

## ПОИСК ЭВОЛЮЦИОННЫХ ИЗМЕНЕНИЙ ПЕРИОДОВ ЦЕФЕИД CEa Cas И CEb Cas

© 2021 г. Л. Н. Бердников<sup>1\*</sup>, А. А. Белинский<sup>1</sup>, Е. Н. Пастухова<sup>2</sup>,  
М. А. Бурлак<sup>1</sup>, Н. П. Иконникова<sup>1</sup>, Е. О. Мишин<sup>1</sup>, Н. И. Шатский<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Государственный астрономический институт им. П.К. Штернберга Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

<sup>2</sup>Институт астрономии РАН, Москва, Россия

Поступила в редакцию 11.11.2020 г.

После доработки 18.11.2020 г.; принята к публикации 26.11.2020 г.

Для двух классических цефеид, членов рассеянного скопления NGC 7790, CEa Cas и CEb Cas построены  $O - C$  диаграммы, охватывающие временной интервал 125 лет. Диаграммы  $O - C$  имеют вид парабол, что позволило впервые определить квадратичные элементы изменения блеска и вычислить скорости эволюционных изменений их периодов:  $dP/dt = -0.038 (\pm 0.017)$  с/год для CEa Cas и  $dP/dt = +0.099 (\pm 0.010)$  с/год для CEb Cas, что согласуется с результатами теоретических расчетов для второго и третьего пересечений полосы неустойчивости соответственно. Тест на стабильность пульсаций, предложенный Ломбардом и Коэном, подтвердил реальность изменений периодов.

*Ключевые слова:* цефеиды, изменяемость периодов, эволюция звезд.

DOI: 10.31857/S0320010821010022

### ВВЕДЕНИЕ

Переменность CE Cas открыл Белявский (1931), отметивший, что звезда располагается в северной части рассеянного звездного скопления NGC 7790. Многочисленные попытки определения элементов и типа переменности не приводили к успеху до тех пор, пока Старикова (1949) по своим визуальным наблюдениям не показала, что CE Cas представляет собой визуально-двойную систему с расстоянием между компонентами 2.3 угл. сек, при этом оба компонента оказались классическими цефеидами.

Так как эти цефеиды являются членами NGC 7790, то их можно использовать для калибровки зависимости период–светимость цефеид, для чего последовал ряд попыток (Ефремов, Холопов, 1965; Смак, 1966; Сэндидж, Тамманн, 1969; Франц, 1972; Опал и др., 1988; AAVSO) построить кривые блеска компонентов CE Cas, используя метод апертурной фотометрии. Однако этот метод не позволяет исключить влияние другого компонента, поэтому полученные кривые блеска были отягощены заметными случайными и систематическими ошибками.

Для того чтобы минимизировать эти ошибки, следует получить PSF (Point-Spread-Function) фотометрию компонентов CE Cas, что позволит построить их надежные кривые блеска, которые можно использовать как для калибровки светимостей, так и для изучения изменяемости периодов цефеид CEa Cas и CEb Cas. Это и является задачей данной работы.

### КРИВЫЕ ИЗМЕНЕНИЯ БЛЕСКА ЦЕФЕИД CEa Cas и CEb Cas

Недавно мы (Бердников и др., 2020б) опубликовали результаты PSF-фотометрии в фильтрах  $BVg'r'$  компонентов CE Cas, полученные на 60-см телескопе Кавказской Горной Обсерватории ГАИШ МГУ (Бердников и др., 2020в). В качестве примера на рис. 1 показаны кривые изменения блеска CEa Cas и CEb Cas в фильтрах  $B$  и  $V$ , а для сравнения приведены кривые блеска цефеиды CF Cas, тоже члена NGC 7790. Как это видно из рис. 1, ошибки фотометрии близки к  $0.01$  для всех кривых, т.е. раздельная PSF-фотометрия компонентов CE Cas является надежной.

В табл. 1 приведены параметры кривых блеска CEa Cas и CEb Cas в фильтрах  $BVg'r'$ : блеск в

\*Электронный адрес: lberdnikov@yandex.ru

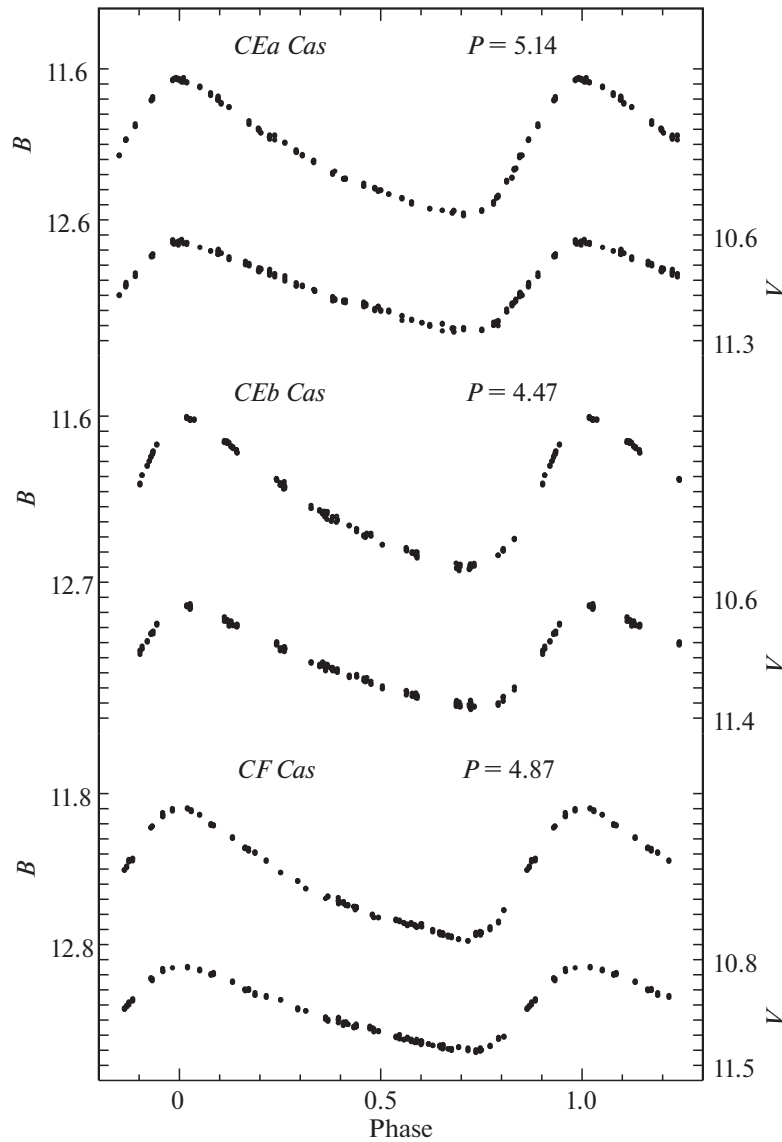


Рис. 1. Кривые изменения блеска трех цефеид в рассеянном звездном скоплении NGC 7790.

максимуме, амплитуда, средний блеск и средний блеск по интенсивности.

В табл. 2 вместе с периодом изменения блеска  $P$  и средним блеском по интенсивности  $\langle V \rangle$  включены избыток цвета  $E_{B-V}$  (Рипепи и др., 2019), модуль расстояния NGC 7790  $(m - M)_0$ , полученный в работе Шанкс и др. (2019) по параллаксу *Gaia* DR2 (Браун и др., 2018) с поправкой +0.029 мсек, и абсолютная звездная величина  $M_V$  для цефеид CEa Cas и CEb Cas. Для перевода избытка цвета  $E_{B-V}$  в полное поглощение  $A_V$  использовался множитель  $R = 3.26$  (Бердников и др., 1996).

Коэффициенты Фурье (разложение по косинусам) кривых блеска компонентов CE Cas приведены в табл. 3.

### ИЗМЕНЯЕМОСТЬ ПЕРИОДОВ КОМПОНЕНТОВ CE Cas

Для изучения изменчивости периодов цефеид мы применяем общепринятую методiku анализа  $O - C$  диаграмм, а самым точным методом определения остаточные уклонения  $O - C$  является метод Герцшпрунга (1919), машинная реализация которого описана в работе Бердникова (1992ж). Для подтверждения реальности обнаруженных изменений периода мы используем метод, описанный Ломбардом и Коэном (1993).

Попытки исследования периодов компонентов CE Cas предпринимались в работах Зонна (1960), Пейн-Гапошкиной и Гапошкина (1963) и Бердникова (1990). При этом большую часть  $O - C$  диа-

**Таблица 1.** Параметры кривых блеска CEa Cas и CEb Cas в фильтрах  $BVg'r'$

Звезда	Фильтр	Блеск max	Амплитуда	Средний блеск	Средний блеск по интенсивности
CEa Cas	$B$	11 <sup>m</sup> 664	0 <sup>m</sup> 895	12 <sup>m</sup> 111	12 <sup>m</sup> 136
CEa Cas	$g'$	11 <sup>m</sup> 109	0 <sup>m</sup> 737	11 <sup>m</sup> 477	11 <sup>m</sup> 486
CEa Cas	$V$	10 <sup>m</sup> 644	0 <sup>m</sup> 590	10 <sup>m</sup> 939	10 <sup>m</sup> 947
CEa Cas	$r'$	10 <sup>m</sup> 231	0 <sup>m</sup> 471	10 <sup>m</sup> 466	10 <sup>m</sup> 459
CEb Cas	$B$	11 <sup>m</sup> 599	0 <sup>m</sup> 998	12 <sup>m</sup> 098	12 <sup>m</sup> 135
CEb Cas	$g'$	11 <sup>m</sup> 127	0 <sup>m</sup> 779	11 <sup>m</sup> 516	11 <sup>m</sup> 530
CEb Cas	$V$	10 <sup>m</sup> 663	0 <sup>m</sup> 658	10 <sup>m</sup> 992	11 <sup>m</sup> 012
CEb Cas	$r'$	10 <sup>m</sup> 289	0 <sup>m</sup> 512	10 <sup>m</sup> 545	10 <sup>m</sup> 554

**Таблица 2.** Период  $P$ , средний блеск по интенсивности  $\langle V \rangle$ , избыток цвета  $E_{B-V}$  (Рипепи, 2019), модуль расстояния NGC 7790  $(m - M)_0$  (Шанкс, 2018) и абсолютные звездные величины  $M_V$  для цефеид CEa Cas и CEb Cas

Звезда	$P$	$\langle V \rangle$	$E_{B-V}$	$(m - M)_0$	$M_V$
CEa Cas	5 <sup>d</sup> 1409	10 <sup>m</sup> 947	0 <sup>m</sup> 562 ± 0 <sup>m</sup> 028	12 <sup>m</sup> 50 ± 0 <sup>m</sup> 22	-3 <sup>m</sup> 38
CEb Cas	4 <sup>d</sup> 4793	11 <sup>m</sup> 012	0 <sup>m</sup> 548 ± 0 <sup>m</sup> 027	12 <sup>m</sup> 50 ± 0 <sup>m</sup> 22	-3 <sup>m</sup> 27

грамм занимали низкоточные данные, полученные по старым фотопластинкам, поэтому эволюционные изменения периодов обнаружены не были.

Для нового изучения периодов CE Cas мы провели раздельную PSF-фотометрию ее компонентов (Бердников и др., 2020б), что позволило нам получить надежные стандартные кривые для использования их в методе Герцшпрунга (1919) при обработке опубликованной раздельной фотометрии (Холопов, Ефремов, 1983; Смак, 1966; Сэндидж, Тамманн, 1969; Опал и др., 1988; Бердников и др., 2020б; AAVSO), а также для разложения опубликованных визуальных, фотографических, фотоэлектрических и ПЗС-наблюдений суммарного блеска CE Cas на два колебания.

Кроме того, мы сделали глазомерные оценки блеска на старых фотографических пластинках университета Гарварда (США) и ГАИШ, а также использовали фотометрические данные из каталогов INTEGRAL-ОМС (Альфонсо-Гарсон и др., 2012) и ASAS-SN (Ясингхе и др., 2019).

Сведения о количестве использованных наблюдений приведены в табл. 4. Самая старая пластинка

с изображением CE Cas была получена в 1895 г., а последние ПЗС наблюдения были сделаны в 2020 г. Следовательно, наши данные охватывают временной интервал 125 лет.

Для разложения суммарного блеска CE Cas на два колебания мы применяем ту же методику, что и в статье Бердникова (1990), т.е. все наблюдения переводятся в интенсивности, и для каждого  $i$ -го наблюдения составляются условные уравнения вида

$$I_i = \bar{I} + A_a f_a(\varphi_{ai}, \psi_a) + A_b f_b(\varphi_{bi}, \psi_b), \quad (1)$$

где  $I_i$  — наблюдаемая полная интенсивность;  $\bar{I}$  — средняя интенсивность;  $A_a$  и  $A_b$  — полуамплитуды колебаний;  $f_a$  и  $f_b$  — стандартные кривые блеска обоих компонентов, заданные в табличной форме и нормированные по амплитуде на отрезке  $[-1, 1]$ ;  $\varphi_{ai}$  и  $\varphi_{bi}$  — фазы колебаний, которые зависят от момента наблюдения и от периодов изменения блеска  $P_a$  и  $P_b$  соответственно;  $\psi_a$  и  $\psi_b$  — сдвиги фаз стандартных кривых, при которых эти стандартные кривые совмещаются с обрабатываемыми наблюдениями.

**Таблица 3.** Коэффициенты Фурье (разложение по косинусам) кривых блеска CEa Cas и CEb Cas

Цефеиды	Фильтр	Период	$R_{21}$ Error	$R_{31}$ Error	$R_{41}$ Error	$\phi_{21}$ Error	$\phi_{31}$ Error	$\phi_{41}$ Error
CEa Cas	<i>B</i>	5.14093	0.35132	0.11182	0.02427	4.26833	2.33628	0.42084
			0.00098	0.00098	0.00098	0.00340	0.00923	0.04050
CEa Cas	<i>V</i>	5.14093	0.35350	0.11846	0.04051	4.45352	2.85253	0.66388
			0.00180	0.00180	0.00180	0.00624	0.01615	0.04507
CEa Cas	<i>g'</i>	5.14093	0.36006	0.12494	0.02423	4.35872	2.58719	1.12595
			0.00148	0.00148	0.00148	0.00506	0.01265	0.06136
CEa Cas	<i>r'</i>	5.14093	0.36002	0.13668	0.02905	4.48516	3.08511	2.05588
			0.00001	0.00001	0.00001	0.00005	0.00012	0.00050
CEb Cas	<i>B</i>	4.47931	0.34071	0.12473	0.04933	4.21129	2.28341	6.23947
			0.00159	0.00159	0.00159	0.00565	0.01362	0.03288
CEb Cas	<i>V</i>	4.47931	0.34421	0.12926	0.04874	4.32372	2.53408	0.33227
			0.00148	0.00148	0.00148	0.00520	0.01224	0.03083
CEb Cas	<i>g'</i>	4.47931	0.34329	0.12976	0.05880	4.27409	2.53727	0.87106
			0.00113	0.00113	0.00113	0.00398	0.00933	0.01970
CEb Cas	<i>r'</i>	4.47931	0.31235	0.11176	0.06637	4.52329	2.75605	0.76656
			0.00183	0.00183	0.00183	0.00692	0.01731	0.02859

**Таблица 4.** Наблюдательный материал суммарного блеска CE Cas

Источник данных	Число наблюдений	Тип наблюдений	Интервал JD
Гарвард (данная работа)	547	Фотографические, <i>pg</i>	2415024–2434283
ГАИШ (данная работа)	557	Фотографические, <i>pg</i>	2413522–2443789
Литература	286	Фотографические, <i>pg</i>	2435032–2436114
Литература	265	Визуальные, <i>vis</i>	2432055–2437588
Литература	1131	Фотоэлектрические, <i>BV</i>	2438559–2453268
AAVSO	102	Фотоэлектрические, <i>V</i>	2451122–2454869
INTEGRAL-OMC	504	ПЗС, <i>V</i>	2453684–2453956
ASAS-SN	2590	ПЗС, <i>Vg'</i>	2457008–2459102

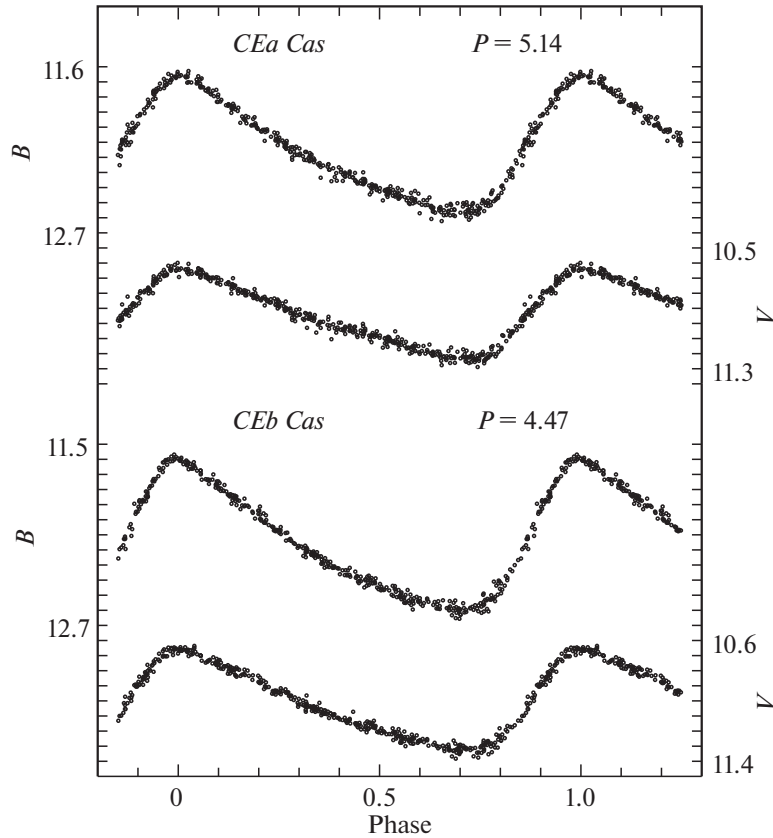


Рис. 2. Кривые блеска CEa Cas и CEb Cas, полученные разложением фотоэлектрических наблюдений суммарного блеска CE Cas.

Система нелинейных уравнений (1) линеаризуется (Щиголев, 1969) и решается методом наименьших квадратов относительно поправок к неизвестным  $\bar{I}$ ,  $A_a$ ,  $\psi_a$ ,  $A_b$  и  $\psi_b$ . В качестве начальных приближений для  $A_a$ ,  $A_b$  и  $\bar{I}$  мы использовали соответствующие значения полуамплитуд стандартных кривых и среднюю интенсивность обрабатываемого ряда. Начальные приближения для  $\psi_a$  и  $\psi_b$  вычисляются следующим образом: мы подставляем начальные значения для  $A_a$ ,  $A_b$  и  $\bar{I}$  в уравнения (1) и меняем значения  $\psi_a$  и  $\psi_b$  от нуля до единицы с шагом 0.02; значения  $\psi_a$  и  $\psi_b$ , которые дают минимальную сумму квадратов отклонений, и выбираются в качестве начальных приближений. После 3–15 итераций, когда поправки к неизвестным становятся меньше 0.001, процесс вычислений останавливается.

Следует отметить, что описанная процедура отличается от аппроксимации наблюдений суммой двух синусов или косинусов только тем, что вместо гармонических функций в уравнениях (1) используются заданные в табличной форме стандартные кривые.

Кривые блеска обеих цефеид в интенсивностях

вычислялись по формулам

$$\begin{aligned} I_{ai} &= \bar{I}_a + A_a f_a(\varphi_{ai}, \psi_a), \\ I_{bi} &= \bar{I}_b + A_b f_b(\varphi_{bi}, \psi_b), \end{aligned} \quad (2)$$

при этом остаточный шум, т.е.  $(I_i - I_{ai} - I_{bi})/2$ , добавлялся к каждой кривой, и после этого интенсивности переводились в звездные величины.

Для определения  $\bar{I}_a$  и  $\bar{I}_b$  мы вычислили по нашим наблюдениям отношения средних интенсивностей компонентов

$$K = \bar{I}_a / \bar{I}_b, \quad (3)$$

а решение системы (1) дает их сумму

$$\bar{I} = \bar{I}_a + \bar{I}_b. \quad (4)$$

Совместное решение (3) и (4) позволяет найти  $\bar{I}_a$  и  $\bar{I}_b$ . При этом использовались значения  $K_B = 0.999$ ,  $K_V = 1.062$  и  $K_g = 1.041$ .

В качестве примера на рис. 2 изображены кривые блеска CEa Cas и CEb Cas, полученные разложением фотоэлектрических наблюдений суммарного блеска CE Cas в фильтрах B и V.

Таблица 5. Моменты максимума блеска СЕа Сас

Максимум, HJD	Ошибка, сут	Фильтр	$E$	$O - C$ , сут	$N$	Источник данных
2416163.8254	0.0854	<i>pg</i>	-4171	-0.0626	34	Гарвард (данная работа)
2417922.0809	0.0831	<i>pg</i>	-3829	-0.0047	47	Гарвард (данная работа)
2420831.7933	0.1405	<i>pg</i>	-3263	-0.0577	81	Гарвард (данная работа)
2420940.0314	0.1435	<i>pg</i>	-3242	0.2209	17	Гарвард (данная работа)
2425062.9244	0.0905	<i>pg</i>	-2440	0.0893	126	Гарвард (данная работа)
2428065.0309	0.0958	<i>pg</i>	-1856	-0.1064	22	ГАИШ (данная работа)
2428260.6153	0.0849	<i>pg</i>	-1818	0.1227	42	Гарвард (данная работа)
2429000.8197	0.0814	<i>pg</i>	-1674	0.0334	95	Гарвард (данная работа)
2429566.2244	0.1398	<i>pg</i>	-1564	-0.0640	30	ГАИШ (данная работа)
2431864.2560	0.1721	<i>pg</i>	-1117	-0.0274	42	Гарвард (данная работа)
2432270.6643	0.0830	<i>pg</i>	-1038	0.2475	63	Гарвард (данная работа)
2432342.5122	0.0713	<i>vis</i>	-1024	0.1224	172	Бейер (1965)
2433344.9664	0.0857	<i>pg</i>	-829	0.0956	50	ГАИШ (данная работа)
2434789.4224	0.0841	<i>pg</i>	-548	-0.0493	60	ГАИШ (данная работа)
2435457.8420	0.0573	<i>pg</i>	-418	0.0496	152	Романо (1959)
2435467.9372	0.1006	<i>pg</i>	-416	-0.1370	31	ГАИШ (данная работа)
2435827.9892	0.0329	<i>pg</i>	-346	0.0500	134	Зонн (1960)
2436450.0414	0.0357	<i>pgB</i>	-225	0.0498	27	Сэндидж и Тамман (1969)
2436506.5812	0.0450	<i>pgV</i>	-214	0.0394	29	Сэндидж и Тамман (1969)
2437488.6091	0.1160	<i>vis</i>	-23	0.1499	93	AAVSO
2437580.9880	0.0527	<i>V</i>	-5	-0.0078	27	Сэндидж и Тамман (1969)
2437581.0441	0.0251	<i>B</i>	-5	-0.0020	27	Сэндидж и Тамман (1969)
2438609.1718	0.0380	<i>pgB</i>	195	-0.0098	26	Холопов и Ефремов (1983)
2438614.3253	0.0538	<i>pgV</i>	196	0.0028	37	Холопов и Ефремов (1983)
2438624.4085	0.0508	<i>V</i>	198	-0.1958	7	Смак (1966)
2438624.6113	0.0573	<i>B</i>	198	-0.0432	7	Смак (1966)
2438789.1217	0.0925	<i>pg</i>	230	0.0076	55	ГАИШ (данная работа)
2440439.3885	0.1103	<i>pg</i>	551	0.0364	34	ГАИШ (данная работа)
2441220.7746	0.0610	<i>pg</i>	703	0.0014	101	ГАИШ (данная работа)
2442367.3254	0.0449	<i>pg</i>	926	0.1251	128	ГАИШ (данная работа)
2443215.4732	0.1853	<i>pg</i>	1091	0.0197	46	ГАИШ (данная работа)
2444644.6426	0.0552	<i>V</i>	1369	0.0111	35	Мофет и Бэрнс (1984)
2444644.6958	0.0304	<i>B</i>	1369	0.0141	35	Мофет и Бэрнс (1984)

Таблица 5. Продолжение

Максимум, HJD	Ошибка, сут	Фильтр	$E$	$O - C$ , сут	$N$	Источник данных
2444855.4605	0.0407	<i>V</i>	1410	0.0509	22	Бердников (1986)
2444855.5011	0.0250	<i>B</i>	1410	0.0413	22	Бердников (1986)
2445189.5766	0.0283	<i>V</i>	1475	0.0066	14	Бердников (1986)
2445189.5930	0.0211	<i>B</i>	1475	-0.0272	14	Бердников (1986)
2445652.1838	0.0729	<i>V</i>	1565	-0.0697	30	Бердников (1986)
2445652.2431	0.0470	<i>B</i>	1565	-0.0606	30	Бердников (1986)
2445878.4461	0.0498	<i>V</i>	1609	-0.0082	15	Бердников (1986)
2445878.5092	0.0316	<i>B</i>	1609	0.0046	15	Бердников (1986)
2446284.5780	0.0144	<i>V</i>	1688	-0.0096	35	Бердников (1987)
2446284.6306	0.0095	<i>B</i>	1688	-0.0073	35	Бердников (1987)
2446320.7958	0.0604	<i>B</i>	1695	0.1714	11	Опал и др. (1988)
2446623.8372	0.0205	<i>V</i>	1754	-0.0518	22	Бердников (1992а)
2446623.8952	0.0153	<i>B</i>	1754	-0.0440	22	Бердников (1992а)
2446742.1816	0.0280	<i>V</i>	1777	0.0513	30	Опал и др. (1988)
2447060.8640	0.0654	<i>V</i>	1839	-0.0039	10	Бердников (1992б)
2447060.9136	0.0457	<i>B</i>	1839	-0.0045	10	Бердников (1992б)
2447420.7119	0.0390	<i>V</i>	1909	-0.0210	45	Бердников (1992в)
2447420.7652	0.0327	<i>B</i>	1909	-0.0179	45	Бердников (1992в)
2447760.0440	0.0245	<i>V</i>	1975	0.0099	53	Бердников (1992г)
2447760.0628	0.0156	<i>B</i>	1975	-0.0215	52	Бердников (1992г)
2448114.7496	0.0334	<i>V</i>	2044	-0.0086	31	Бердников (1992д)
2448114.8041	0.0310	<i>B</i>	2044	-0.0043	31	Бердников (1992д)
2448510.6086	0.0111	<i>V</i>	2121	-0.0011	43	Бердников (1992е)
2448510.6318	0.0098	<i>B</i>	2121	-0.0281	43	Бердников (1992е)
2448880.7357	0.0241	<i>V</i>	2193	-0.0208	34	Бердников (1993)
2448880.7663	0.0211	<i>B</i>	2193	-0.0405	34	Бердников (1993)
2449626.1760	0.0708	<i>V</i>	2338	-0.0152	27	Бердников и Возякова (1995)
2449626.2173	0.0344	<i>B</i>	2338	-0.0241	27	Бердников и Возякова (1995)
2449970.6630	0.0524	<i>V</i>	2405	0.0296	32	Бердников и др. (1997)
2450325.3899	0.0207	<i>V</i>	2474	0.0324	39	Бердников и др. (1998)
2450325.3945	0.0167	<i>B</i>	2474	-0.0132	39	Бердников и др. (1998)
2451440.9271	0.0285	<i>V</i>	2691	-0.0118	91	AAVSO
2453240.2097	0.0545	<i>V</i>	3041	-0.0541	10	Бердников и др. (2000а)

Таблица 5. Окончание

Максимум, HJD	Ошибка, сут	Фильтр	$E$	$O - C$ , сут	$N$	Источник данных
2453240.2739	0.0149	$B$	3041	-0.0402	10	Бердников и др. (2020а)
2453733.7765	0.0766	$V$	3137	-0.0165	504	INTEGRAL-ОМС
2454859.6378	0.0083	$V$	3356	-0.0186	11	AAVSO
2456211.6741	0.0058	$V$	3619	-0.0464	82	Бердников и др. (2020б)
2457250.1530	0.0083	$V$	3821	-0.0350	140	ASAS-SN
2457255.2750	0.0089	$V$	3822	-0.0539	178	ASAS-SN
2457656.2648	0.0088	$V$	3900	-0.0566	165	ASAS-SN
2457661.4134	0.0065	$V$	3901	-0.0489	184	ASAS-SN
2458005.8457	0.0058	$V$	3968	-0.0589	194	ASAS-SN
2458010.9918	0.0055	$V$	3969	-0.0536	171	ASAS-SN
2458360.5702	0.0125	$V$	4037	-0.0584	115	ASAS-SN
2458365.7242	0.0128	$V$	4038	-0.0453	102	ASAS-SN
2458627.9219	0.0092	$g'$	4089	-0.0350	390	ASAS-SN
2458638.2359	0.0060	$g'$	4091	-0.0028	369	ASAS-SN
2458797.5886	0.0045	$g'$	4122	-0.0189	294	ASAS-SN
2458838.7165	0.0068	$g'$	4130	-0.0184	288	ASAS-SN
2459049.4534	0.0025	$V$	4171	-0.0596	180	Бердников и др. (2020б)
2459054.6269	0.0018	$B$	4172	-0.0773	180	Бердников и др. (2020б)
2459054.6305	0.0024	$g'$	4172	-0.0234	175	Бердников и др. (2020б)

Предложенный метод разложения наблюдений суммарного блеска SE Cas на два колебания позволяет не только получить кривые блеска компонентов, но и определить моменты их максимального блеска, так как произведения  $P_a\psi_a$  и  $P_b\psi_b$ , взятые с обратным знаком, дают значения остаточные отклонения  $O - C$ , которые могут быть использованы для изучения стабильности периодов пульсаций компонентов.

#### ПОЛУЧЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

Результаты обработки сезонных кривых SEa Cas и SEb Cas приведены в табл. 5 и 6 соответственно. В первом и втором столбцах этих

таблиц даны моменты максимального блеска и ошибки их определения, в третьем — тип используемых наблюдений, в четвертом и пятом — номер эпохи  $E$  и значение остаточных отклонений  $O - C$ , а в шестом и седьмом — число наблюдений  $N$  и источник данных. Данные табл. 5 и 6 изображены на  $O - C$  диаграммах (рис. 3 и 4 соответственно) квадратиками для гарвардских фотографических наблюдений и кружками для остальных наблюдений, вертикальные черточки указывают пределы ошибок определения остаточных отклонений  $O - C$ .

$O - C$  диаграммы имеют вид парабол. По моментам максимального блеска из табл. 5 получены квадратичные элементы изменения блеска



Таблица 6. Моменты максимума блеска SEb Cas

Мах, HJD	Ошибка, сут	Фильтр	$E$	$O - C$ , сут	$N$	Источник данных
2416161.4642	0.0881	<i>pg</i>	-4788	0.0067	34	Гарвард (данная работа)
2416672.3229	0.1101	<i>pg</i>	-4674	0.2241	24	ГАИШ (данная работа)
2417921.8555	0.0554	<i>pg</i>	-4395	0.0292	47	Гарвард (данная работа)
2420833.5481	0.0843	<i>pg</i>	-3745	0.1703	81	Гарвард (данная работа)
2420941.1519	0.1410	<i>pg</i>	-3721	0.2707	17	Гарвард (данная работа)
2425061.8862	0.0848	<i>pg</i>	-2801	0.0397	126	Гарвард (данная работа)
2428067.4152	0.0598	<i>pg</i>	-2130	-0.0482	22	ГАИШ (данная работа)
2428999.0712	0.0503	<i>pg</i>	-1922	-0.0887	95	Гарвард (данная работа)
2429568.0217	0.0914	<i>pg</i>	-1795	-0.0105	30	ГАИШ (данная работа)
2431865.8885	0.0993	<i>pg</i>	-1282	-0.0298	42	Гарвард (данная работа)
2432273.4787	0.0854	<i>pg</i>	-1191	-0.0567	63	Гарвард (данная работа)
2432345.2517	0.0481	<i>vis</i>	-1175	0.0473	172	Бейер (1965)
2433344.1220	0.0461	<i>pg</i>	-952	0.0314	50	ГАИШ (данная работа)
2434790.7662	0.0753	<i>pg</i>	-629	-0.1414	60	ГАИШ (данная работа)
2435458.3320	0.0345	<i>pg</i>	-480	0.0072	152	Романо (1959)
2435830.0329	0.0208	<i>pg</i>	-397	-0.0747	134	Зонн (1960)
2436452.6795	0.0215	<i>pgB</i>	-258	-0.0522	27	Сэндидж и Тамман (1969)
2436506.4947	0.0300	<i>pgV</i>	-246	0.0113	29	Сэндидж и Тамман (1969)
2437487.3727	0.0947	<i>vis</i>	-27	-0.0796	92	AAVSO
2437581.5074	0.0194	<i>B</i>	-6	0.0146	27	Сэндидж и Тамман (1969)
2437581.5164	0.0391	<i>V</i>	-6	-0.0014	27	Сэндидж и Тамман (1969)
2438611.6973	0.0334	<i>pgB</i>	224	-0.0617	20	Холопов и Ефремов (1983)
2438625.1406	0.1725	<i>B</i>	227	-0.0315	8	Смак (1966)
2438629.7298	0.0413	<i>pgV</i>	228	0.0535	31	Холопов и Ефремов (1983)
2438790.8752	0.0530	<i>pg</i>	264	-0.0562	55	ГАИШ (данная работа)
2440434.8084	0.1024	<i>pg</i>	631	-0.0298	34	ГАИШ (данная работа)
2441218.6714	0.0325	<i>pg</i>	806	-0.0461	101	ГАИШ (данная работа)
2442365.4511	0.0304	<i>pg</i>	1062	0.0303	128	ГАИШ (данная работа)
2443212.0175	0.1090	<i>pg</i>	1251	0.0071	46	(данная работа)
2444645.3968	0.0191	<i>B</i>	1571	0.0322	35	Мофет и Бэрнс (1984)
2444645.4114	0.0355	<i>V</i>	1571	0.0218	35	Мофет и Бэрнс (1984)
2444855.9132	0.0213	<i>B</i>	1618	0.0210	22	Бердников (1986)
2444855.9558	0.0435	<i>V</i>	1618	0.0386	22	Бердников (1986)

Таблица 6. Продолжение

Мах, HJD	Ошибка, сут	Фильтр	$E$	$O - C$ , сут	$N$	Источник данных
2445191.8455	0.0105	<i>B</i>	1693	0.0051	14	Бердников (1986)
2445191.8719	0.0165	<i>V</i>	1693	0.0065	14	Бердников (1986)
2445653.1821	0.0245	<i>B</i>	1796	-0.0272	30	Бердников (1986)
2445653.2194	0.0458	<i>V</i>	1796	-0.0149	30	Бердников (1986)
2445877.1973	0.0176	<i>B</i>	1846	0.0224	15	Бердников (1986)
2445877.2589	0.0321	<i>V</i>	1846	0.0591	15	Бердников (1986)
2446284.8179	0.0077	<i>B</i>	1937	0.0258	35	Бердников (1987)
2446284.8330	0.0113	<i>V</i>	1937	0.0160	35	Бердников (1987)
2446320.6611	0.0537	<i>B</i>	1945	0.0345	13	Опал и др. (1988)
2446620.7817	0.0085	<i>B</i>	2012	0.0413	22	Бердников (1992а)
2446620.8057	0.0125	<i>V</i>	2012	0.0404	22	Бердников (1992а)
2446741.7204	0.0154	<i>V</i>	2039	0.0138	30	Опал и др. (1988)
2447059.7470	0.0406	<i>B</i>	2110	0.0343	10	Бердников (1992б)
2447059.8144	0.0719	<i>V</i>	2110	0.0767	10	Бердников (1992б)
2447422.5944	0.0223	<i>B</i>	2191	0.0576	45	Бердников (1992в)
2447422.6268	0.0303	<i>V</i>	2191	0.0651	45	Бердников (1992в)
2447758.5193	0.0126	<i>B</i>	2266	0.0343	52	Бердников (1992г)
2447758.5609	0.0197	<i>V</i>	2266	0.0508	53	Бердников (1992г)
2448116.8751	0.0315	<i>V</i>	2346	0.0203	31	Бердников (1992д)
2448116.8859	0.0244	<i>B</i>	2346	0.0560	31	Бердников (1992д)
2448511.0664	0.0066	<i>B</i>	2434	0.0573	43	Бердников (1992е)
2448511.0837	0.0083	<i>V</i>	2434	0.0496	43	Бердников (1992е)
2448878.3369	0.0238	<i>V</i>	2516	-0.0005	34	Бердников (1993)
2448878.3462	0.0225	<i>B</i>	2516	0.0336	34	Бердников (1993)
2449626.4456	0.0801	<i>V</i>	2683	0.0634	27	Бердников и Возякова (1995)
2449626.4527	0.0416	<i>B</i>	2683	0.0954	27	Бердников и Возякова (1995)
2449971.3370	0.0402	<i>V</i>	2760	0.0479	32	Бердников и др. (1997)
2450325.1966	0.0109	<i>B</i>	2839	0.0669	39	Бердников и др. (1998)
2450325.2063	0.0153	<i>V</i>	2839	0.0517	39	Бердников и др. (1998)
2451445.0822	0.0226	<i>V</i>	3089	0.1001	94	AAVSO
2453241.2935	0.0136	<i>B</i>	3490	0.1330	10	Бердников и др. (2000а)
2453241.3207	0.0550	<i>V</i>	3490	0.1353	10	Бердников и др. (2020а)
2453353.3211	0.0550	<i>V</i>	3515	0.1530	264	INTEGRAL-ОМС

Таблица 6. Окончание

Мах, HJD	Ошибка, сут	Фильтр	$E$	$O - C$ , сут	$N$	Источник данных
2453734.0579	0.0498	$V$	3600	0.1484	504	INTEGRAL-OMC
2454862.7908	0.0064	$V$	3852	0.0952	11	AAVSO
2455207.8186	0.0308	$V$	3929	0.2161	157	INTEGRAL-OMC
2456403.7349	0.1224	$V$	4196	0.1566	56	INTEGRAL-OMC
2457250.3061	0.0064	$V$	4385	0.1383	140	ASAS-SN
2457254.7654	0.0067	$V$	4386	0.1183	178	ASAS-SN
2457653.4237	0.0051	$V$	4475	0.1180	165	ASAS-SN
2457662.3929	0.0047	$V$	4477	0.1286	184	ASAS-SN
2458007.3005	0.0047	$V$	4554	0.1293	194	ASAS-SN
2458011.7816	0.0046	$V$	4555	0.1311	171	ASAS-SN
2458361.1627	0.0080	$V$	4633	0.1260	115	ASAS-SN
2458365.6378	0.0126	$V$	4634	0.1217	102	ASAS-SN
2458625.4382	0.0075	$g'$	4692	0.1223	390	ASAS-SN
2458638.8723	0.0043	$g'$	4695	0.1184	369	ASAS-SN
2458795.6509	0.0039	$g'$	4730	0.1211	294	ASAS-SN
2458835.9658	0.0054	$g'$	4739	0.1222	288	ASAS-SN
2459050.9883	0.0027	$V$	4787	0.1379	185	Бердников и др. (2020б)
2459055.4480	0.0017	$B$	4788	0.1433	186	Бердников и др. (2020б)
2459055.4611	0.0019	$g'$	4788	0.1313	176	Бердников и др. (2020б)

для цефеиды SEa Cas:

$$\begin{aligned} \text{Мах}HJD = & 2437606.7005 (\pm 0.0100) + \\ & + 5^{\text{d}}140928431 (\pm 0.0000040) E - \\ & - 0.31235 \cdot 10^{-8} (\pm 0.137 \cdot 10^{-8}) E^2, \end{aligned} \quad (5)$$

а из табл. 6 — для цефеиды SEb Cas:

$$\begin{aligned} \text{Мах}HJD = & 2437608.3936 (\pm 0.0076) + \\ & + 4^{\text{d}}479309965 (\pm 0.0000024) E + \\ & + 0.70406 \cdot 10^{-8} (\pm 0.717 \cdot 10^{-9}) E^2, \end{aligned} \quad (6)$$

линейная часть которых использована для вычислений остаточных уклонений  $O - C$  в пятих

столбцах табл. 5 и 6 соответственно. Элементы (5) и (6) использовались для проведения парабол в верхних частях рис. 3 и 4, в нижних частях которых показаны отклонения от этих парабол.

Из табл. 5 следует, что максимумы SEa Cas в фильтрах  $B$  и  $g'$  наступают раньше, чем в фильтре  $V$ , на  $0^{\text{d}}0502$  и  $0^{\text{d}}0380$  соответственно, а согласно табл. 6, максимумы SEb Cas в фильтрах  $B$  и  $g'$  наступают позже, чем в фильтре  $V$ , на  $0^{\text{d}}0249$  и  $0^{\text{d}}0066$  соответственно. Эти поправки учитывались при построении рис. 3 и 4 и определении элементов (5) и (6), которые, таким образом, относятся к системе  $V$ .

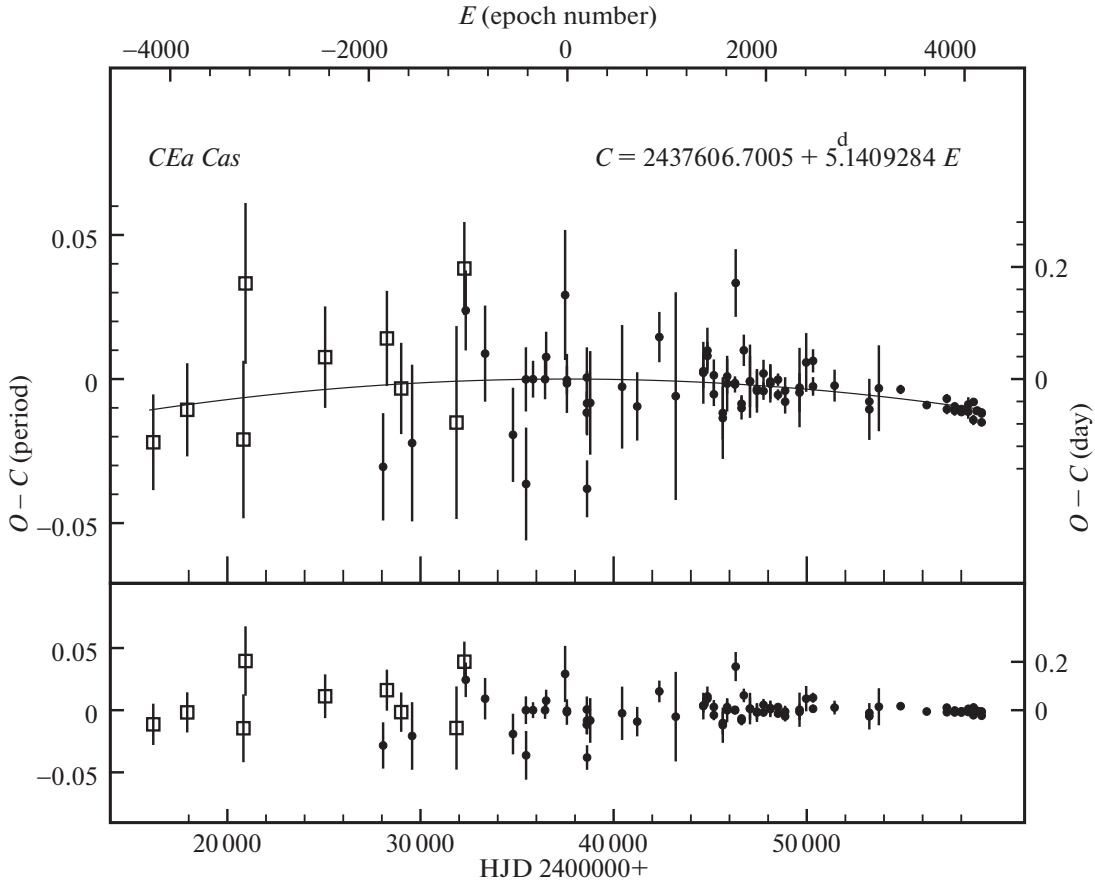


Рис. 3. Диаграмма  $O - C$  для цефеиды  $CEa\ Cas$  относительно линейных (вверху) и квадратичных (внизу) элементов (5). Линия — парабола, соответствующая элементам (5).

Для подтверждения реальности изменений периода пульсаций мы используем метод, опубликованный Ломбардом и Коэном (1993). Для этого мы вычислили разности  $\Delta(O - C)_i$  последовательных остаточных уклонений  $O - C$  из табл. 5 и 6,  $\Delta(O - C)_i = (O - C)_{i+1} - (O - C)_i$ , и построили графики зависимости  $D_i = \Delta(O - C)_i / (E_{i+1} - E_i)$  от  $E'_i = (E_i + E_{i+1})/2$  для  $CEa\ Cas$  (рис. 5) и  $CEb\ Cas$  (рис. 6). Разности  $D_i$ , которые имеют смысл изменений периода в интервале эпох  $E_i - E_{i+1}$ , соответствуют поведению остаточных уклонений  $O - C$  на рис. 3 и 4, т.е. обнаруженные изменения периодов являются реальными.

Квадратичные члены элементов (5) и (6) позволяют вычислить скорость эволюционного уменьшения периода для  $CEa\ Cas$   $dP/dt = -0.038 (\pm 0.017)$  с/год и увеличения  $dP/dt = +0.099 (\pm 0.010)$  с/год для  $CEb\ Cas$ , что соответствует теоретическим расчетам для второго и третьего пересечений полосы неустойчивости (Тэрнер и др., 2006; Фадеев, 2014) соответственно.

Следует отметить, что полученные здесь результаты основаны на конкретных стандартных кривых, которые приведены в нашей предыдущей работе (Бердников и др., 2020б).

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для изучения изменчивости периода компонентов  $CE\ Cas$  нами было сделано 1104 глазомерных оценки суммарного блеска на старых фотопластинках университета Гарварда (США) и ГАИШ; кроме того, было собрано 6015 опубликованных наблюдений. В результате обработки всех имеющихся данных, охватывающих временной интервал с 1895 по 2020 г., были определены по 85 моментов максимального блеска для построения  $O - C$  диаграмм для  $CEa\ Cas$  и  $CEb\ Cas$ . Определены квадратичные элементы изменения блеска обеих цефеид, и вычислены скорости эволюционных изменений их периодов:  $dP/dt = -0.038 (\pm 0.017)$  с/год для  $CEa\ Cas$  и  $dP/dt = +0.099 (\pm 0.010)$  с/год для

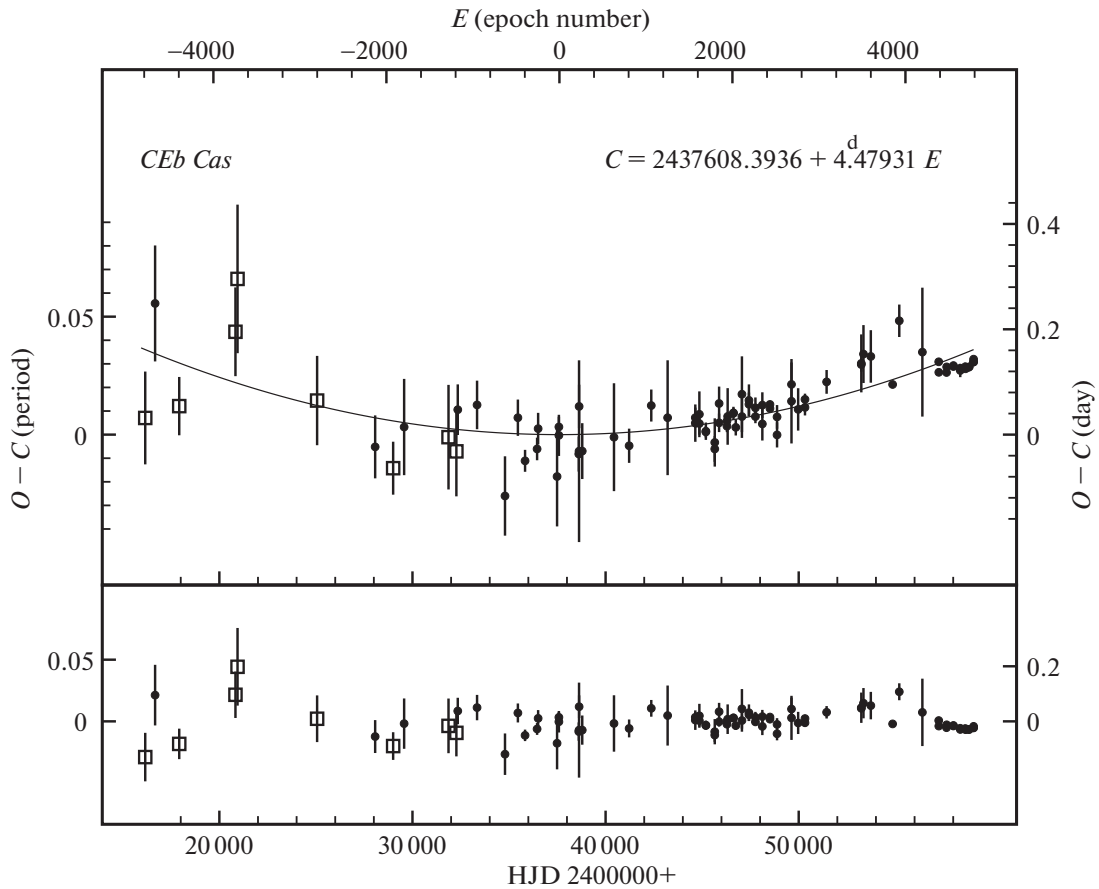


Рис. 4. Диаграмма  $O - C$  для цефеиды *CEb Cas* относительно линейных (вверху) и квадратичных (внизу) элементов (6). Линия — парабола, соответствующая элементам (6).

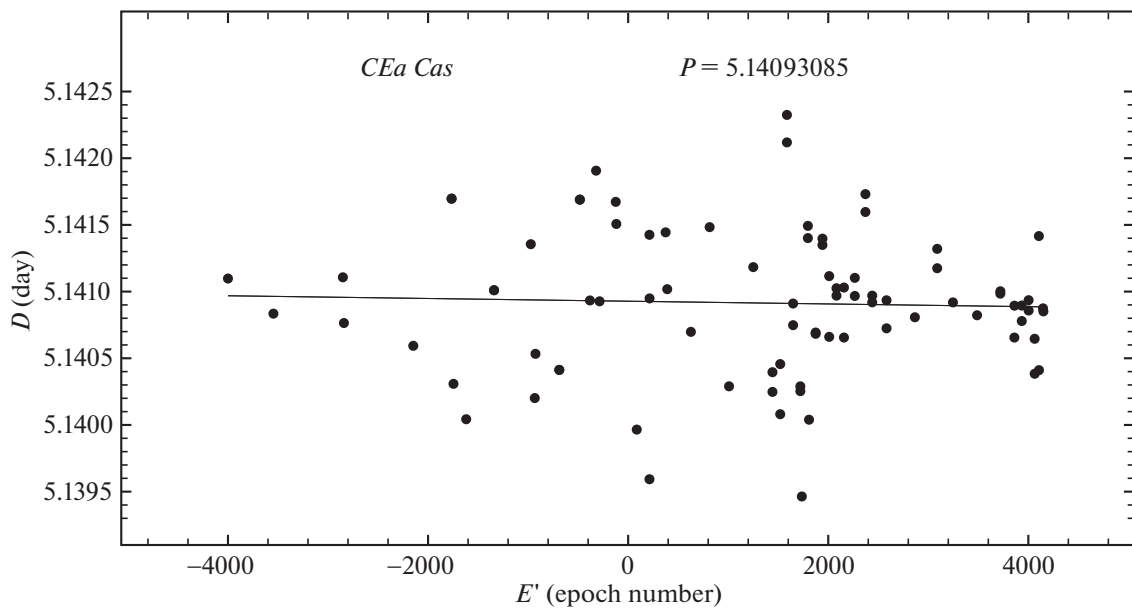


Рис. 5. Зависимость  $D_i = ((O - C)_{i+1} - (O - C)_i) / (E_{i+1} - E_i)$  от  $E'_i = (E_i + E_{i+1})/2$ . Линия соответствует поведению остатков  $O - C$  на рис. 3.

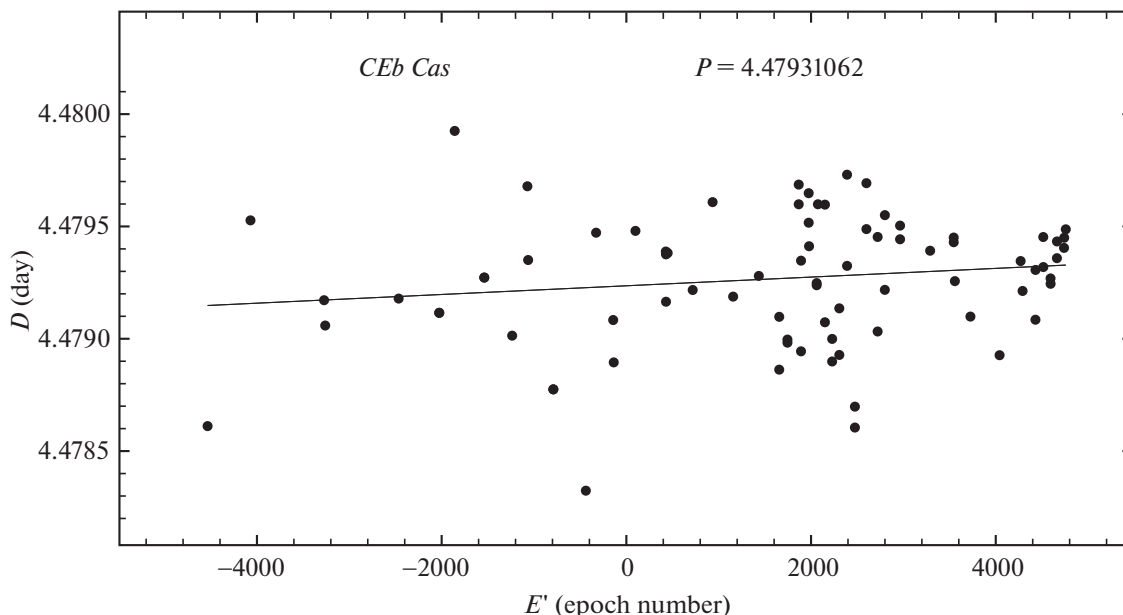


Рис. 6. Зависимость  $D_i = ((O - C)_{i+1} - (O - C)_i) / (E_{i+1} - E_i)$  от  $E'_i = (E_i + E_{i+1})/2$ . Линия соответствует поведению остаточных уклонений  $O - C$  на рис. 4.

CEb Cas, что согласуется с результатами теоретических расчетов для второго и третьего пересечений полосы неустойчивости соответственно. Тест на стабильность пульсаций, предложенный Ломбардом и Коэном (1993), подтвердил реальность изменений периодов.

Данная работа осуществлялась при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты 18-02-00890 и 19-02-00611).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Альфонсо-Гарсон и др. (J. Alfonso-Garzon, A. Domingo, J.M. Mas-Hesse, and A. Gimenez), *Astron. Astrophys.* **548**, A79 (2012).
2. Бейер (M. Beyer), *Astron. Abh.* 54–61 (1965).
3. Белявский (S. Beljawsky), *Astron. Nachr.* **243**, 115 (1931).
4. Бердников Л.Н., *Переменные Звезды* **22**, 369 (1986).
5. Бердников Л.Н., *Переменные Звезды* **22**, 530 (1987).
6. Бердников (L.N. Berdnikov), *Astron. Astrophys. Trans.* **2**, 1 (1992a).
7. Бердников (L.N. Berdnikov), *Astron. Astrophys. Trans.* **2**, 31 (1992b).
8. Бердников (L.N. Berdnikov), *Astron. Astrophys. Trans.* **2**, 43 (1992в).
9. Бердников (L.N. Berdnikov), *Astron. Astrophys. Trans.* **2**, 107 (1992г).
10. Бердников (L.N. Berdnikov), *Astron. Astrophys. Trans.* **2**, 157 (1992д).
11. Бердников Л.Н., *Письма в Астрон. журн.* **18**, 325 (1992ж) [L.N. Berdnikov, *Sov. Astron. Lett.* **18**, 130 (1992)].
12. Бердников Л.Н., *Письма в Астрон. журн.* **18**, 519 (1992е) [L.N. Berdnikov, *Sov. Astron. Lett.* **18**, 207 (1992)].
13. Бердников Л.Н., *Письма в Астрон. журн.* **19**, 210 (1993) [L.N. Berdnikov, *Sov. Astron. Lett.* **19**, 84 (1993)].
14. Бердников Л.Н., *Astron. журн.* **34**, 798 (1990).
15. Бердников и др. (L.N. Berdnikov, G.N. Abdullaeva, and M.A. Ibragimov), *Var. Stars* **40** (2), 1 (2000a).
16. Бердников и др. (L.N. Berdnikov, A.A. Belinskij, E.N. Pastukhova, M.A. Burlak, N.P. Ikonnikova, E.O. Mishin, and N.I. Shatskii), *Var. Stars* **40** (7), 1 (2020b).
17. Бердников Л.Н., Белинский А.А., Шатский Н.И., Бурлак М.А., Иконникова Н.П., Мишин Е.О., Черясов Д.В., Жуйко С.В., *Астрон. журн.* **97**, 284 (2020в) [L.N. Berdnikov, A.A. Belinskij, N.I. Shatskij, M.A. Burlak, N.P. Ikonnikova, E.O. Mishin, D.V. Cheryasov, and S.V. Zhuiko, *Astron. Rep.* **64**, 310 (2020)].
18. Бердников Л.Н., Возякова О.В., *Письма в Астрон. журн.* **21**, 348 (1995). [L.N. Berdnikov and O.V. Voziakova, *Astron. Lett.* **21**, 308 (1995)].
19. Бердников Л.Н., Возякова О.В., Дамбис А.К., *Письма в Астрон. журн.* **22**, 372 (1996) [L.N. Berdnikov, O.V. Vosyakova, and A.K. Dambis, *Astron. Lett.* **22**, 334 (1996)].
20. Бердников и др. (L.N. Berdnikov, V.V. Ignatova, and O.V. Vozyakova), *Astron. Astrophys. Trans.* **14**, 237 (1997).

21. Бердников и др. (L.N. Berdnikov, V.V. Ignatova, and O.V. Vozyakova), *Astron. Astrophys. Trans.* **17**, 87 (1998).
22. Браун и др. (A.G.A. Brown, A. Vallenari, T. Prusti, J.H.J. de Bruijne, C. Babusiaux, C.A.L. Bailer-Jones, M. Biermann, D.W. Evans, et al.), *Astron. Astrophys.* **616**, A1 (2018).
23. Герцшпрунг (E. Hertzsprung), *Astron. Nachr.* **210**, 17 (1919).
24. Ефремов Ю.Н., Холопов П.Н., *Астрон. Цирк.* **326**, 1 (1965).
25. Зонн (W. Zonn), *Acta Astron.* **10**, 89 (1960).
26. AAVSO, The AAVSO International Database. <https://www.aavso.org>.
27. Ломбард, Коен (F. Lombard and C. Koen), *MNRAS* **263**, 309 (1993).
28. Мофет, Бэрнс (T.J. Moffett and T.G. Barnes), *Astrophys. J. Suppl. Ser.* **55**, 389 (1984).
29. Опал и др. (C.V. Opal, J.E. Krist, T.G. Barnes, and T. J. Moffett), *Astron. J.* **96**, 1677 (1988).
30. Пейн-Гапошкина, Гапошкин (C. Payne-Gaposkin and S. Gaposkin), *Publ. Astron. Soc. Pacific* **75**, 171 (1963).
31. Рипепи и др. (V. Ripepi, R. Molinaro, I. Musella, M. Marconi, S. Leccial, and L. Eyer), *Astron. Astrophys.* **625**, A14 (2019).
32. Романо (G. Romano), *Publ. Oserv. Astron. Padova* **№.116**, 3 (1959).
33. Смак (J. Smak), *Acta Astron.* **16**, 11 (1966).
34. Старикова Г.А., *Переменные звезды* **7**, 124 (1949).
35. Сэндидж, Тамман (A. Sandage and G.A. Tammann), *Astrophys. J.* **157**, 683 (1969).
36. Тэрнер и др. (D.G. Turner, M. Abdel-Sabour Abdel-Latif, and L.N. Berdnikov), *Publ. Astron. Soc. Pacific* **118**, 410 (2006).
37. Фадеев Ю.А., *Письма в Астрон. журн.* **40**, 341 (2014) [Yu.A. Fadeyev, *Astron. Lett.* **40**, 301 (2014)].
38. Франц (O.G. Franz), *Bull. Amer. Astron. Soc.*, **4**, 379 (1972).
39. Холопов П.Н., Ефремов Ю.Н., *Переменные звезды* **22**, 93 (1983).
40. Шанкс и др. (T. Shanks, L.M. Hogarth, and N. Metcalfe), *MNRAS* **484**, L64 (2019).
41. Щиголев Б.М., *Математическая обработка наблюдений* (М.: Наука, 1969), 248 с.
42. Яясингхе и др. (T. Jayasinghe, K.Z. Stanek, C.S. Kochanek, B.J. Shappee, T.W.-S. Holoiien, Todd A. Thompson, J.L. Prieto, Dong Subo, et al.), *MNRAS* **485**, 961 (2019).