I. Zubov, *SCP 2015 — Proceedings* (Ed. Petrosyan L.A., Zhabko A.P., St. Petersburg, IEEE, 2015), p. 129.
8. Шмыров, Шиманчук (A. Shmyrov and D. Shymanchuk), 2015 International Conference on Mechanics — Seventh Polyakhov’s Reading (Ed. Tikhonov A. A., St. Petersburg, IEEE, 2015).