

# ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ПЛАНЕТНОЙ СИСТЕМЫ НА КОСМОГОНИЧЕСКИХ ВРЕМЕНАХ

© 2020 г. Д. В. Микрюков<sup>1\*</sup>

<sup>1</sup>Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия

Поступила в редакцию 13.02.2020 г.

После доработки 19.04.2020 г.; принята к публикации 28.04.2020 г.

Рассматривается динамическая эволюция планетных систем, структура которых близка к круговой и компланарной. Исследование выполняется с помощью метода осреднения Хори–Депри в рамках теории первого порядка по планетным массам. Для получения уравнений движения используются удобный набор канонических элементов и редко употребляемая разновидность астроцентрических координат. Благодаря использованию выбранной системы канонических элементов, разложения правых частей осредненных уравнений содержат относительно небольшое количество слагаемых. По сравнению с другими распространенными системами координат, применяемые нами астроцентрические координаты позволяют получить более удобное представление возмущающей функции и не требуют ее разложения в ряд по степеням малого параметра. На временах порядка  $10^5$ – $10^7$  лет с помощью численного интегрирования осредненных уравнений изучена долговременная эволюция планетных систем HD 12661,  $\nu$  Andromedae, а также некоторых модельных систем. В рассмотренных системах выявлены возможные вековые резонансы.

*Ключевые слова:* планетная задача, метод осреднения, метод Хори–Депри, гелиоцентрические координаты, астроцентрические координаты, вековые резонансы, гамильтониан, возмущающая функция, ряды Пуассона, канонические элементы Пуанкаре, коэффициенты Лапласа.

DOI: 10.31857/S0320010820050058

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Первые внесолнечные планеты были открыты в конце прошлого века. В настоящее время количество известных экзопланет измеряется тысячами. По своим физическим и динамическим характеристикам экзопланетные системы существенно отличаются друг от друга, поэтому в этих системах могут наблюдаться разные эволюционные картины.

Под устойчивым движением планетной системы обычно (см., например, Кузнецов, Холшевников, 2009; Холшевников, Кузнецов, 2011) понимают такое поведение оскулирующих эллипсов, при котором исключены тесные сближения и выбросы планет из системы. Вместе с тем предполагается, что планетная конфигурация все время остается близкой к компланарной, а также, что в любой паре соседних эллипсов афелийное расстояние внутренней орбиты всегда меньше перигелийного расстояния внешней орбиты. Поскольку движение планетной системы на протяжении всей ее эволюции происходит в ограниченной области пространства

(предполагаем, что барицентр системы неподвижен), сформулированный тип устойчивости представляет собой специальный случай устойчивости по Лагранжу<sup>1</sup>. Время существования устойчивой планетной системы сравнимо со временем существования центральной звезды.

Устойчивость планетных орбит обычно изучают аналитическими средствами, в основу которых положены идеи метода осреднения. Для получения уравнений движения сначала выбирают систему координат. Наибольшее распространение получили координаты Якоби (Холшевников и др., 2001, 2002; Ли, Пил, 2003; Балувев, 2011; Перминов, Кузнецов, 2015) и введенные в употребление Пуанкаре (1965) канонические астроцентрические координаты (Красинский, 1973; Ласкар, Робютель,

<sup>1</sup> Напомним, что частное решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений называется устойчивым по Лагранжу, если оно остается определенным и равномерно ограниченным при всех  $t \geq t_0$ , где  $t_0$  — начальный момент времени. Примером системы, устойчивой по Лагранжу, могут служить лагранжевы треугольные решения в общей задаче трех тел. Точное определение устойчивости по Лагранжу можно найти в руководстве Гребеникова (1976) и Демидовича (1967).

\* Электронный адрес: d.mikryukov@spbu.ru

1995; Родригес, Гальярдо, 2005; Либер, Дилсейт, 2012; Либер, Сансотера, 2013; Робютель, Нидерман, Пусс, 2016; Сансотера, Либер, 2019).

Менее распространена система астроцентрических координат Уинтнера (1967, §340–§341). Использование координат Уинтнера в планетной задаче с некоторых точек зрения представляется более естественным. Например, в отличие от координат Якоби, астроцентрические координаты Уинтнера не требуют разложения возмущающего потенциала системы в ряд по степеням малого параметра. Далее, в канонических астроцентрических координатах Пуанкаре кинетическая энергия системы выражается через барицентрические скорости. Представление же кинетической энергии в системе координат Уинтнера записывается с помощью астроцентрических скоростей (ср. формулу (7) в работе Ласкара и Робютеля, 1995, с формулой (6<sub>2</sub>) в §341 руководства Уинтнера, 1967). Благодаря этому, оскулирующие эллипсы в координатах Уинтнера определяются более удобным образом.

Целью настоящего исследования является изучение устойчивости нерезонансных и слабрезонансных планетных систем на космогонических временах. Наше исследование выполняется в астроцентрических координатах Уинтнера, так что попутно мы показываем, что эти координаты являются достойной альтернативой ныне широко используемым координатам Якоби и каноническим координатам Пуанкаре. Основным инструментом является метод осреднения. Мы записываем уравнения движения в удобной системе оскулирующих элементов, после чего составляем уравнения движения в средних элементах. Осредненная система интегрируется численно. Аналитический аппарат, необходимый для получения используемых нами здесь осредненных уравнений, разработан и детально описан автором в работах (Микрюков, 2016, 2018).

Мы будем рассматривать теорию первого и второго порядка по планетным массам. Поскольку теория второго порядка — довольно специальная тема, требующая рассмотрения сложной проблемы малых знаменателей<sup>2</sup>, мы решили разделить наше исследование на две части. В настоящей работе мы рассмотрим теорию первого порядка — так называемую вековую эволюцию планетной системы (см. также работы Кордани, 2004; Чазов, 2013). Мы ограничимся изучением поведения только медленных переменных осредненной системы. Мы покажем, что используемые нами уравнения пригодны для описания эволюции планетных систем весьма широкого класса. Следующую работу мы посвятим теории второго порядка.

<sup>2</sup> Строго говоря, малые знаменатели появляются уже в первом порядке, см. первый абзац раздела 5.

*Терминологическое замечание.* В исследованиях, посвященных динамике планетных систем, можно встретить разные трактовки термина “вековая эволюция планетной системы”; употребляются также термины-синонимы “вековая модель”, “вековое поведение” и т.п. В настоящей работе мы под всеми этими терминами будем подразумевать динамическую эволюцию, которая определяется исключительно теорией первого порядка по планетным массам. При построении этой теории все резонансные слагаемые из правых частей осредненной системы отбрасываются (см. разделы 4 и 5).

В разделах 2, 3 и 4 мы приводим основной аналитический аппарат, используемый в работе (в работах Микрюкова, 2016, 2018, содержится его более подробное описание). В разделе 5 мы рассматриваем вековую эволюцию некоторых модельных и реальных внесолнечных планетных систем. В разделе 6 обсуждаются результаты.

## 2. ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

Для кеплеровых элементов будем использовать стандартный набор букв:  $a, e, i, M, g, \Omega$  обозначают соответственно большую полуось, эксцентриситет, наклонение, среднюю аномалию, аргумент перицентра и долготу восходящего узла. Точка сверху и черта сверху будут всюду означать соответственно дифференцирование по времени и комплексное сопряжение. Мнимую единицу обозначим через  $i$  и положим  $\text{Exp } \varphi = \exp i\varphi$  для любого комплексного  $\varphi$ . Нам понадобятся два символа суммирования

$$\sum_1 = \sum_{k=1}^N, \quad \sum_2 = \sum_{1 \leq j < k \leq N} . \quad (1)$$

Второй символ (двойной) суммы будем применять только для суммирования величин с индексами  $j$  и  $k$ . В первом символе индекс может обозначаться различными буквами. В формулах (1) натуральное число  $N \geq 2$ .

Все вычисления в работе (см. раздел 5) выполняются в следующей системе единиц: за единицу массы мы принимаем массу Солнца, за единицу длины — астрономическую единицу, а за единицу времени — сидерический земной год. Численное значение постоянной тяготения  $\mathcal{G}$  в этих единицах равно  $4\pi^2$ .

Остальные обозначения нам будет удобно вводить по ходу изложения.

## 3. ГАМИЛЬТОНИАН СИСТЕМЫ В АСТРОЦЕНТРИЧЕСКИХ КООРДИНАТАХ

В евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^3$  рассмотрим материальные точки  $Q_0, Q_1, Q_2, \dots, Q_N$  с массами соответственно  $m_0, \mu m_1 m_0, \mu m_2 m_0, \dots, \mu m_N m_0$ .

Здесь  $N \geq 2$ , безразмерный малый параметр  $\mu$  равен отношению массы самой массивной из “планет”  $Q_1, \dots, Q_N$  к массе “Солнца”  $Q_0$ , а соответствующие планетам безразмерные множители  $m_k \leq 1$ .

### 3.1. Астроцентрическая система координат

Введем декартову инерциальную систему координат с началом в точке  $O$  и зададим в этой системе положение точек  $Q_0, Q_1, \dots, Q_N$  соответственно радиусами-векторами  $\rho_0, \rho_1, \dots, \rho_N$ . Астроцентрическая система координат  $\mathbf{r}$  определяется (Уинтнер, 1967; Микрюков, 2016) равенствами

$$\mathbf{r}_0 = \frac{1}{\tilde{m}} \rho_0 + \frac{\mu}{\tilde{m}} \sum_1 m_j \rho_j, \quad (2)$$

$$\mathbf{r}_k = \rho_k - \rho_0, \quad k = 1, 2, \dots, N,$$

где  $\tilde{m} = 1 + \mu m_1 + \dots + \mu m_N$ . Определитель преобразования (2) между абсолютными  $\rho$  и астроцентрическими  $\mathbf{r}$  координатами равен единице. Бесстолкновительное конфигурационное пространство  $\mathbb{A}_1$  системы координат  $\mathbf{r}$  получается из  $\mathbb{R}^{3N+3}$  удалением  $N(N-1)/2$  плоскостей

$$\mathbf{r}_j = \mathbf{r}_k, \quad 1 \leq j < k \leq N, \quad (3)$$

и  $N$  плоскостей

$$\mathbf{r}_j = 0, \quad 1 \leq j \leq N. \quad (4)$$

Каждая из  $N(N+1)/2$  плоскостей (3), (4) имеет размерность  $3N$ . Фазовое пространство  $\mathbb{A}_2 = \mathbb{A}_1 \times \mathbb{R}^{3N+3}$ . Легко видеть, что каждое из множеств  $\mathbb{A}_1$  и  $\mathbb{A}_2$  открыто и связно и поэтому является областью.

Движение точек  $Q_0, Q_1, \dots, Q_N$  полностью определяется функцией Гамильтона  $\mathcal{H}$ , представляющей в координатах  $\mathbf{r}$  полную механическую энергию системы. При составлении канонических уравнений движения удобно вместо  $\mathcal{H}$  использовать величину

$$h = \frac{\mathcal{H}}{\mu m_0},$$

имеющую размерность квадрата скорости (см. также работу Робютель и др., 2016). После исключения центра инерции функция  $h$  представляется (Микрюков, 2016) стандартной суммой невозмущенной и малой возмущающей частей:

$$h = h_0 + \mu h_1, \quad (5)$$

где

$$h_0 = \sum_1 \beta_k \left( \frac{\mathbf{r}_k^2}{2} - \frac{\varkappa_k^2}{|\mathbf{r}_k|} \right),$$

$$h_1 = - \sum_2 m_j m_k \left( \frac{\mathcal{G} m_0}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k|} + \frac{\dot{\mathbf{r}}_j \dot{\mathbf{r}}_k}{\tilde{m}} \right),$$

$$\beta_k = m_k \left( 1 - \frac{\mu m_k}{\tilde{m}} \right), \quad \varkappa_k^2 = \frac{\mathcal{G} m_0 m_k}{\beta_k} \quad (\varkappa_k > 0).$$

Функция  $h$  зависит только от  $6N$  компонент астроцентрических векторов  $\mathbf{r}_k, \dot{\mathbf{r}}_k$  ( $1 \leq k \leq N$ ), так что дальнейшее исследование системы происходит в  $6N$ -мерном фазовом пространстве. Далее под гамильтонианом мы будем всюду подразумевать величину  $h$ .

### 3.2. Система оскулирующих элементов

Для большинства планетных систем характерна ситуация, когда оскулирующие орбиты на протяжении длительного интервала времени сохраняют малые значения наклонов и эксцентриситетов. В таких случаях исследование динамической эволюции удобно (Ласкар, Робютель, 1995) вести в канонических комплексных элементах Пуанкаре

$$P = X \sqrt{\Lambda/2}, \quad p = -i\bar{P}, \quad (6)$$

$$Q = Y \sqrt{2\Lambda}, \quad q = -i\bar{Q},$$

$$\Lambda = \beta \varkappa \sqrt{a}, \quad \lambda = M + \tilde{g},$$

где

$$X = \sqrt{2(1-\eta)} \text{Exp } \tilde{g}, \quad (7)$$

$$Y = \sqrt{\eta(1-\cos i)/2} \text{Exp } \Omega,$$

$$\eta = \sqrt{1-e^2}, \quad \tilde{g} = g + \Omega.$$

Мы предполагаем, что в формулах (6) и (7) все переменные снабжены одним и тем же индексом  $j$ , равным номеру планеты ( $1 \leq j \leq N$ ). Далее во всех случаях, когда не могут возникнуть недоразумения, мы будем опускать планетную индексацию.

В отличие от кеплеровой части

$$h_0 = - \sum_1 \frac{\beta_s^3 \varkappa_s^4}{2\Lambda_s^2}$$

гамильтониана (5), возмущающая функция  $h_1$  зависит сложным образом от всех  $6N$  переменных (6). В результате уравнения движения принимают форму

$$\dot{P} = -\mu \frac{\partial h_1}{\partial p}, \quad \dot{p} = \mu \frac{\partial h_1}{\partial P}, \quad (8)$$

$$\dot{Q} = -\mu \frac{\partial h_1}{\partial q}, \quad \dot{q} = \mu \frac{\partial h_1}{\partial Q},$$

$$\dot{\Lambda} = -\mu \frac{\partial h_1}{\partial \Lambda}, \quad \dot{\lambda} = \omega + \mu \frac{\partial h_1}{\partial \lambda},$$

где  $\omega = \partial h_0 / \partial \Lambda = \varkappa^4 \beta^3 \Lambda^{-3} = \varkappa a^{-3/2}$ . Порядок автономной системы (8) равен  $6N$ .

Ниже мы будем иногда пользоваться векторными обозначениями

$$\mathbf{P}, \mathbf{Q}, \Lambda, \mathbf{p}, \mathbf{q}, \lambda. \quad (9)$$

Положим также  $\mathbf{\Gamma} = (\mathbf{P}, \mathbf{Q}, \mathbf{\Lambda}, \mathbf{p}, \mathbf{q})$ . Каждый из векторов (9) следует представлять себе как матрицу  $1 \times N$ , а вектор медленных переменных  $\mathbf{\Gamma}$  — как матрицу  $1 \times 5N$ .

3.3. Разложение возмущающей функции

Занумеруем планеты так, чтобы было  $a_1 < a_2 < \dots < a_N$ . Для любых натуральных  $j$  и  $k$  таких, что  $1 \leq j < k \leq N$ , введем обозначения  $\alpha_{jk} = a_j/a_k$ ,  $R_{jk} = a_k |\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k|^{-1}$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{jk} &= -\frac{\mathcal{G}m_0 m_j m_k}{a_k} R_{jk}, & \mathcal{V}_{jk} &= -\frac{m_j m_k}{\tilde{m}} \dot{\mathbf{r}}_j \dot{\mathbf{r}}_k, \\ \sigma_{jk} &= -\mathcal{G}m_0 m_j m_k \alpha_k^2 \beta_k^2, \\ \tau_{jk} &= -\frac{m_j m_k \alpha_j^2 \alpha_k^2 \beta_j \beta_k}{\tilde{m}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (XY)_{jk}^{\ell v} &= X_j^{\ell_1} X_k^{\ell_2} Y_j^{\ell_3} Y_k^{\ell_4} \bar{X}_j^{v_1} \bar{X}_k^{v_2} \bar{Y}_j^{v_3} \bar{Y}_k^{v_4}, \\ (n\lambda)_{jk} &= n_1 \lambda_j + n_2 \lambda_k. \end{aligned}$$

В определениях величин  $(XY)_{jk}^{\ell v}$  и  $(n\lambda)_{jk}$  буквами  $\ell, v, n$  обозначены целочисленные векторы. При этом компоненты  $n_1$  и  $n_2$  вектора  $n$  могут принимать произвольные значения, а компоненты  $\ell_s$  и  $v_s$  соответственно векторов  $\ell$  и  $v$  — произвольные неотрицательные значения. Теперь справедливо представление

$$h_1 = \sum_2 \mathcal{R}_{jk} + \sum_2 \mathcal{V}_{jk}, \tag{10}$$

в котором первая и вторая сумма называются соответственно главной и дополнительной частью возмущающей функции. Величины  $\mathcal{R}_{jk}$  и  $\mathcal{V}_{jk}$  разлагаются в ряды Пуассона

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{jk} &= \frac{\sigma_{jk}}{\Lambda_k^2} \sum_{\mathbb{K}} C_{\ell v n}^{jk} (XY)_{jk}^{\ell v} \text{Exp}(n\lambda)_{jk}, & (11) \\ \mathcal{V}_{jk} &= \frac{\tau_{jk}}{\Lambda_j \Lambda_k} \sum_{\mathbb{K}_1} I_{\ell v n} (XY)_{jk}^{\ell v} \text{Exp}(n\lambda)_{jk} \end{aligned}$$

с множествами суммирования  $\mathbb{K} = \{\ell, v \in \mathbb{Z}^4, n \in \mathbb{Z}^2\}$ :

$$\begin{aligned} \ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4, v_1, v_2, v_3, v_4 &\geq 0, \\ \ell_1 + \ell_2 + \ell_3 + \ell_4 - v_1 - v_2 - v_3 - v_4 + n_1 + n_2 &= 0, \\ \ell_3 + \ell_4 + v_3 + v_4 &= \text{четное} \} \end{aligned}$$

и  $\mathbb{K}_1 = \mathbb{K} \setminus \{\ell, v \in \mathbb{Z}^4, n \in \mathbb{Z}^2 : |n_1| + |n_2| = 0\}$ . Коэффициенты

$$\begin{aligned} C_{\ell v n}^{jk} &= C_{\ell_1 \ell_2 \ell_3 \ell_4 v_1 v_2 v_3 v_4 n_1 n_2}^{jk}(\alpha_{jk}), \\ I_{\ell v n} &= I_{\ell_1 \ell_2 \ell_3 \ell_4 v_1 v_2 v_3 v_4 n_1 n_2} \end{aligned}$$

рядов (11) вещественны и безразмерны, однако в отличие от  $C_{\ell v n}^{jk}$ , коэффициенты  $I_{\ell v n}$  сохраняют фиксированное значение для любой планетной пары, поскольку являются постоянными рациональными числами. Коэффициенты рядов (11) загружены нами в базу данных Mendeley Data и доступны для свободного скачивания по ссылке <http://dx.doi.org/10.17632/3cb75grjz4.1>.

4. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ В СРЕДНИХ ЭЛЕМЕНТАХ

Система уравнений (8) принадлежит к классу многочастотных систем с медленными и быстрыми переменными (Гребеников, 1986). Поведение решений таких систем на длительных интервалах времени обычно исследуют с помощью метода осреднения. Благодаря тому, что правые части осредненной системы зависят лишь от медленных переменных, ее решение изучать гораздо проще, чем решение точной системы. Общая теория метода осреднения излагается в стандартных руководствах (Моисеев, 1969; Волосов, Моргунов, 1971; Митропольский, 1971; Боголюбов, Митропольский, 1974; Холшевников, 1985; Гребеников, 1986).

Важным на практике является случай, когда исходные уравнения имеют вид автономной канонической системы, гамильтониан  $h$  которой, помимо медленных и быстрых переменных, зависит аналитически от малого параметра  $\mu$ :

$$h = h_0 + \mu h_1 + \mu^2 h_2 + \dots \tag{12}$$

Обычным требованием осреднения гамильтоновых систем является сохранение канонической формы осредненных уравнений. Для случаев слабозвмущенных консервативных систем, описываемых гамильтонианом типа (12), новый (осредненный) гамильтониан  $H$  строится в виде

$$H = H_0 + \mu H_1 + \mu^2 H_2 + \dots \tag{13}$$

В нерезонансном случае коэффициенты  $H_0, H_1, H_2, \dots$  ряда (13) должны зависеть только от медленных переменных.

Уравнения большинства планетных теорий задаются гамильтонианом вида (12). В частности, для нашего гамильтониана (5) справедливо

$$h(\mathbf{\Gamma}, \boldsymbol{\lambda}) = h_0(\boldsymbol{\Lambda}) + \mu h_1(\mathbf{\Gamma}, \boldsymbol{\lambda}).$$

Мы будем рассматривать системы первого и второго приближения, которые определяются соответственно гамильтонианами

$$H(\mathbf{\Gamma}) = H_0(\mathbf{\Gamma}) + \mu H_1(\mathbf{\Gamma}) \tag{14}$$

и

$$H(\mathbf{\Gamma}) = H_0(\mathbf{\Gamma}) + \mu H_1(\mathbf{\Gamma}) + \mu^2 H_2(\mathbf{\Gamma}). \tag{15}$$

Если планеты движутся вне областей острого резонанса, то решения систем первого и второго приближения дают общее представление о поведении решения исходной системы (8) на временах порядка  $t \sim \mu^{-1}$  и  $t \sim \mu^{-2}$  соответственно.

Метод Хори–Депри (Найфэ, 1976; Маркеев, 1978; Джакаля, 1979; Холшевников, 1985; Морбиделли, 2014; Шевченко, 2017) указывает эффективный путь вычисления коэффициентов осредненного гамильтониана (13). Основная задача состоит в построении производящей функции

$$T = \mu T_1 + \mu^2 T_2 + \dots, \quad (16)$$

которая полностью определяет осредненный гамильтониан (13) и формулы перехода между старыми и новыми переменными. Для получения функций (14), (15) достаточно вычислить только первый коэффициент  $T_1 = T_1(\mathbf{\Gamma}, \boldsymbol{\lambda})$  асимптотического ряда (16). Введем обозначения, с помощью которых можно будет выписать явный вид коэффициентов  $H_0, H_1, H_2$  отрезков разложений (14), (15).

Пусть некоторая функция  $f = f(\mathbf{\Gamma}, \boldsymbol{\lambda})$  в некоторой области изменения своих аргументов разлагается по компонентам вектора  $\boldsymbol{\lambda}$  в  $N$ -кратный ряд Фурье

$$f(\mathbf{\Gamma}, \boldsymbol{\lambda}) = \sum_{|k| \geq 0} f_k(\mathbf{\Gamma}) \text{Exp}(k\boldsymbol{\lambda}).$$

Здесь  $|k| = \sum_1 |k_s|$ ,  $(k\boldsymbol{\lambda}) = \sum_1 k_s \lambda_s$ . Положим для такой функции

$$\langle f \rangle = (2\pi)^{-N} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} f(\mathbf{\Gamma}, \boldsymbol{\lambda}) d\lambda_1 \dots d\lambda_N = f_0(\mathbf{\Gamma}),$$

$$\tilde{f} = \sum_{|k| \geq 1} \frac{f_k(\mathbf{\Gamma})}{i(k\boldsymbol{\omega})} \text{Exp}(k\boldsymbol{\lambda}),$$

где  $(k\boldsymbol{\omega}) = \sum_1 k_s \omega_s$ . Величина  $\tilde{f}$  определяется в предположении отсутствия резонансов в системе.

Коэффициенты  $H_0, H_1, H_2$  гамильтонианов (14) и (15) находятся (Холшевников, 1985; Микрюков, 2018) по формулам

$$H_0 = h_0, \quad H_1 = \langle h_1 \rangle, \quad (17)$$

$$H_2 = \langle \{T_1, h_1 + H_1\} \rangle / 2.$$

В равенствах (17) все функции зависят от средних элементов, причем  $T_1 = \tilde{h}_1$ , а фигурные скобки означают скобку Пуассона по основной системе элементов (6). Далее все встречающиеся функции будут зависеть от средних элементов и, начиная с формул (17), мы будем опускать указание на эту зависимость.

Запишем уравнения движения в средних элементах

$$\begin{aligned} \dot{P} &= -\partial H / \partial p, & \dot{p} &= \partial H / \partial P, \\ \dot{Q} &= -\partial H / \partial q, & \dot{q} &= \partial H / \partial Q, \\ \dot{\Lambda} &= 0, & \dot{\lambda} &= \partial H / \partial \Lambda. \end{aligned} \quad (18)$$

В настоящей работе мы изучаем поведение только медленных переменных, поэтому из  $6N$  уравнений (18) для нас представляют интерес только  $4N$  уравнений относительно  $P, Q, p, q$ . Далее, для определения  $P, Q, p, q$  достаточно решать лишь  $2N$  уравнений

$$\begin{aligned} \dot{P} &= -\partial H / \partial p, \\ \dot{Q} &= -\partial H / \partial q, \end{aligned} \quad (19)$$

поскольку координаты  $p = -i\bar{P}$  и  $q = -i\bar{Q}$  являются простейшими функциями импульсов  $P$  и  $Q$  соответственно.

На практике уравнениям (19) удобно придать несколько иной вид. Согласно основным разложениям (11), исходный гамильтониан (5) зависит от медленных переменных  $P, Q, p, q$  только через посредство

$$\begin{aligned} X &= P\sqrt{2/\Lambda}, & Y &= Q/\sqrt{2\Lambda}, \\ \bar{X} &= ip\sqrt{2/\Lambda}, & \bar{Y} &= iq/\sqrt{2\Lambda}. \end{aligned} \quad (20)$$

Таким образом, можно написать

$$h(P, Q, \Lambda, p, q, \lambda) = h(X, \bar{X}, Y, \bar{Y}, \Lambda, \lambda). \quad (21)$$

В результате для осредненного гамильтониана в (19) справедливо

$$H(P, Q, \Lambda, p, q) = H(\Lambda, X, \bar{X}, Y, \bar{Y}). \quad (22)$$

Мы предполагаем, что в равенствах (21), (22) все аргументы являются  $N$ -мерными векторами.

*Замечание 1.* Равенства (21), (22) следует понимать в физическом, а не математическом смысле: функциональные зависимости в правой и левой части (21) отличаются. Ситуация с (22) та же самая.

*Замечание 2.* При разложении возмущающей функции (10) методом Ласкара и Робютеля (1995) соотношения (20) рассматриваются как определения удобных безразмерных нормировок фазовых переменных  $P, Q, p, q$ . Поэтому при нахождении производных  $\partial H / \partial \bar{X}, \partial H / \partial \bar{Y}$  гамильтониана, определяемого правой частью (22), аргументы  $X_s, \bar{X}_s, Y_s, \bar{Y}_s$  ( $1 \leq s \leq N$ ) следует считать *независимыми* друг от друга переменными (несмотря на то, что, например,  $X_s$  и  $\bar{X}_s$  являются элементарными функциями друг друга).

Из последних двух равенств в (20) с учетом замечания 2 получаем

$$\frac{\partial H}{\partial p} = i\sqrt{\frac{2}{\Lambda}} \frac{\partial H}{\partial \bar{X}}, \quad \frac{\partial H}{\partial q} = \frac{i}{\sqrt{2\Lambda}} \frac{\partial H}{\partial \bar{Y}}. \quad (23)$$

Далее, поскольку (средние) аналоги больших полуосей  $\Lambda$  неподвижны, справедливо

$$\dot{P} = \dot{X}\sqrt{\Lambda/2}, \quad \dot{Q} = \dot{Y}\sqrt{2\Lambda}. \quad (24)$$

Подстановка (23), (24) в (19) дает окончательно

$$\dot{X} = \frac{-2i}{\Lambda} \frac{\partial H}{\partial \bar{X}}, \quad \dot{Y} = \frac{-i}{2\Lambda} \frac{\partial H}{\partial \bar{Y}}.$$

Здесь осредненный гамильтониан определяется правой частью (22), при этом, согласно замечанию 2, производные  $\partial H/\partial \bar{X}$  и  $\partial H/\partial \bar{Y}$  находятся по обычным правилам дифференцирования функций многих переменных.

### 5. ИНТЕГРИРОВАНИЕ СИСТЕМЫ ПЕРВОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

Запишем систему первого приближения

$$\begin{aligned} \dot{X}_s &= \mu \frac{-2i}{\Lambda_s} \frac{\partial H_1}{\partial \bar{X}_s}, \\ \dot{Y}_s &= \mu \frac{-i}{2\Lambda_s} \frac{\partial H_1}{\partial \bar{Y}_s}, \quad 1 \leq s \leq N. \end{aligned} \quad (25)$$

Уравнения (25) задают вековую модель движения планетной системы. В нерезонансном случае эта модель воспроизводит основные динамические характеристики эволюции орбит. При составлении уравнений (25) информация о резонансах стирается, так что если последние присутствуют в системе, решения систем (8) и (25) могут значительно отличаться друг от друга. Информация о резонансах восстанавливается после перехода к оскулирующим элементам по формулам замены переменных, см. формулы (41)–(45) в работе Микрюкова (2018).

Преобразуем правые части (25) к такому виду, к которому уже удобно непосредственно применять машинные алгоритмы интегрирования. Для любых натуральных  $j$  и  $k$  таких, что  $1 \leq j < k \leq N$ , введем обозначения

$$\begin{aligned} u_{jk}^1 &= \partial \langle R_{jk} \rangle / \partial \bar{X}_j, & u_{kj}^2 &= \partial \langle R_{jk} \rangle / \partial \bar{X}_k, \\ u_{jk}^3 &= \partial \langle R_{jk} \rangle / \partial \bar{Y}_j, & u_{kj}^4 &= \partial \langle R_{jk} \rangle / \partial \bar{Y}_k. \end{aligned} \quad (26)$$

Здесь

$$\langle R_{jk} \rangle = \sum_{\mathbb{K}_0} C_{\ell v}^{jk} (XY)_{jk}^{\ell v}, \quad (27)$$

причем  $C_{\ell v}^{jk} = C_{\ell v 00}^{jk}$ , а множество  $\mathbb{K}_0$  получается в результате пересечения  $\mathbb{K}$  с плоскостью  $\{\ell, v \in \mathbb{Z}^4, n \in \mathbb{Z}^2 : |n_1| + |n_2| = 0\}$ . Далее, среднее значение дополнительной части возмущающей функции равно нулю, так что

$$H_1 = \langle h_1 \rangle = \left\langle \sum_2 \mathcal{R}_{jk} + \sum_2 \mathcal{V}_{jk} \right\rangle = \sum_2 \langle \mathcal{R}_{jk} \rangle.$$

Отсюда

$$\frac{\partial H_1}{\partial \bar{X}_s} = \sum_{j=1}^{s-1} \frac{\partial \langle \mathcal{R}_{js} \rangle}{\partial \bar{X}_s} + \sum_{j=s+1}^N \frac{\partial \langle \mathcal{R}_{sj} \rangle}{\partial \bar{X}_s}. \quad (28)$$

Первая и вторая сумма в правой части (28) содержат соответственно  $s-1$  и  $N-s$  слагаемых, так что имеем  $N-1$  слагаемых вида  $\partial \langle \mathcal{R}_{jk} \rangle / \partial \bar{X}_s$ , причем в каждом из этих слагаемых либо  $j=s$ , либо  $k=s$ . Мы считаем, что первая и вторая сумма в правой части (28) равны нулю для случаев соответственно  $s=1$  и  $s=N$ . Аналогично

$$\frac{\partial H_1}{\partial \bar{Y}_s} = \sum_{j=1}^{s-1} \frac{\partial \langle \mathcal{R}_{js} \rangle}{\partial \bar{Y}_s} + \sum_{j=s+1}^N \frac{\partial \langle \mathcal{R}_{sj} \rangle}{\partial \bar{Y}_s}. \quad (29)$$

Комбинируя равенства  $\mathcal{R}_{jk} = \sigma_{jk} R_{jk} \Lambda_k^{-2}$  с соотношениями (25), (26), (28), (29) получаем наконец рабочее представление системы (25):

$$\begin{aligned} \dot{X}_s &= \mu \left( \sum_{j=1}^{s-1} \xi_{sj} u_{sj}^2 + \sum_{j=s+1}^N \xi_{sj} u_{sj}^1 \right), \\ \dot{Y}_s &= \mu \left( \sum_{j=1}^{s-1} \eta_{sj} u_{sj}^4 + \sum_{j=s+1}^N \eta_{sj} u_{sj}^3 \right). \end{aligned} \quad (30)$$

Здесь

$$\xi_{sj} = \begin{cases} \frac{-2i\sigma_{js}}{\Lambda_s^3}, & \text{если } 1 \leq j < s \leq N, \\ \frac{-2i\sigma_{sj}}{\Lambda_s \Lambda_j^2}, & \text{если } 1 \leq s < j \leq N, \end{cases}$$

$\eta_{sj} = \xi_{sj}/4$ . Нетрудно проверить, что  $\xi_{sj}$  и  $\eta_{sj}$  имеют размерность обратного времени, а все остальные величины в правых частях (30) безразмерны.

Каждое слагаемое разложения величины  $H_1$  имеет четную степень по совокупности переменных  $X, \bar{X}, Y, \bar{Y}$ , поэтому согласно (26) правые части (30) расположены лишь по нечетным степеням этих величин (при дифференцировании  $H_1$  степень каждого одночлена по  $X, \bar{X}, Y, \bar{Y}$  понижается на единицу). В нашей работе мы использовали разложение  $H_1$  до десятой степени включительно.

На практике построение уравнений (30) легко выполняется даже в случае нескольких планет в системе. По существу, дело сводится лишь к однотипному формированию отрезков разложений (26) и их подстановке в (30).

Ниже мы рассматриваем результаты численного интегрирования системы (30) на примерах двупланетных и трехпланетных систем. Интегрирование мы выполняли реализованным на языке C++ явным одношаговым семистадийным методом Рунге–Кутты шестого порядка точности. Используемая нами таблица Бутчера для коэффициентов метода приведена в руководстве Хайрера, Нерсетта и Ваннера (1990, глава II.6, таблица 6.1).

**Таблица 1.** Начальные значения средних элементов для модельной двупланетной системы

Планета	$a$ (а.е.)	$e$	$i$	$g$	$\Omega$
Внутренняя планета (“Венера”)	0.723315	0.00676	3.39448°	54.8978°	76.6243°
Внешняя планета (“Земля”)	1.000027	0.01672	0.00262°	287.9199°	175.0383°

**Таблица 2.** Границы изменения средних эксцентриситетов и средних наклонов в модельной двупланетной системе. Интервал интегрирования составляет  $2 \times 10^6$  лет

Планета	$e_{\min}$	$e_{\max}$	$i_{\min}$	$i_{\max}$
Внутренняя планета (“Венера”)	0.00564	0.0188	0.6367°	3.3942°
Внешняя планета (“Земля”)	0.00836	0.01701	0.005°	2.7597°

### 5.1. Модельная двупланетная система

Эффективность методов теории возмущений в планетной задаче обусловлена тем, что в уравнения движения можно простым и удобным образом ввести малый параметр  $\mu$ . В результате во всех планетных теориях получаются уравнения типа (8) и (18), к которым можно применять асимптотическую теорию и делать определенные выводы относительно эволюции планетных орбит. Большинство исследований сосредоточено на орбитальной динамике газовых гигантов — наиболее массивных планет в системе. В таких работах параметр  $\mu$  обычно имеет порядок  $10^{-3}$ – $10^{-2}$ . Например, в работе Кузнецова и Холшевникова (2006) рассматривается эволюция двупланетной системы Солнце–Юпитер–Сатурн<sup>3</sup>, в которой принято  $\mu = 10^{-3}$ .

Интерес к изучению поведения систем, состоящих из планет-гигантов, представляется естественным. Во-первых, количество подтвержденных экзопланет земного типа на порядки меньше числа открытых внесолнечных планет-гигантов. Во-вторых, динамика именно больших планет решает вопрос об устойчивости системы в целом.

Экзопланеты земного типа сложнее обнаружить из-за их относительно небольшого размера и малой массы. Между тем исследование орбитальной динамики этих объектов также заслуживает внимания. Согласно современным представлениям такие планеты являются наиболее благоприятным местом для возникновения жизни. Устойчивость планетной орбиты является здесь одним из

ключевых факторов, поскольку ею обеспечивается длительное поддержание на поверхности планеты более менее постоянных условий.

Изучение движения землеподобных внесолнечных планет разумно начинать на модельных примерах. Мы рассмотрим сейчас динамическую эволюцию модельной двупланетной системы, которая состоит из звезды солнечной массы и двух обращающихся около нее планет с массами и орбитальными элементами Венеры и Земли. Массовые параметры

$$\mu = 3.0404 \times 10^{-6}, \quad (31)$$

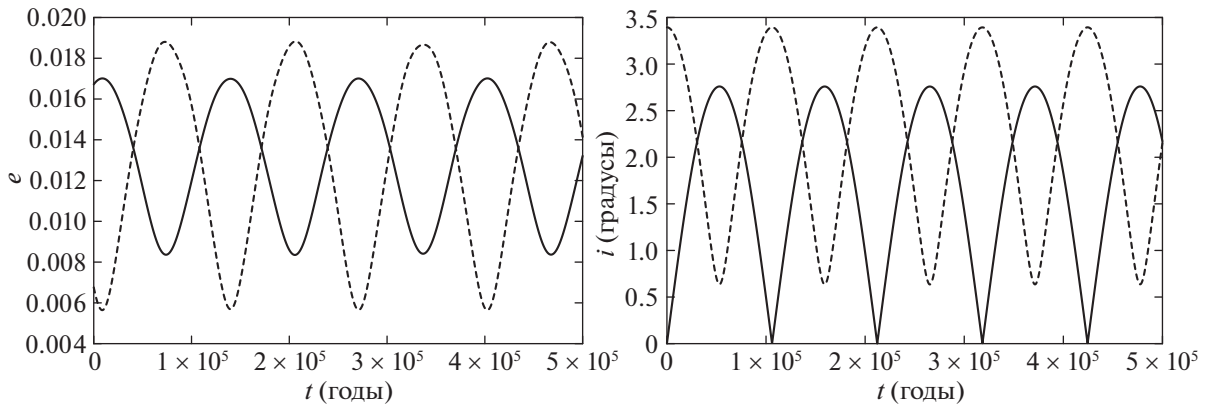
$$m_1 = 0.8051, \quad m_2 = 1$$

и начальные значения оскулирующих элементов (эпоха JD 2459000.5) мы взяли из ежегодника (Кочетова и др., 2019). Начальные значения средних элементов требуют расчета (Волосов, Моргунов, 1971; Микрюков, 2018); мы приводим их в табл. 1.

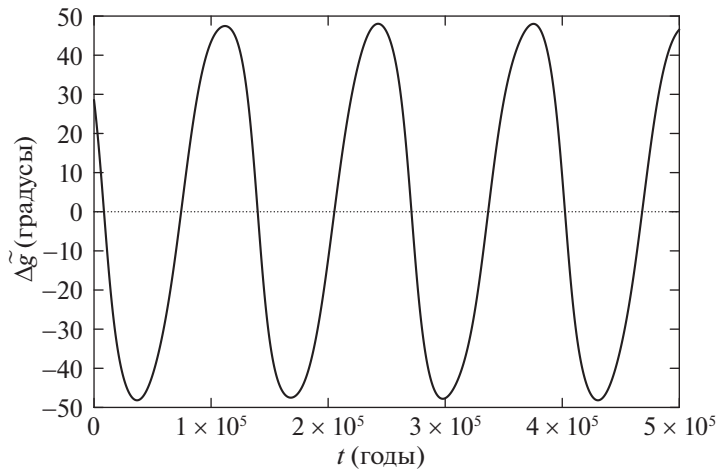
Интегрирование системы (30) выполнялось на  $2 \times 10^6$  лет вперед. На всем временном интервале наблюдается близкое к периодическому поведение (средних) эксцентриситетов и наклонов в системе. На рис. 1 изображена вековая эволюция этих элементов на интервале  $5 \times 10^5$  лет. Мы видим, что колебания совершаются в противофазе, что является классическим следствием сохранения интеграла площадей. Период  $P_e$  колебаний эксцентриситетов составляет примерно  $131 \times 10^3$  лет, а период  $P_i$  колебаний наклонов — около  $106 \times 10^3$  лет. В табл. 2 приведены предельные значения, принимаемые средними наклонами и эксцентриситетами в данной системе.

Одной из важных динамических характеристик планетной системы является вековой резонанс (Мюррей, Дермотт, 2009). Вековой резонанс

<sup>3</sup> Под двупланетной системой “Солнце–Юпитер–Сатурн” Кузнецов и Холшевников (2006) понимают такую модельную двупланетную систему, в которой около звезды солнечной массы обращаются две планеты с массами и орбитальными параметрами Юпитера и Сатурна.



**Рис. 1.** Эволюция средних эксцентриситетов (слева) и наклонений (справа) в модельной двухпланетной системе согласно вековой модели движения (30). Сплошная линия соответствует внешней (более тяжелой) планете.



**Рис. 2.** Иллюстрация векового резонанса в модельной двухпланетной системе. Разность  $\Delta\tilde{g} = \tilde{g}_1 - \tilde{g}_2$  является близкой к периодической функцией времени.

может отсутствовать, однако это довольно распространенное явление. Чаще всего под вековым резонансом понимают такое поведение планет, при котором величина  $\Delta\tilde{g} \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{g}_1 - \tilde{g}_2$  оказывается близкой к периодической функции времени (см., например, Ли, Пил, 2003). Обычно  $\Delta\tilde{g}$  колеблется либо около нуля, либо около  $\pi$ . На основании рис. 2 заключаем, что в отсутствие всех остальных тел в Солнечной системе, движение Венеры и Земли происходит в вековом резонансе. Амплитуда колебаний  $\Delta\tilde{g}$  равна  $48^\circ$ , причем период этих колебаний совпадает с  $P_e$ .

На рис. 3 мы изображаем вековую эволюцию лагранжевых элементов  $e \cos \tilde{g}$  и  $e \sin \tilde{g}$  на интервале времени  $2 \times 10^6$  лет. На обеих плоскостях ( $e_s \cos \tilde{g}_s, e_s \sin \tilde{g}_s$ ),  $s = 1, 2$ , движение изображающей точки оказывается близким к периодическому. Продолжительность одного цикла-периода составляет  $10P_e \approx 1.31 \times 10^6$  лет, после которого качественное поведение обеих

кривых повторяется. На основании рис. 4 заключаем, что эволюция лагранжевых элементов  $\sin \frac{i}{2} \cos \Omega$  и  $\sin \frac{i}{2} \sin \Omega$  имеет также близкий к периодическому характер. Период изменения этих элементов совпадает с  $P_i$ , поскольку на плоскостях  $\left( \sin \frac{i_s}{2} \cos \Omega_s, \sin \frac{i_s}{2} \sin \Omega_s \right)$ ,  $s = 1, 2$ , движение изображающей точки совершает один цикл-оборот (см. рис. 4) за  $P_i \approx 106 \times 10^3$  лет.

### 5.2. Двухпланетные системы HD 12661 и v Andromedae

В разобранный модельном примере малый параметр  $\mu$  имеет порядок  $10^{-6}$ . Рассмотрим теперь примеры реальных планетных систем, в которых  $\mu \sim 10^{-3}$ .

Солнцеподобная звезда HD 12661 имеет спектральный класс G6 и находится в созвездии Овна на расстоянии примерно 120 световых лет от



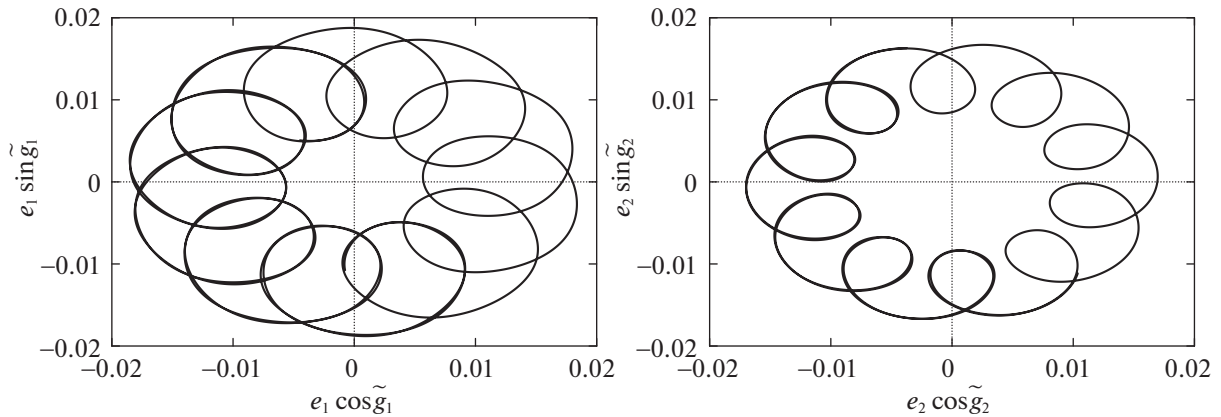


Рис. 3. Эволюция лагранжевых элементов  $e_s \cos \tilde{g}_s$ ,  $e_s \sin \tilde{g}_s$  ( $s = 1, 2$ ) на интервале времени  $2 \times 10^6$  лет. Модельная двупланетная система.

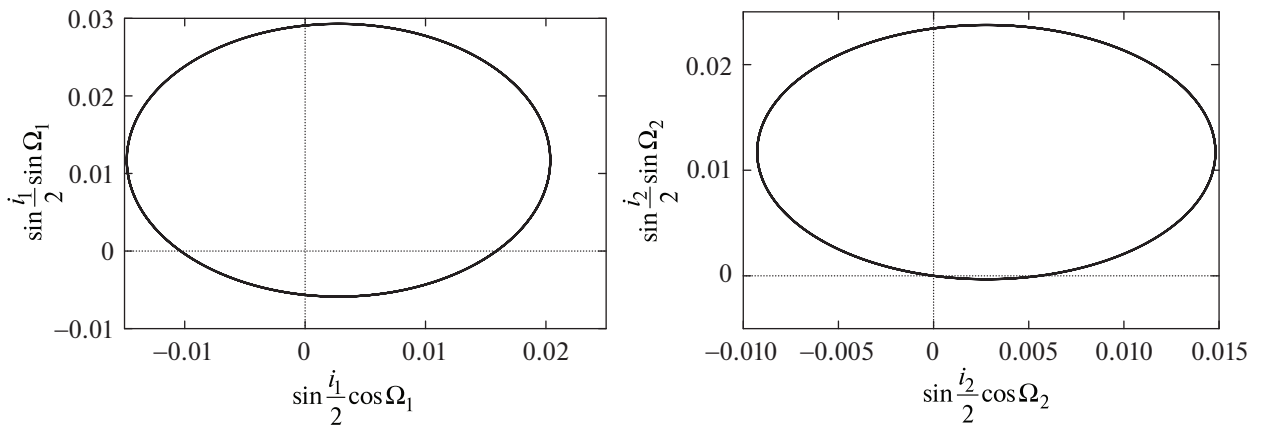


Рис. 4. Эволюция лагранжевых элементов  $\sin \frac{i_s}{2} \cos \Omega_s$ ,  $\sin \frac{i_s}{2} \sin \Omega_s$  ( $s = 1, 2$ ) на интервале  $5 \times 10^5$  лет. Модельная двупланетная система.

Солнца. Вокруг звезды обращаются, по крайней мере, две планеты (газовые гиганты HD 12661 b и HD 12661 c). В отличие от HD 12661, звезду *v Andromedae* можно наблюдать невооруженным глазом, поскольку, имея примерно такие же физические характеристики, она находится ближе к нам почти в три раза. В настоящее время известно о существовании четырех планет в системе *v Andromedae*. Мы ограничимся изучением движения только двух внутренних планет *v And c* и *v And d*, поскольку масса планет *v And b* и *v And e* существенно меньше.

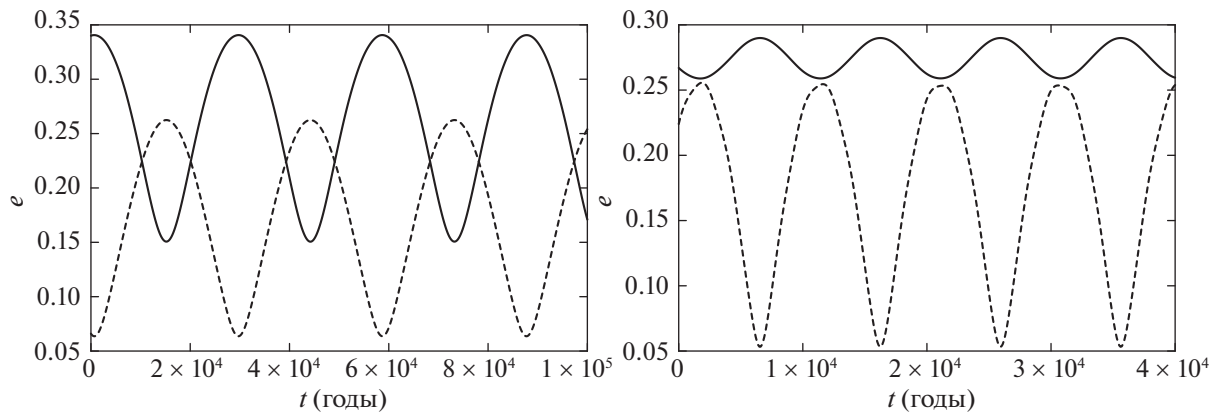
Системы HD 12661 и *v Andromedae* — довольно известные экзопланетные объекты. Система *v Andromedae* была первой системой, в которой была обнаружена третья планета. На примере системы HD 12661 было впервые установлено (Ли, Пил, 2003), что две реальные внесолнечные планеты могут двигаться таким образом, при котором разность долгот перигелиев  $\Delta \tilde{g}$  совершает колебания около значения  $\pi$ .

В табл. 3 и 4 приводятся массовые параметры и начальные значения средних элементов для обеих систем. На основании графиков, представленных на рис. 5, мы делаем вывод, что период колебаний средних эксцентриситетов в системах HD 12661 и *v Andromedae* составляет около 29 000 и 9570 лет соответственно. В табл. 5 приведены максимальные и минимальные значения.

Согласно графикам, изображенным на рис. 6, в обеих системах наблюдается вековой резонанс.

Таблица 3. Значения массовых параметров  $\mu$ ,  $m_0$ ,  $m_1$  и  $m_2$  для двупланетных систем HD 12661 и *v Andromedae*

	$\mu$	$m_0$	$m_1$	$m_2$
HD 12661	$2.079 \times 10^{-3}$	1.07	1	0.7854
<i>v And</i>	$3 \times 10^{-3}$	1.28	0.4875	1



**Рис. 5.** Эволюция средних эксцентриситетов в двухпланетных системах HD 12661 (слева) и *v* Andromedae (справа). Сплошная линия соответствует наиболее массивной планете (см. табл. 3). Результаты интегрирования системы первого приближения.

Амплитуда колебаний  $\Delta\tilde{g}$  в системах HD 12661 и *v* Andromedae равна  $56^\circ$  и  $43^\circ$  соответственно. Для иллюстрации векового резонанса часто (см., например, Родригес, Гальярдо, 2005) используют переменные  $e_s \cos \Delta\tilde{g}$ ,  $e_s \sin \Delta\tilde{g}$  ( $s = 1, 2$ ). Если планетная система испытывает вековой резонанс, то периоды изменения  $e_1$ ,  $e_2$ ,  $\Delta\tilde{g}$  совпадают. В результате на обеих плоскостях

$$(e_s \cos \Delta\tilde{g}, e_s \sin \Delta\tilde{g}), \quad s = 1, 2, \quad (32)$$

изображающая точка описывает близкую к за-

мкнутой кривую. Если  $\Delta\tilde{g}$  колеблется около  $\pi$ , то на плоскостях (32) кривая располагается слева от оси ординат. Если  $\Delta\tilde{g}$  совершает колебания около нуля, то на плоскостях (32) получается фигура, расположенная справа от оси ординат. (Кривая находится целиком по одну сторону от оси ординат тогда и только тогда, когда амплитуда  $\Delta\tilde{g}$  меньше  $90^\circ$ .) На рис. 7 мы изображаем вековую эволюцию систем HD 12661 и *v* Andromedae на плоскостях  $(e_1 \cos \Delta\tilde{g}, e_1 \sin \Delta\tilde{g})$  и  $(e_2 \cos \Delta\tilde{g}, e_2 \sin \Delta\tilde{g})$  соответственно.

**Таблица 4.** Начальные значения средних элементов для систем HD 12661 и *v* Andromedae

Системы	$a$ (a.e.)	$e$	$i$	$g$	$\Omega$
HD 12661 b	0.821	0.34	$0.5^\circ$	$290.6^\circ$	$6^\circ$
HD 12661 c	2.855	0.066	$1.5^\circ$	$94.1^\circ$	$8^\circ$
<i>v</i> And c	0.832	0.224	$2^\circ$	$229.4^\circ$	$3^\circ$
<i>v</i> And d	2.53	0.267	$5^\circ$	$123.5^\circ$	$135^\circ$

**Таблица 5.** Границы изменения средних эксцентриситетов в системах HD 12661 и *v* Andromedae. Интервал интегрирования для систем HD 12661 и *v* Andromedae составляет соответственно  $10^5$  и  $4 \times 10^4$  лет

Системы	$e_{\min}$	$e_{\max}$
HD 12661 b	0.1506	0.3405
HD 12661 c	0.0636	0.2624
<i>v</i> And c	0.053	0.256
<i>v</i> And d	0.259	0.29

### 5.3. Модельная трехпланетная система

Добавление третьей планеты в систему может значительно изменить характер движения первых двух планет. В подразделе 5.1 мы исследовали вековую эволюцию модельной двухпланетной системы, которая определяет движение Венеры и Земли вокруг Солнца в предположении отсутствия возмущений со стороны всех остальных тел Солнечной системы. Рассмотрим теперь поведение этой системы с учетом влияния Марса. Именно, образуем такую модельную трехпланетную систему, в которой около звезды солнечной массы обращаются три планеты с массами и орбитальными параметрами, соответствующими Венере, Земле и Марсу. Планеты в данной системе будем далее называть “Венерой” (внутренняя планета, соответствует Венере), “Землей” (промежуточная планета, соответствует Земле) и “Марсом” (внешняя планета, соответствует Марсу). Использование кавычек мы хотим подчеркнуть, что рассматриваем поведение Венеры, Земли и Марса в предположении отсутствия всех остальных тел в Солнечной системе.

В табл. 1 и 6 мы приводим начальные значения средних элементов для всех трех планет. Наряду с (31) примем  $m_3 = 0.1061$ .

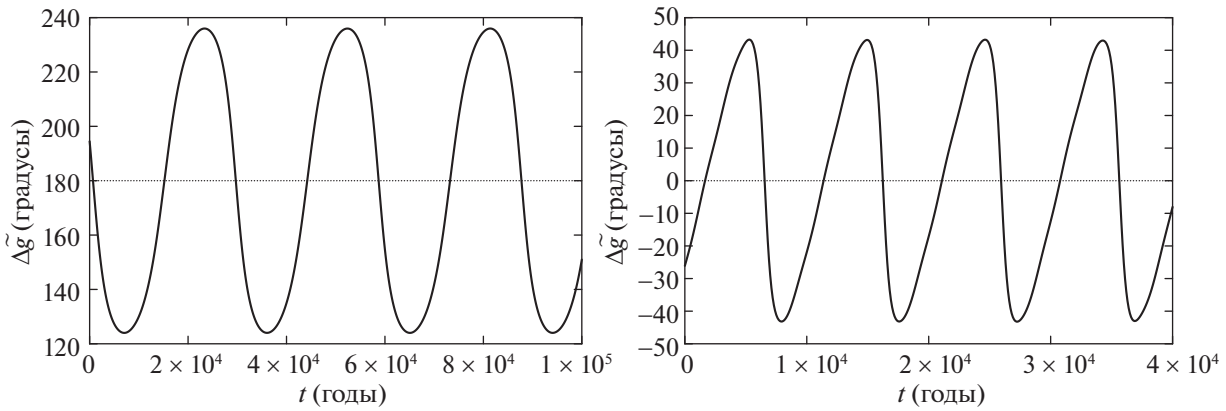


Рис. 6. Вековой резонанс в системах HD 12661 (слева) и  $\nu$  Andromedae (справа).

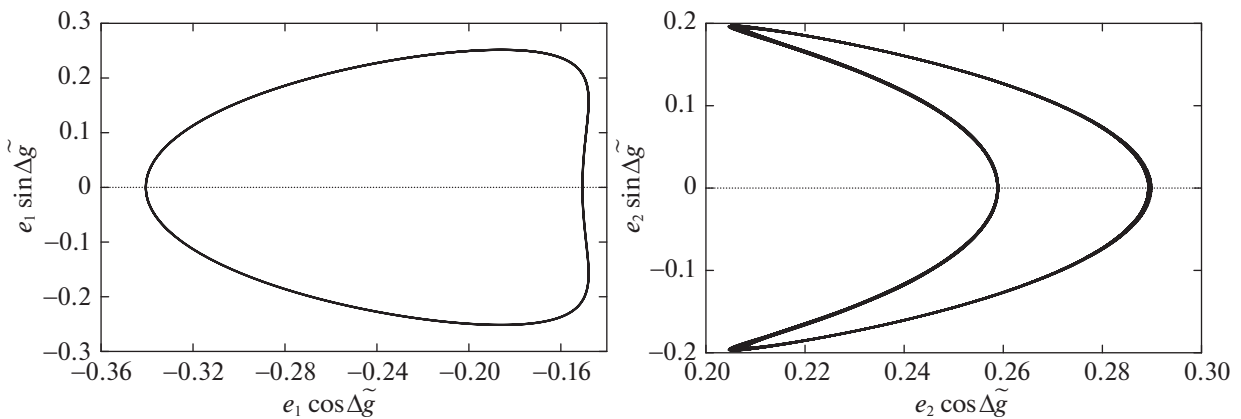


Рис. 7. Вековое поведение систем HD 12661 (слева) и  $\nu$  Andromedae (справа) на плоскостях  $(e_1 \cos \Delta\tilde{g}, e_1 \sin \Delta\tilde{g})$  и  $(e_2 \cos \Delta\tilde{g}, e_2 \sin \Delta\tilde{g})$  соответственно. См. подробности в тексте.

Интегрирование выполнялось на  $3 \times 10^6$  лет вперед. На основании рис. 8 заключаем, что влияние более легкого “Марса” существенно изменяет поведение эксцентриситетов “Венеры” и “Земли” (ср. с рис. 1). Эволюция эксцентриситетов  $e_1, e_2, e_3$  в системе имеет сложный характер, однако “Марс” сохраняет самую вытянутую орбиту в течение всего интервала интегрирования. Эксцентриситет  $e_3$  изменяется в пределах 0.082–0.104.

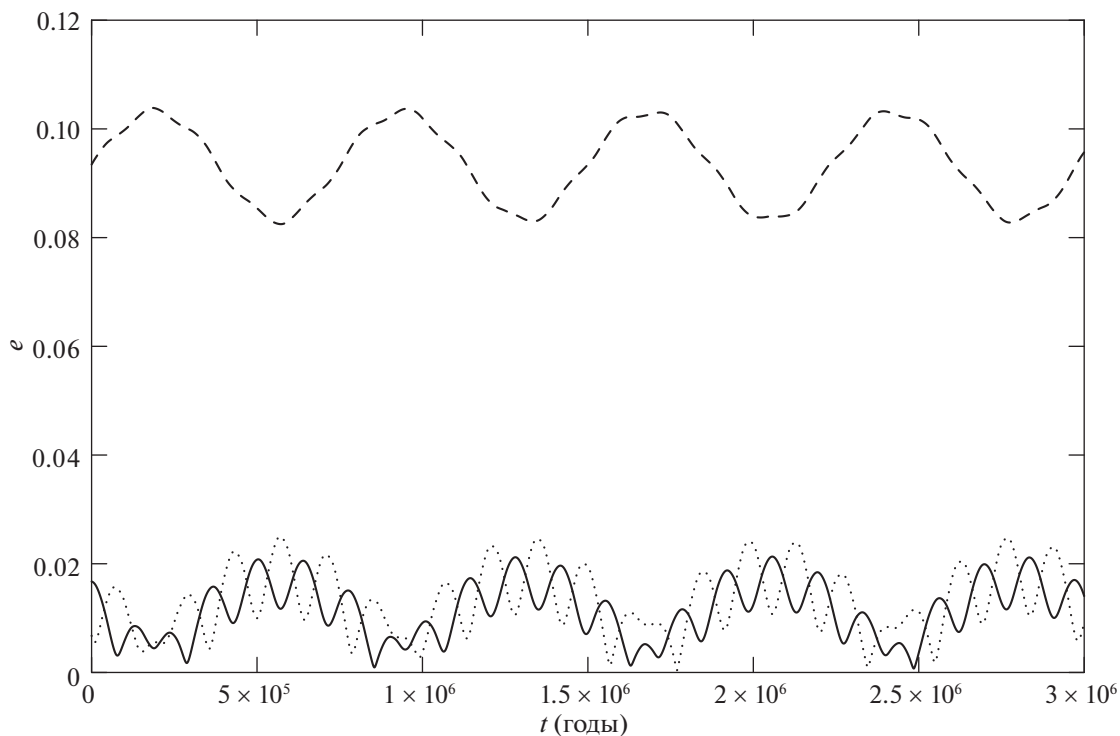
Рассмотрим теперь случай, когда орбита “Марса” располагается ближе к орбите “Земли”. Исследуем вариант  $\alpha_{12} = \alpha_{23}$ . Для этого в табл. 1 и 6 сохраним все значения прежними, кроме одного: положим  $a_3 = 1.382$ . Поведение эксцентри-

ситетов приобретает еще более сложный характер (см. рис. 9). В разобранный выше варианте (при  $a_3 = 1.5238$ ) прослеживается систематичность в изменении всех эксцентриситетов, причем период этой систематичности, согласно графику на рис. 8, можно оценить примерно в  $735 \times 10^3$  лет. Теперь же (см. рис. 9) эксцентриситеты “Венеры” и “Земли” изменяются практически непредсказуемо. На всем интервале интегрирования продолжает сохраняться верным неравенство  $e_3 \gg e_1, e_2$ . Заметим, что для изучения вековой эволюции планетных систем с близкими орбитами более эффективными могут оказаться специальные методы разложения возмущающей функции (см. работу Вашковьяк и др., 2015).

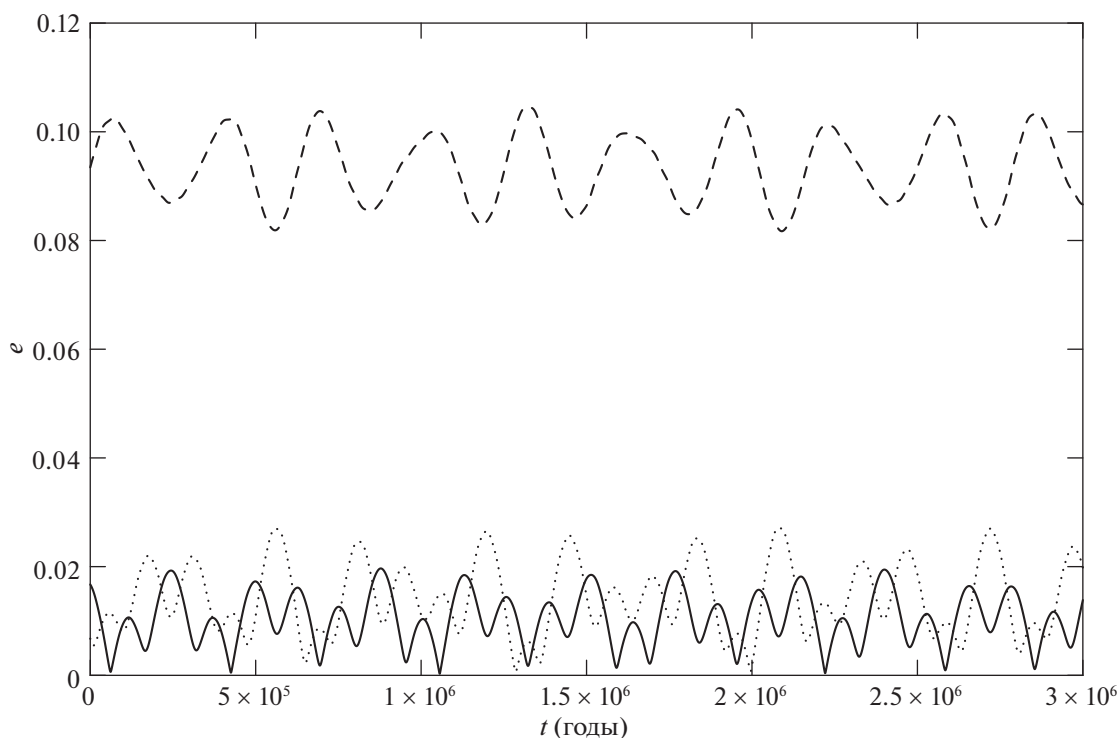
Рассмотрим, наконец, случай, когда  $a_3$  больше значения  $a_3 = 1.5238$ . (Значение  $a_3 = 1.5238$  близко к текущему оскулирующему значению большой полуоси Марса, см. табл. 6.) Положим  $a_3 = 1.84$ , а все остальные числовые значения в табл. 1 и 6 вновь оставим прежними. При  $a_3 = 1.84$  получаем  $\alpha_{23} \approx 0.5434$ , что примерно соответствует отношению больших полуосей Юпитера и Сатурна. Дан-

Таблица 6. Начальные значения средних элементов третьей планеты (“Марса”) в модельной трехпланетной системе

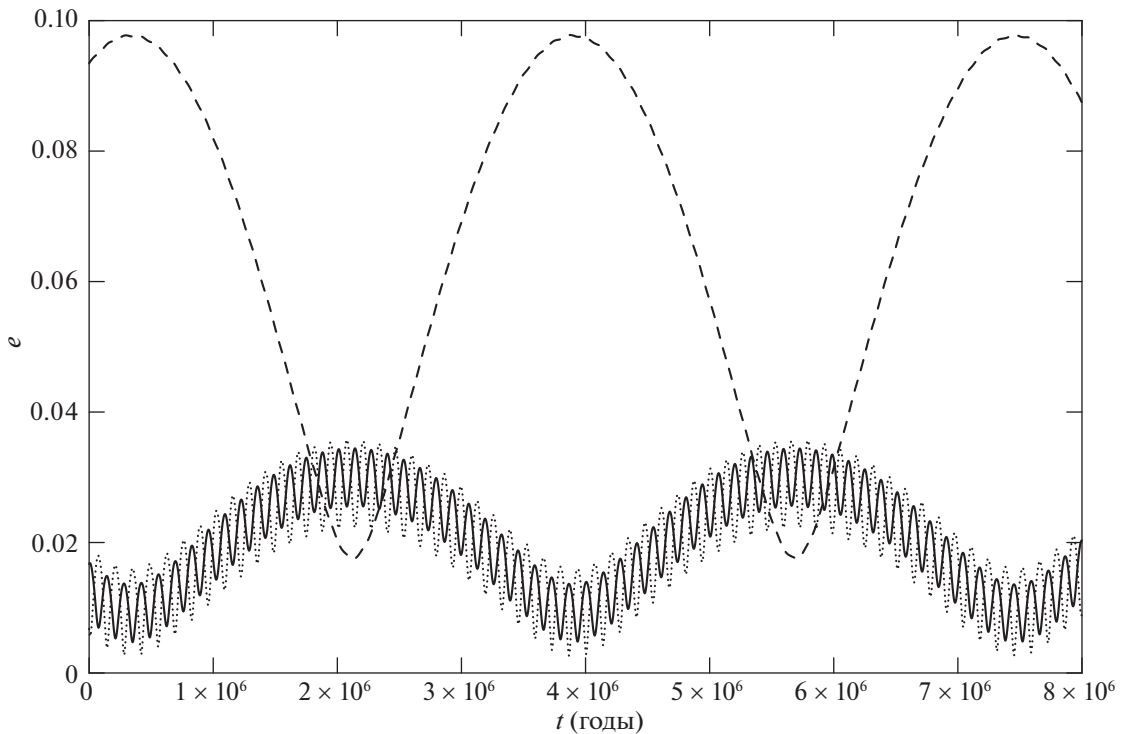
$a$ (а.е.)	$e$	$i$	$g$	$\Omega$
1.5238	0.09345	1.8479°	286.59°	49.5°



**Рис. 8.** Вековая модель изменения средних эксцентриситетов в модельной трехпланетной системе. Точечная линия соответствует “Венере”, сплошная — “Земле”, а пунктирная — “Марсу”. Средние значения больших полуосей  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$  близки к текущим оскулирующим значениям Венеры, Земли и Марса.



**Рис. 9.** Эволюция средних эксцентриситетов в модифицированной модельной трехпланетной системе. Точечная линия соответствует “Венере”, сплошная — “Земле”, а пунктирная — “Марсу”. Для среднего значения большой полуоси орбиты “Марса” положено  $a_3 = 1.382$  а.е.



**Рис. 10.** Эволюция средних эксцентриситетов в модифицированной модельной трехпланетной системе. Точечная линия соответствует “Венере”, сплошная — “Земле”, а пунктирная — “Марсу”. Для среднего значения большой полуоси орбиты “Марса” положено  $a_3 = 1.84$  а.е.

ный вариант интегрировался вперед на  $8 \times 10^6$  лет, см. рис. 10. На этот раз все эксцентриситеты ведут себя более понятным образом. Изменение  $e_1$ ,  $e_2$ ,  $e_3$  становится близким к периодическому. Согласно рис. 10 период изменения  $e_1$ ,  $e_2$ ,  $e_3$  равен примерно  $3.57 \times 10^6$  лет. Интересно, что теперь наблюдаются промежутки времени, в течение которых  $e_1, e_2 > e_3$ . По сравнению с двумя предыдущими модельными вариантами, эксцентриситет “Марса” изменяется в более широких пределах 0.017–0.098. Эксцентриситеты “Венеры” и “Земли” могут превышать значение 0.034.

## 6. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Чем меньше значение параметра  $\mu$  в основных уравнениях (18), тем выше эффективность асимптотической теории. Напишем систему второго приближения

$$\begin{aligned} \dot{X} &= \frac{-2i}{\Lambda} \left( \mu \frac{\partial H_1}{\partial \bar{X}} + \mu^2 \frac{\partial H_2}{\partial \bar{X}} \right), \\ \dot{Y} &= \frac{-i}{2\Lambda} \left( \mu \frac{\partial H_1}{\partial \bar{Y}} + \mu^2 \frac{\partial H_2}{\partial \bar{Y}} \right). \end{aligned} \quad (33)$$

Пусть, например, при изучении взаимодействия экзопланет земного типа мы имеем  $\mu \sim 10^{-6}$ . В результате  $\mu^2 \sim 10^{-12}$  и мы заключаем, что коэффициенты разложения  $H_2$  должны быть достаточно

большими, чтобы в уравнениях (33) производные  $\partial H_2 / \partial \bar{X}$  и  $\partial H_2 / \partial \bar{Y}$  давали заметный вклад в эволюцию  $X$  и  $Y$ . Если большие полуоси в системе далеки от резонансных значений, то при столь малом  $\mu$  результаты интегрирования систем первого и второго приближения будут слабо отличаться друг от друга.

В настоящей работе мы рассматривали эволюцию нерезонансных модельных и реальных планетных конфигураций на временных шкалах порядка  $10^5$ – $10^7$  лет. Как правило, в каждом случае для интегрирования мы выбирали такой промежуток времени, на котором может быть выявлено качественное поведение основных орбитальных характеристик исследуемой системы (период колебаний эксцентриситетов, наклонов, разности  $\Delta \tilde{g}$ , вековые резонансы и т.п.). Стоит отметить, что в нерезонансных системах согласно общей теории метода осреднения (Боголюбов, Митропольский, 1974; Волосов, Моргунов, 1971; Митропольский, 1971) длина временного интервала, на котором осредненное решение сохраняет главные черты истинного решения, существенно зависит от малого параметра  $\mu$ . Чем меньше значение  $\mu$ , тем длиннее должен быть этот интервал.

Значения  $\mu \sim 10^{-6}$  и  $\mu \sim 10^{-3}$  примерно соответствуют планетам земного типа со скалистой

**Таблица 7.** Число  $\mathcal{N}$  слагаемых в разложении  $\langle R_{jk} \rangle$  в зависимости от  $d$ . На практике всегда берется  $d > 0$ 

$d$	0	2	4	6	8	10	12	14	16
$\mathcal{N}$	1	9	61	261	878	2446	5982	13182	26807

**Таблица 8.** Число  $\mathcal{N}'$  слагаемых в разложении каждой из четырех величин  $u_{jk}^1, u_{kj}^2, u_{jk}^3, u_{kj}^4$  в зависимости от  $d' = d - 1$ 

$d'$	1	3	5	7	9	11	13	15
$\mathcal{N}'$	2	22	122	472	1452	3804	8844	18744

поверхностью и газовым гигантам. Не стоит забывать о существовании планет с промежуточными физическими характеристиками. Например, масса планеты Kepler-11 f (система Kepler-11) по текущим оценкам превышает земную лишь в два раза, хотя по плотности Kepler-11 f сопоставима с Сатурном. Обратим также внимание на то, что в нашем исследовании мы были сосредоточены в основном на поведении эксцентриситетов и движении перицентров в планетной системе.

В подразделах 5.1 и 5.3 мы изучали динамическую эволюцию систем, образованных *только* планетами земного типа. В подразделе 5.2 исследовалась эволюция конфигураций, состоящих *только* из планет-гигантов. На основании результатов подразделов 5.1 и 5.3 можно сделать вывод, что если система образована *только* планетами земного типа, то в течение длительного интервала времени она может сохранять устойчивость. Для устойчивости такой системы большие планеты могут оказаться не нужными.

Более близким к реальному будет случай, когда в систему входят планеты обоих типов. Лучше всего в этом убеждает пример нашей Солнечной системы, которая содержит одинаковое количество планет земного типа и газовых гигантов. Пример Солнечной системы показывает, что формирование землеподобных экзопланет около звезд должно быть не менее распространенным явлением, чем образование больших планет. Движение систем, образованных планетами с существенно разными массами, является предметом отдельного и особого исследования. Например, Ласкаром (1994) было выполнено интегрирование осредненных уравнений для модели Солнечной системы, состоящей из Солнца и восьми основных планет. Интегрирование выполнялось на несколько миллиардов лет вперед и назад. В результате этого исследования был сделан вывод, что устойчивость планет земной

группы Солнечной системы может существенно зависеть от устойчивости движения планет-гигантов.

Таким образом, устойчивости движения планет земной группы благоприятствует или устойчивость системы планет-гигантов, или их отсутствие.

В заключение отметим, что употребление комплексных переменных (6) приводит к относительно небольшому количеству слагаемых в разложении  $H_1$  (см. работы Ласкар, Робютель, 1995; Микрюков, Холшевников, 2016). На практике бесконечный восьмикратный степенной ряд (27) усекается условием

$$\ell_1 + \ell_2 + \ell_3 + \ell_4 + v_1 + v_2 + v_3 + v_4 \leq d,$$

где  $d$  — четное натуральное. В результате максимальная степень  $d'$  разложений величин (26) оказывается равной  $d' = d - 1$ . В табл. 7 мы приводим число  $\mathcal{N}$  слагаемых в разложении (27) в зависимости от  $d$ , а в табл. 8 — число  $\mathcal{N}'$  слагаемых в каждом из четырех разложений (26) в зависимости от  $d'$ . В случае, например,  $N = 2$  и  $d = 4$  система (30) принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{X}_1 &= \mu \xi_{12} u_{12}^1, & \dot{Y}_1 &= \mu \eta_{12} u_{12}^3, \\ \dot{X}_2 &= \mu \xi_{21} u_{21}^2, & \dot{Y}_2 &= \mu \eta_{21} u_{21}^4, \end{aligned} \quad (34)$$

при этом  $H_1$  содержит 61 слагаемое (ср. с разложением  $\langle R_{12} \rangle$ , приведенным на стр. 215 работы Ласкара и Робютеля, 1995) и генерирует в правой части каждого из уравнений (34) по 22 слагаемых.

Автор выражает благодарность К.В. Холшевникову за руководство работой, В.Ш. Шайдулину за помощь в оформлении рисунков, а также рецензенту за полезные замечания, способствовавшие улучшению работы. Все вычисления в работе производились с помощью оборудования вычислительного центра научного парка СПбГУ. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (грант 19-72-10023).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Балуев (R.V. Baluev), *Celest. Mech. Dynam. Astron.* **111**, 235 (2011).
2. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А., *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний* (М.: Наука, 1974).
3. Вашковьяк М.А., Вашковьяк С.Н., Емельянов Н.В., *Астрон. вестник* **49**, 208 (2015) [M.A. Vashkov'yak et al., *Solar System. Res.* **49**, 191 (2015)].
4. Волосов В.М., Моргунов Б.И., *Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем* (М.: МГУ, 1971).

5. Гребеников Е.А., *Качественная небесная механика* (М.: Наука, сб. *Справочное руководство по небесной механике и астродинамике*, под ред. Г.Н. Дубошина, 1976), с. 788.
6. Гребеников Е.А., *Метод усреднения в прикладных задачах* (М.: Наука, 1986).
7. Демидович Б.П., *Лекции по математической теории устойчивости* (М.: Наука, 1967).
8. Джакаля Г.Е.О., *Методы теории возмущений для нелинейных систем* (М.: Наука, 1979).
9. Кордани (В. Cordani), *Celest. Mech. Dynam. Astron.* **89**, 165 (2004).
10. Кочетова О.М., Кузнецов В.Б., Медведев Ю.Д., Чернетенко Ю.А., Шор В.А., *Эфемериды малых планет на 2020 год* (СПб.: ИПА РАН, 2019).
11. Красинский Г.А., *Основные уравнения планетной теории* (М.: Наука, сб. *Малые Планеты*, под ред. Н.С. Самойловой-Яхонтовой, 1973), с. 81.
12. Кузнецов Э.Д., Холшевников К.В., *Астрон. вестник* **40**, 263 (2006) [E.D. Kuznetsov, K.V. Kholshchevnikov, *Solar System. Res.* **40**, 239 (2006)].
13. Кузнецов Э.Д., Холшевников К.В., *Астрон. вестник* **43**, 230 (2009) [E.D. Kuznetsov, K.V. Kholshchevnikov, *Solar System. Res.* **43**, 220 (2009)].
14. Ласкар (J. Laskar), *Astron. Astrophys.*, 287, L9-L12 (1994).
15. Ласкар, Робютель (J. Laskar and P. Robutel), *Celest. Mech. Dynam. Astron.* **62**, 193 (1995).
16. Ли, Пил (M.H. Lee and S.J. Peale), *Astrophys. J.* **592**, 1201 (2003).
17. Либер, Дилсейт (A.-S. Libert and N. Delsate), *MNRAS* **422**, 2725 (2012).
18. Либер, Сансотера (A.-S. Libert and M. Sansottera), *Celest. Mech. Dynam. Astron.* **117**, 149 (2013).
19. Маркеев А.П., *Точки либрации в небесной механике и космодинамике* (М.: Наука, 1978).
20. Микрюков Д.В., *Письма в Астрон. журн.* **42**, 611 (2016) [D.V. Mikryukov, *Astron. Lett.* **42**, 555 (2016)].
21. Микрюков Д.В., *Письма в Астрон. журн.* **44**, 361 (2018) [D.V. Mikryukov, *Astron. Lett.* **44**, 337 (2018)].
22. Микрюков Д.В., Холшевников К.В., *Письма в Астрон. журн.* **42**, 302 (2016) [D.V. Mikryukov, K.V. Kholshchevnikov, *Astron. Lett.* **42**, 268 (2016)].
23. Митропольский Ю.А., *Метод усреднения в нелинейной механике* (К.: Наукова думка, 1971).
24. Монсеев Н.Н., *Асимптотические методы нелинейной механики* (М.: Наука, 1969).
25. Морбиделли А., *Современная небесная механика. Аспекты динамики Солнечной системы* (М.: ИКИ, 2014).
26. Мюррей К., Дермотт С., *Динамика Солнечной системы* (М.: Физматлит, 2009).
27. Найфэ А.Х., *Методы возмущений* (М.: Мир, 1976).
28. Перминов А.С., Кузнецов Э.Д., *Астрон. вестник* **49**, 469 (2015) [A.S. Perminov, E.D. Kuznetsov, *Solar System. Res.* **49**, 430 (2015)].
29. Пуанкаре А., *Лекции по небесной механике* (М.: Наука, 1965).
30. Робютель, Нидерман, Пусс (P. Robutel, L. Niederman, and A. Pousse), *Comp. Appl. Math.* **35**, 675 (2016).
31. Родригес, Гальярдо (A. Rodríguez and T. Gallardo), *Astrophys. J.* **628**, 1006 (2005).
32. Сансотера, Либер (M. Sansottera and A.-S. Libert), *Celest. Mech. Dynam. Astron.* **131**, 38 (2019).
33. Уинтнер А., *Аналитические основы небесной механики* (М.: Наука, 1967).
34. Хайпер Э., Нерсетт С., Ваннер Г., *Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи* (М.: Мир, 1990).
35. Холшевников К.В., *Асимптотические методы небесной механики* (Л.: ЛГУ, 1985).
36. Холшевников К.В., Греб А.В., Кузнецов Э.Д., *Астрон. вестник* **35**, 267 (2001) [K.V. Kholshchevnikov et al., *Solar System. Res.* **35**, 243 (2001)].
37. Холшевников К.В., Греб А.В., Кузнецов Э.Д., *Астрон. вестник* **36**, 75 (2002) [K.V. Kholshchevnikov et al., *Solar System. Res.* **36**, 68 (2002)].
38. Холшевников, Кузнецов (K.V. Kholshchevnikov and E. D. Kuznetsov), *Celest. Mech. Dynam. Astron.* **109**, 201 (2011).
39. Чазов В.В., *Астрон. вестник* **47**, 112 (2013) [V.V. Chazov, *Solar System. Res.* **47**, 99 (2013)].
40. Шевченко И.И., *The Lidov-Kozai Effect — Applications in Exoplanet Research and Dynamical Astronomy* (Springer, 2017).