

ОРБИТАЛЬНОЕ МАНЕВРИРОВАНИЕ В ОКРЕСТНОСТЯХ КОЛЛИНЕАРНЫХ ТОЧЕК ЛИБРАЦИИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СИЛ СВЕТОВОГО ДАВЛЕНИЯ

© 2021 г. Д. В. Шиманчук^{1*}, А. С. Шмыров¹, В. А. Шмыров¹

¹Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия

Поступила в редакцию 02.07.2021 г.

После доработки 02.07.2021 г.; принята к публикации 05.08.2021 г.

Исследуется управляемое движение космического аппарата с солнечным парусом в межпланетном космическом пространстве вблизи окрестностей коллинеарных точек либрации L_1 и L_2 системы Солнце–Земля. Для описания орбитального движения используются уравнения круговой ограниченной задачи трех тел и их модификации. В работе представлена методика построения законов управления орбитальным движением и дана оценка области управляемости при решении задачи стабилизации или длительного удержания космического аппарата в окрестности L_1 и L_2 . Эта методика основана на решении задачи управления для линеаризованной модели уравнений орбитального движения и перенесения результатов на нелинейный случай. Такая методика построения управлений расширяет возможности как при решении задач стабилизации движения, так и при решении задач маневрирования в окрестности коллинеарной точки либрации. Для космического аппарата с солнечным парусом дана оценка области управляемости, представлены траектории возможного движения космического аппарата, которые обеспечиваются ориентацией солнечного паруса, при перелете из окрестности коллинеарной точки либрации. Именно в данных областях космического пространства, ввиду относительно небольшой величины силы гравитации, сила светового давления может иметь существенную эффективность. В качестве примера рассмотрена модель космического аппарата с солнечным парусом, парусность которого соответствует аппарату из реализованного проекта IKAROS и на порядок меньше парусности аппарата стандарта CubeSat из реализованного проекта LightSail-2.

Ключевые слова: ограниченная задача трех тел, точка либрации, солнечный парус, управляемое движение, инвариантное многообразие, маневрирование.

DOI: 10.31857/S0320010821100077

ВВЕДЕНИЕ

Использование окрестности коллинеарной точки либрации (L_1 или L_2) системы Солнце–Земля в межпланетном космическом пространстве Земли уже давно имеет практическое значение в связи с проектами, реализуемыми NASA и ESA (ISEE-3, SOHO, WIND, ACE, Genesis и т.д.). При этом для корректировки и управления движением используются различные системы двигателей. В работе будем рассматривать движение космического аппарата (КА) под действием сил светового давления.

Идея использования солнечного паруса для удержания КА в окрестности коллинеарной точки либрации была сформулирована в работе Буклесса, Макиннеса (2008). В этой работе были изучены возможности использования изменения площади паруса, а также изменение ориентации

паруса для удержания космического аппарата на квазипериодической орбите. В работе (Шиманчук и др., 2020) рассматривалась задача удержания КА вблизи инвариантного многообразия в окрестности коллинеарной точки либрации. В данной работе мы приводим результаты численного исследования орбитального маневрирования с использованием солнечного паруса, которое позволяет оценить возможности такого управления и охарактеризовать область управляемости.

Под солнечным парусом будем понимать КА с установленной и развернутой на нем отражающей поверхностью, которая, поглощая и отражая солнечный свет, сообщает КА управляющее ускорение.

Движение КА с солнечным парусом рассматривается в межпланетном космическом пространстве во вращающейся геоцентрической системе координат в рамках хилловского приближения круговой

* Электронный адрес: d.shimanchuk@spbu.ru

ограниченной задачи трех тел Солнце–Земля–КА (Шмыров, 2005).

ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

В качестве основной динамической модели движения для построения законов управления ориентацией солнечного паруса и численного моделирования будем использовать упрощенные уравнения, так называемое хилловское приближение уравнений движения. Эти уравнения получаются из круговой ограниченной задачи трех тел, если перейти от барицентрической вращающейся системы координат к относительной вращающейся системе координат с началом в центре массы Земли и оставить два первых члена в разложении солнечного потенциала. Такой прием применил Хилл в своей теории движения Луны.

Уравнения управляемого движения КА во вращающейся системе координат при использовании хилловского приближения для солнечного потенциала могут быть представлены в виде (Шмыров, 2005)

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + y_1, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + y_2, \\ \dot{x}_3 = y_3, \\ \dot{y}_1 = -\frac{3x_1}{\|\mathbf{x}\|^3} + 2x_1 + y_2 + u_1, \\ \dot{y}_2 = -\frac{3x_2}{\|\mathbf{x}\|^3} - x_2 - y_1 + u_2, \\ \dot{y}_3 = -\frac{3x_3}{\|\mathbf{x}\|^3} - x_3 + u_3, \end{cases} \quad (1)$$

где $\mathbf{x} = (x_1; x_2; x_3)$ — вектор координат КА, $\mathbf{y} = (y_1; y_2; y_3)$ — вектор сопряженных импульсов, центр инерции Земли совпадает с началом системы координат, а ось Ox_1 направлена вдоль оси, соединяющей центры масс Земли и Солнца. $\mathbf{u} = (u_1; u_2; u_3)$ — вектор управляющего воздействия. В случае, когда $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, будем иметь неуправляемую систему (1), которой будет отвечать неуправляемое движение. В принятой модели единицы времени и расстояния выбраны таким образом, что единица расстояния приблизительно равна 10^{-2} а.е., а единица времени — 58.0916 сут (год, деленный на 2π). Точки либрации L_1 и L_2 во вращающейся системе неподвижны и имеют координаты $\mathbf{x}^* = (1; 0; 0)$, $\mathbf{y}^* = (0; 1; 0)$ и $\mathbf{x}^{**} = (-1; 0; 0)$, $\mathbf{y}^{**} = (0; -1; 0)$ соответственно.

Неуправляемая система (1) — гамильтонова с Гамильтонианом

$$H = \frac{\|\mathbf{y}\|^2}{2} - \frac{3}{\|\mathbf{x}\|} - \frac{3x_1^2}{2} + \quad (2)$$

$$+ \frac{\|\mathbf{x}\|^2}{2} + x_2 y_1 - x_1 y_2.$$

Гамильтониан (2) на траекториях движения неуправляемой системы (1) сохраняет свое значение, т.е. является интегралом для системы (1). Это свойство можно использовать для оценки точности численного интегрирования.

Система линеаризованных уравнений неуправляемой системы (1) в окрестности коллинеарной точки либрации L_1 имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + y_1, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + y_2, \\ \dot{x}_3 = y_3, \\ \dot{y}_1 = 8(x_1 - 1) + (y_2 - 1), \\ \dot{y}_2 = -4x_2 - y_1, \\ \dot{y}_3 = -4x_3, \end{cases} \quad (3)$$

а в окрестности L_2

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + y_1, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + y_2, \\ \dot{x}_3 = y_3, \\ \dot{y}_1 = 8(x_1 + 1) + (y_2 + 1), \\ \dot{y}_2 = -4x_2 - y_1, \\ \dot{y}_3 = -4x_3. \end{cases} \quad (4)$$

Матрицы неуправляемых линеаризованных систем (3), (4) имеют одинаковый спектр (Шмыров, 2005):

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= \pm\sqrt{1 + 2\sqrt{7}} = \pm l, \\ \lambda_{3,4} &= \pm i\sqrt{2\sqrt{7} - 1} = \pm i\omega_e, \\ \lambda_{5,6} &= \pm 2i = \pm i\omega_n. \end{aligned}$$

Из положительности собственного значения $\lambda_1 = \sqrt{1 + 2\sqrt{7}}$ следует неустойчивость координат точек либрации L_1, L_2 , т.е. координаты коллинерных точек либрации — неустойчивые положения равновесия типа седло, центр, центр.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Коллинеарная точка либрации является неустойчивой по Ляпунову (Маркеев, 1978). Поэтому если требуется обеспечить длительное пребывание КА в окрестности точки либрации, то необходимо решать задачу стабилизации орбитального движения (Шмыров, 2005). С другой стороны, неустойчивость точки либрации может быть использована как положительный фактор при задаче маневрирования небесного тела в околоземном космическом пространстве (Шмыров и др., 2015; Шмыров,

Шиманчук, 2015). Такие задачи возможны, например, при разработке способов противодействия астероидно-кометной опасности. Ударный управляемый объект перемещается в окрестность коллинеарной точки либрации и удерживается там длительное время. Затем, при приближении к Земле опасного астероида или кометы, этот объект отправляется на перехват. Из-за неустойчивости такой маневр можно реализовать с помощью малых управляющих воздействий (в частности, солнечного паруса).

В этом случае и возникает задача исследования движения солнечного паруса в межпланетном космическом пространстве Земли при использовании окрестностей коллинеарных точек либрации L_1 и L_2 .

Пусть солнечный парус с заданными характеристиками (m — масса солнечного паруса, S — его площадь) находится в окрестности коллинеарной точки либрации L_1 или L_2 с начальными данными $\mathbf{x}_0 = (x_{10}, x_{20}, x_{30})$, $\mathbf{y}_0 = (y_{10}, y_{20}, y_{30})$. Требуется дать представление о возможностях маневрирования и движения солнечного паруса в зависимости от его ориентации и характеристик в межпланетном космическом пространстве Земли.

Исследуется вопрос возможностей солнечного паруса в задаче управляемого движения КА в межпланетном космическом пространстве окрестности коллинеарных точек либрации L_1 и L_2 . При этом очень важно иметь качественную характеристику траекторий орбитального движения в окрестности точки либрации, по которой можно судить о перспективах дальнейшего движения — уход в околоземное пространство, переход на гелиоцентрическое движение или длительное пребывание в окрестности точки либрации. Такой характеристикой может служить текущее значение специальной функции от фазовых переменных (координат и сопряженных импульсов) — “функции опасности”. Эта функция строится на основе линейного приближения. Мы провели численные исследования, из которых видно, что эта характеристика остается справедливой и в нелинейном случае.

ПРИНЦИП ПОСТРОЕНИЯ УПРАВЛЯЕМОГО ДВИЖЕНИЯ

Важной характеристикой поведения решения как систем (3), (4), так и самой нелинейной системы (1) в окрестности коллинеарной точки либрации L_1 или L_2 , является линейная форма фазовых переменных — функция опасности (Шмыров и др., 2015; Шмыров, Шиманчук, 2015; Поляхова и др., 2018; Шиманчук, Шмыров, 2013):

$$d_1 = \mathbf{a}_1 \mathbf{z},$$

где

$$\mathbf{a}_1 = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{l^2+3}{l}\right)^2 + 4}} \times \left(l^2 + 5; \frac{l^2-3}{l}; 0; \frac{l^2+3}{l}; 2; 0 \right)$$

— собственный вектор-строка, соответствующий собственному значению l , $\mathbf{z} = (x_1 \mp 1; x_2; x_3; y_1; y_2 \mp 1; y_3)$ — вектор-столбец, где верхний знак (нижний знак) соответствует окрестности коллинеарной точки либрации L_1 (L_2). Вектор \mathbf{a}_1 определяется с точностью до множителя, для определенности полагаем, что первая, четвертая и пятая компоненты удовлетворяют условиям:

$$a_{11} > 0, \quad a_{14}^2 + a_{15}^2 = 1. \quad (5)$$

На траекториях неуправляемой линеаризованной системы (3) и (4) функция опасности как функция времени имеет вид

$$d_1(t) = ce^{lt},$$

где c — действительное число, определяемое начальными данными.

У линейных неуправляемых систем уравнений (3) и (4) имеется инвариантное 5-мерное многообразие, заполненное ограниченными траекториями, асимптотически приближающимися к двухчастотным колебаниям с частотами ω_e и ω_n . Это многообразие, определяемое уравнением

$$d_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0.$$

В общем случае для неуправляемой нелинейной системы (1) знак функции опасности определяет направление ухода КА из окрестности коллинеарной точки либрации L_1 к Земле или к Солнцу, а из окрестности коллинеарной точки либрации L_2 к Земле или от направления к Земле. Этот результат получен из численных экспериментов.

Для управляемой линеаризованной системы уравнений движения (3) поведение функции опасности d_1 на траекториях описывается уравнением

$$\dot{d}_1 = ld_1 + a_{14}u_1 + a_{15}u_2. \quad (6)$$

Уравнение (6) позволяет строить управления по методу оптимального демпфирования функции опасности. Эти управления могут использоваться как для стабилизации (Шмыров, 2005; Шиманчук и др., 2020), так и для маневрирования (Шмыров и др., 2015; Шмыров, Шиманчук, 2015; Поляхова и др., 2018; Шиманчук, Шмыров, 2013).

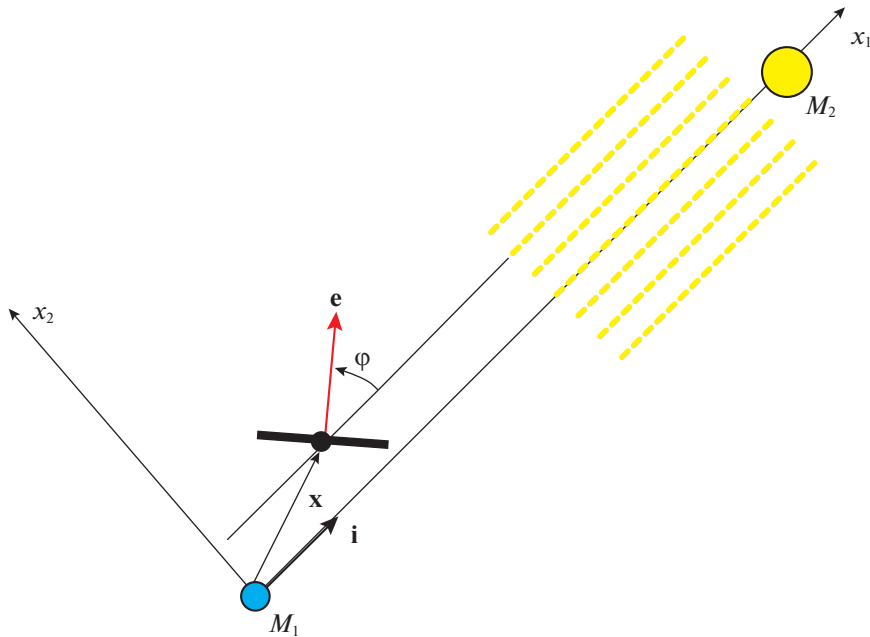


Рис. 1. Солнечный парус во вращающейся системе координат $Oxyz$.

УПРАВЛЯЕМОЕ ДВИЖЕНИЕ С ПОМОЩЬЮ СИЛ СВЕТОВОГО ДАВЛЕНИЯ

Как видно из линеаризованных уравнений (3) и (4), а также из численного исследования (Шиманчук и др., 2020), поведение нормальной (к плоскости эклиптики) составляющей движения носит колебательный характер. Поэтому основное внимание мы обратим на орбитальное движение в плоскости эклиптики. Именно здесь и проявляются свойства неустойчивости, позволяющие существенно изменять траектории орбитального движения с помощью малых управляющих воздействий. В связи с этим мы предполагаем, что солнечный парус движется таким образом, что орт вектора нормали паруса \mathbf{e} все время параллелен плоскости эклиптики. В этом случае управляющее ускорение, создаваемое направленным потоком фотонов от Солнца, также будет лежать в плоскости, параллельной плоскости эклиптики. Отраженный и поглощенный потоки посредством солнечного паруса сообщают небесному телу ускорение, которое определяется по формуле

$$-2k \frac{pS}{m} \langle \mathbf{i}, \mathbf{e} \rangle^2 \mathbf{e} - (1 - k) \frac{pS}{m} \langle \mathbf{i}, \mathbf{e} \rangle \mathbf{i},$$

где p — давление солнечного света; $\langle *, * \rangle$ — операция скалярного произведения векторов; k — коэффициент отражающей способности паруса, удовлетворяющий ограничениям $0 \leq k \leq 1$ (при $k = 1$ имеем случай идеально отражающей поверхности паруса, при $k = 0$ — случай абсолютно черной по-

верхности); \mathbf{i} — орт направления от Земли к Солнцу (рис. 1).

В таком случае можно определить компоненты вектора управления, создаваемого солнечным парусом:

$$\begin{aligned} u_1 &= -2k \frac{pS}{m} \cos^3 \varphi - (1 - k) \frac{pS}{m} \cos \varphi, \\ u_2 &= -2k \frac{pS}{m} \cos^2 \varphi \sin \varphi, \\ u_3 &= 0, \end{aligned} \quad (7)$$

где при условии $k = \text{const}$ имеем один управляющий параметр φ — угол между векторами \mathbf{i} и \mathbf{e} . Угол φ при движении солнечного паруса в достаточно малой окрестности точки либрации можно принять равным углу между направлением на Солнце и вектором нормали паруса.

Следует заметить, что реализация закона управления (7) отвечает плоскому развороту паруса вокруг нормали к плоскости эклиптики. Если парус обладает односторонней отражающей поверхностью, то, согласно (7), управляющий параметр лежит в отрезке $\varphi \in [-\pi/2, \pi/2]$. При $\varphi = \pm\pi/2$ силы светового давления на КА не действуют.

Исследуем вопрос возможностей управляемого движения КА с солнечным парусом. Движению к Солнцу из окрестности L_1 соответствует траектория с $d_1 > 0$, а движению к Земле — траектория с $d_1 < 0$. Движению к Земле из окрестности L_2 соответствует траектория с $d_1 > 0$, а движению от направления к Земле — траектория с $d_1 < 0$. Для

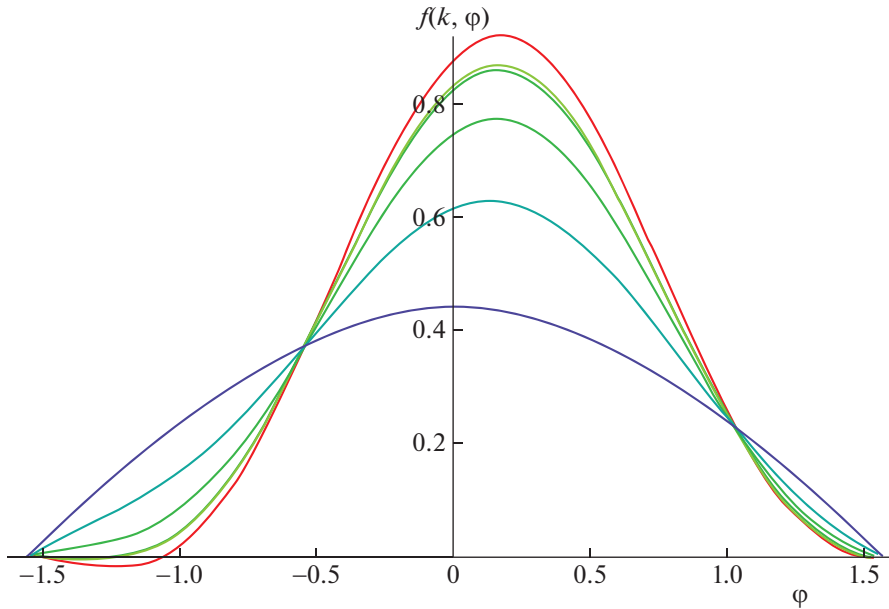


Рис. 2. Графики функции $f(k, \varphi)$: $k = 1$ (красная кривая), $k = 0.9, 0.88, 0.7, 0.4$ (зеленые кривые), $k = 0$ (синяя кривая).

производной функции опасности (6), учитывая (5) и (7), тогда можем записать

$$\dot{d}_1 = ld_1 - 2\frac{pS}{m}f(k, \varphi), \quad (8)$$

где $f(k, \varphi) = \cos \varphi \left[k \cos \varphi \sin(\varphi + \varphi_0) + (1 - k) \times \frac{a_{14}}{2} \right]$, $\varphi_0 = \arctg \frac{l^2 + 3}{2l} \approx 1.076$ рад.

При решении задачи удержания (стабилизации) значение функции опасности не слишком отличается от нуля. Поэтому управляющий параметр φ выбираем так, чтобы правая часть (8) была положительной, если $d_1 < 0$, и отрицательной, если $d_1 > 0$. Однако сделать это не всегда возможно. Мы опишем область фазового пространства, в которой этот выбор возможен. Эта область при-

ближенно описывает область управляемости при решении задачи удержания и дает представление о возможностях солнечного паруса.

Прежде всего отыщем максимум и минимум функции $f(k, \varphi)$ по φ при различных значениях k (см. табл. 1).

Из рис. 2 следует, что эффективность управления в области $d_1 < 0$ уменьшается при уменьшении коэффициента k , т.е. сама возможность управления в области $d_1 < 0$ обеспечивается достаточно высокой отражающей способностью паруса, поскольку при $k \leq k_{cr} \approx 0.88$ функция $f(k, \varphi) \geq 0$ для любого $\varphi \in [-\pi/2, \pi/2]$. Параметр k , если позволяют отражающие свойства паруса, можно использовать как управляющий параметр совместно или при фиксированном значении угла φ . Однако можно заметить, что имеются такие значения угла φ : -0.537866 и 1.03293 , для которых $f(k, \varphi)$ равняется соответственно 0.377847 и 0.225398 при любом значении $k \in [0, 1]$, что характеризует ограниченность использования только отражающей способности солнечного паруса при данных значениях угла ориентации.

Таблица 1. Значения угла φ , которые обеспечивают экстремум функции $f(k, \varphi)$ (α — максимум, β — минимум), при фиксированных значениях отражающей способности паруса k

N	k	α	β
1	1	0.168016	-1.24375
2	0.9	0.165262	-1.30361
3	0.88	0.164649	$\pm\pi/2, -1.3232$
4	0.7	0.157865	$\pm\pi/2$
5	0.4	0.137104	$\pm\pi/2$
6	0	0	$\pm\pi/2$

Пусть рассматривается случай движения паруса в окрестности точки либрации L_1 или L_2 , тогда для удержания паруса в области $d_1 < 0$ из равенства (8) и условия оптимального демпфирования функции опасности получаем

$$ld_1 - 2\frac{pS}{m}f(1, \beta) > 0. \quad (9)$$

Это условие может быть обеспечено, если отражающая способность паруса $k > k_{cr}$, иначе управ-

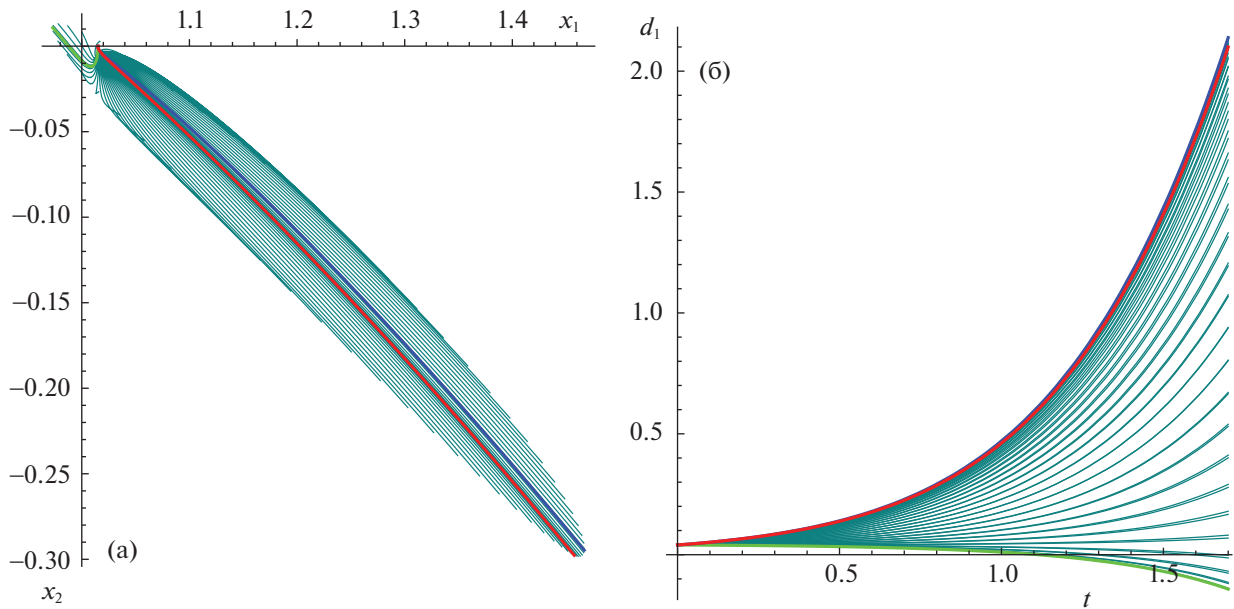


Рис. 3. Траектории движения солнечного паруса из окрестности L_1 (а) и график значений функции опасности (б) с начальными данными (11) при $d_1 > 0$ на промежутке времени около 100 сут.

ление с целью удержания в области $d_1 < 0$ не представляется возможным.

Аналогично для удержания солнечного паруса в области $d_1 > 0$ можно получить

$$ld_1 - 2\frac{pS}{m}f(1, \alpha) < 0. \quad (10)$$

Если условия (9), (10) не выполняются для α и β , то они не выполняются для любого другого угла φ , что во многом обусловлено начальными данными и характеристикой солнечного паруса — парусностью S/m . В этом случае солнечный парус будет просто уходить из окрестности коллинеарной точки либрации L_1 к Земле или к Солнцу, для окрестности L_2 — от направления к Земле или к Земле.

Из условий (9) и (10) можно получить оценку снизу и сверху для значения функции опасности, а следовательно, и оценку области управляемости для задачи стабилизации орбитального движения в окрестности коллинеарной точки либрации L_1 или L_2 :

$$d_1^{\min} \leq d_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq d_1^{\max},$$

где $d_1^{\min} = \frac{2pS}{ml}f(1, \beta)$, $d_1^{\max} = \frac{2pS}{ml}f(1, \alpha)$. Ясно, что в случае $k < k_{\text{cr}}$ можно принять $d_1^{\min} = 0$. Такой анализ случая идеально отражающей поверхности паруса в работе (Шиманчук и др., 2020) был использован для построения законов управления орбитальным движением паруса с целью его удержания в окрестности точки либрации L_1 .

Далее, на примере паруса с идеально отражающей способностью приведем численные примеры, которые демонстрируют возможности управления орбитальным движением солнечного паруса.

ЧИСЛЕННЫЕ ПРИМЕРЫ ДВИЖЕНИЯ КА С СОЛНЕЧНЫМ ПАРУСОМ

Проведем компьютерное моделирование движения солнечного паруса с идеально отражающей способностью в окрестности коллинеарных точек либрации L_1 и L_2 . Для моделирования движения используем параметры солнечного паруса $m = 300$ кг, $S = 225$ м², которым будет соответствовать значение парусности, равное 7.5 см²/г. Это на порядок меньше парусности солнечного паруса из реализованного проекта LightSail-2, для которого она равна 64 см²/г.

Результаты численного моделирования управляемого движения солнечного паруса с начальными данными

- для окрестности L_1 :

$$\begin{aligned} x_{10} &= 1.015, & x_{20} &= 0, & x_{30} &= 0, & (11) \\ y_{10} &= 0, & y_{20} &= 1, & y_{30} &= 0 & (d_1 > 0), \\ x_{10} &= 0.9998, & x_{20} &= 0, & x_{30} &= 0, \\ y_{10} &= 0, & y_{20} &= 1, & y_{30} &= 0 & (d_1 < 0); \end{aligned}$$

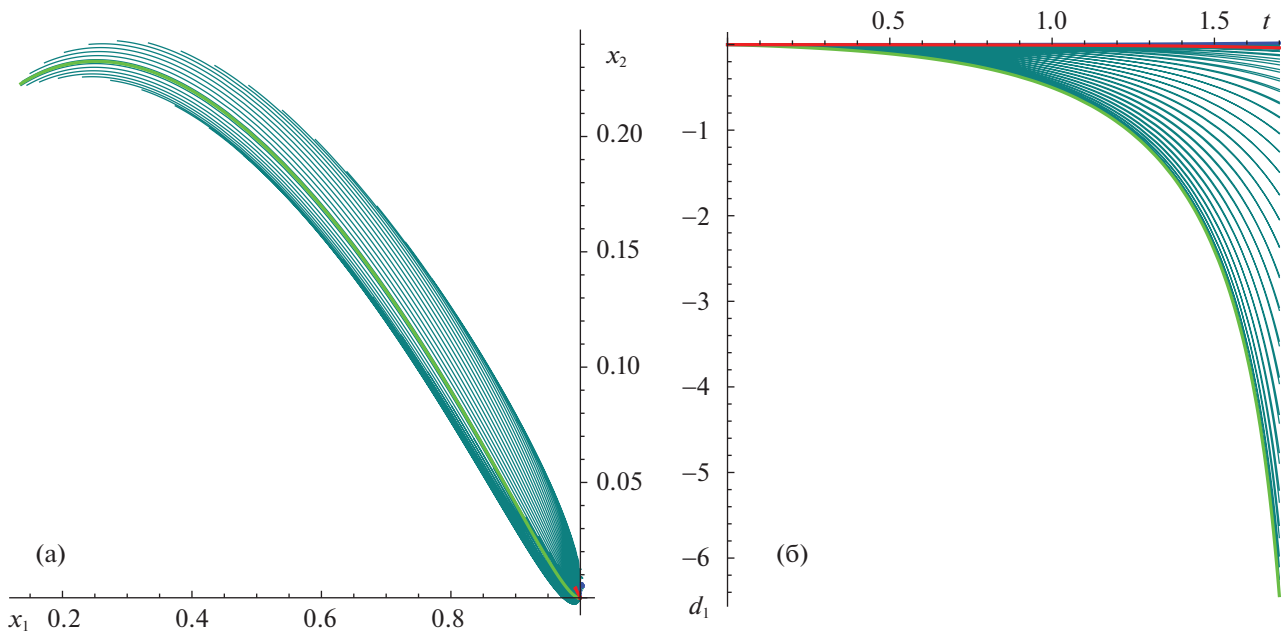


Рис. 4. Траектории движения солнечного паруса из окрестности L_1 (а) и график значений функции опасности (б) с начальными данными (11) при $d_1 < 0$ на промежутке времени около 100 сут.

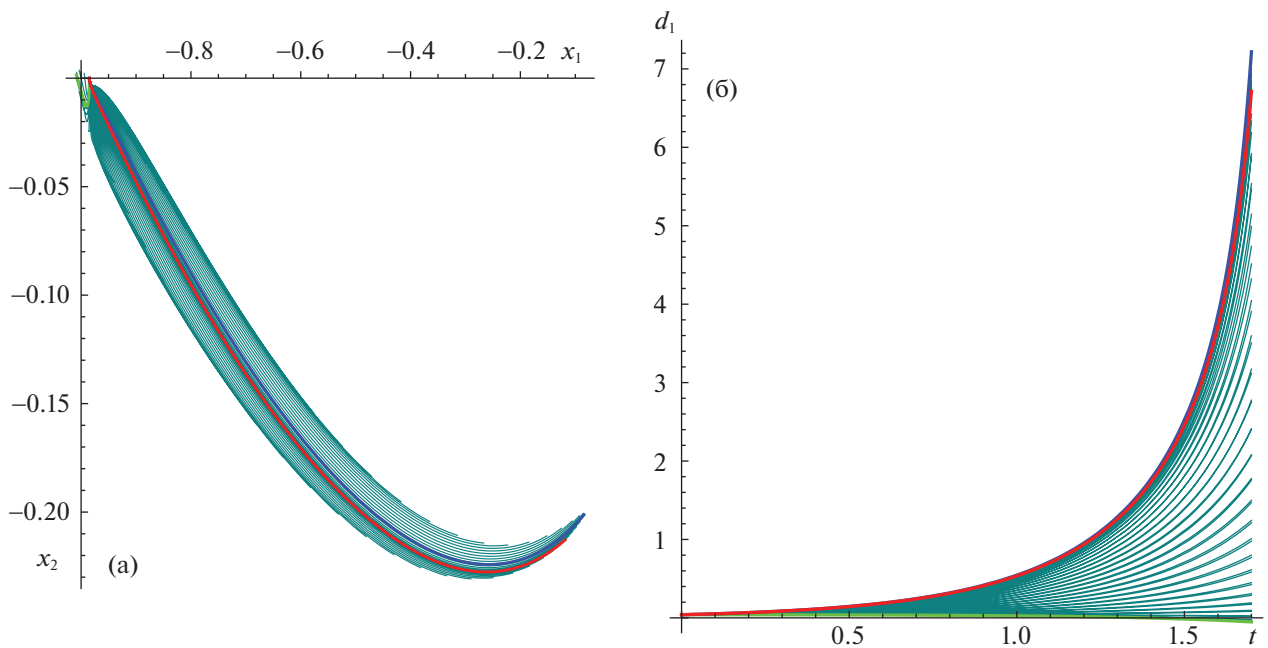


Рис. 5. Траектории движения солнечного паруса из окрестности L_2 (а) и график значений функции опасности (б) с начальными данными (12) при $d_1 > 0$ на промежутке времени около 100 сут.

- для окрестности L_2 :

$$\begin{aligned}
 x_{10} &= -0.985, & x_{20} &= 0, & x_{30} &= 0, & (12) \\
 y_{10} &= 0, & y_{20} &= -1, & y_{30} &= 0 & (d_1 > 0), \\
 x_{10} &= -1.0002, & x_{20} &= 0, & x_{30} &= 0, \\
 y_{10} &= 0, & y_{20} &= -1, & y_{30} &= 0 & (d_1 < 0)
 \end{aligned}$$

при $\varphi \in [-\pi/2, \pi/2)$ на промежутке времени порядка ста земных суток месяца приведены на рис. 3–6, где также проиллюстрированы значения функции опасности на траекториях движения. Выделенные на рисунках красным цветом кривые относятся к неуправляемому движению КА, зеленым — к движению КА при $\varphi = \alpha$, синим — к движению КА

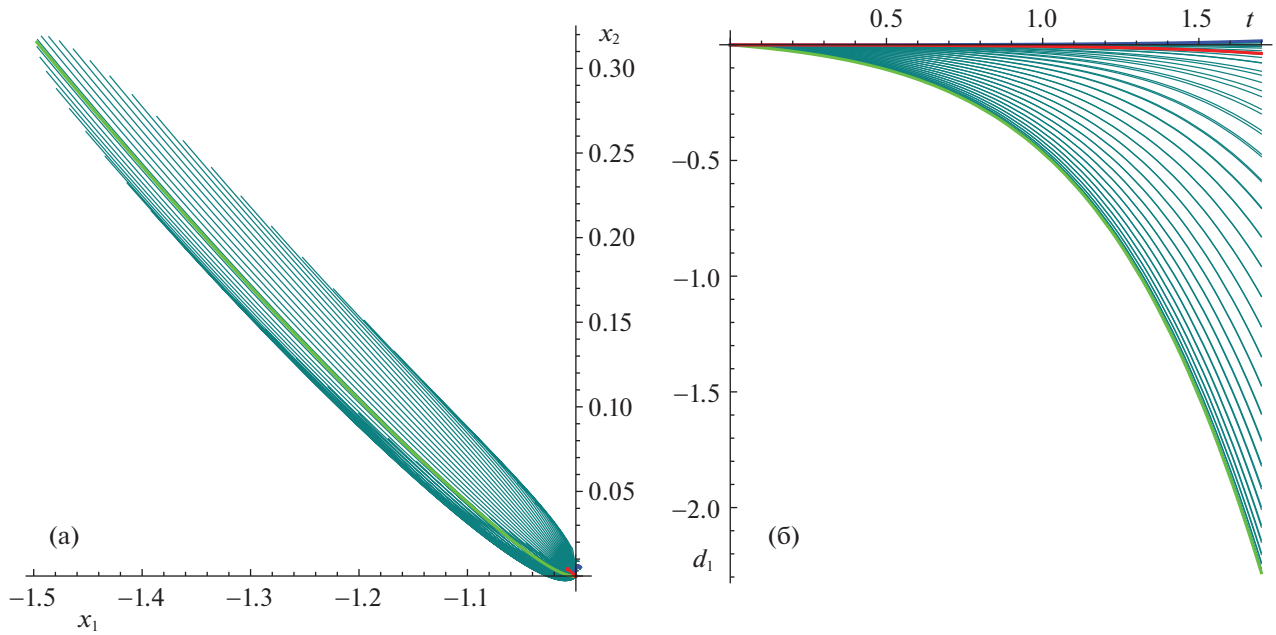


Рис. 6. Траектории движения солнечного паруса из окрестности L_2 (а) и график значений функции опасности (б) с начальными данными (12) при $d_1 < 0$ на промежутке времени около 100 сут.

при $\varphi = \beta$ (см. табл. 1, случай $k = 1$). Выбор начальных данных в окрестности точки либрации с точностью до линейного приближения обусловлен областью управляемости $-0.00079 < d_1(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) < 0.04221$. Кроме этого, выбор таких начальных данных связан с близостью к границе управляемости, тогда можно сказать, что найдутся значения угла φ , для которых обеспечивается движение, при котором функция опасности меняет знак, т.е. солнечный парус не уходит в ту область, которой соответствует знак функции опасности в начальный момент времени. Также заметим, что если $\varphi = 0$ (нормаль паруса направлена на Солнце), то ускорение от солнечного паруса будет равно 6.84×10^{-6} м/с², т.е. под действием только сил светового давления КА из состояния покоя за сто суток отклонится на расстояние порядка 255.3 тыс. км.

Вопрос о том, каким образом КА оказался в точке с фазовыми координатами (11), (12), в данной работе не исследуется, формулировка идеи и возможный алгоритм решения такой задачи представлены в работе Шиманчука, Шмырова (2013).

На рис. 3 и 4 представлены траектории движения солнечного паруса из окрестности точки L_1 и соответствующие графики значений функции опасности на этих траекториях. Аналогично на рис. 5 и 6 представлены траектории движения солнечного паруса из окрестности точки L_2 и соответствующие графики значений функции опасности на траекториях. Здесь каждой траектории соответствует постоянное значение — узел равномерного разбиения рассматриваемого промежутка для управляющего

параметра ($\varphi \in [-\pi/2, \pi/2]$), в каждом из примеров строятся 64 траектории).

Заметим также, что совместно с углом ориентации паруса φ при движении КА следует рассматривать управляющий параметр τ , который соответствует моменту времени переориентации паруса. Так, пусть для первого и второго численных примеров (рис. 3, 4) КА на промежутке времени τ , приблизительно равном пятидесяти суткам, совершал неуправляемое движение, а далее происходит переориентация паруса, согласно уже проведенным ранее численным экспериментам. На рис. 7 и 8 представлены результаты такого моделирования.

Численные примеры демонстрируют возможности управляемого движения КА с солнечным парусом при фиксированном значении управляющего параметра φ , что и позволяет перейти к решению вопроса управляемого движения КА с солнечным парусом с целью удержания КА в окрестности точки либрации или решения задач, связанных с маневрированием в межпланетном космическом пространстве Земли. Также численное исследование подтверждает принятую гипотезу о соответствии поведения функции опасности и траектории орбитального движения — когда функция опасности возрастает, наблюдается переход к гелиоцентрическому движению из окрестности L_1 и к геоцентрическому движению из окрестности L_2 . Если значение функции опасности убывает, то это соответствует переходу к геоцентрическому движению из окрестности L_1 и к гелиоцентрическому движению из окрестности L_2 .

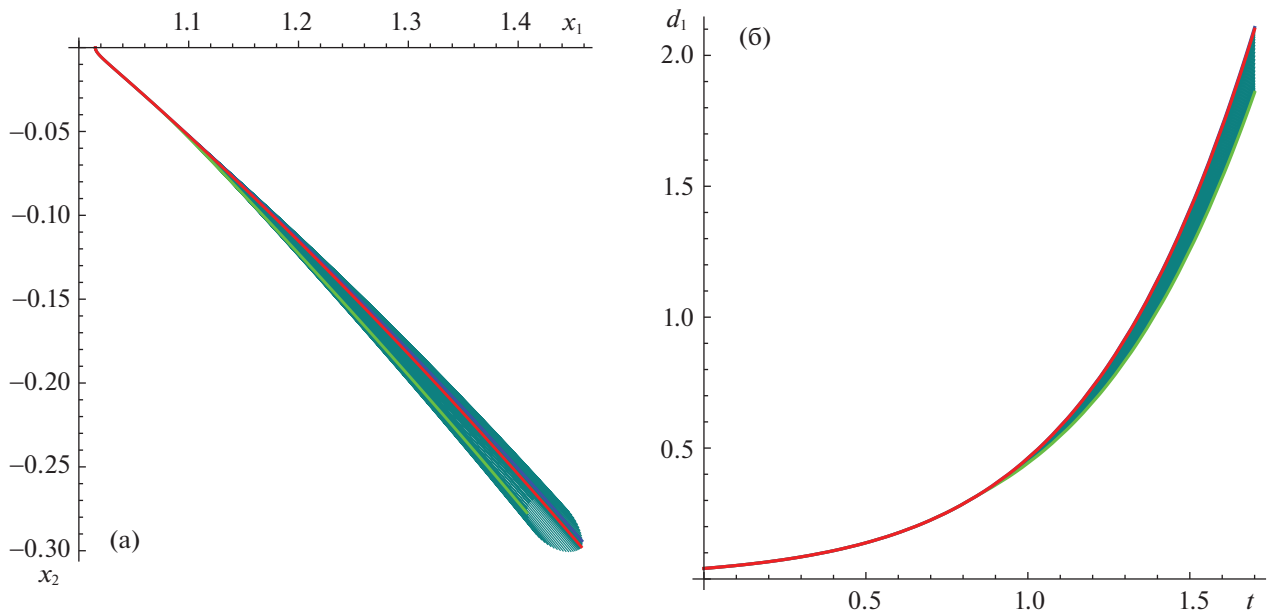


Рис. 7. Траектории движения солнечного паруса из окрестности L_1 (а) и график значений функции опасности (б) с начальными данными (11) при $d_1 > 0$ на промежутке времени около 100 сут.

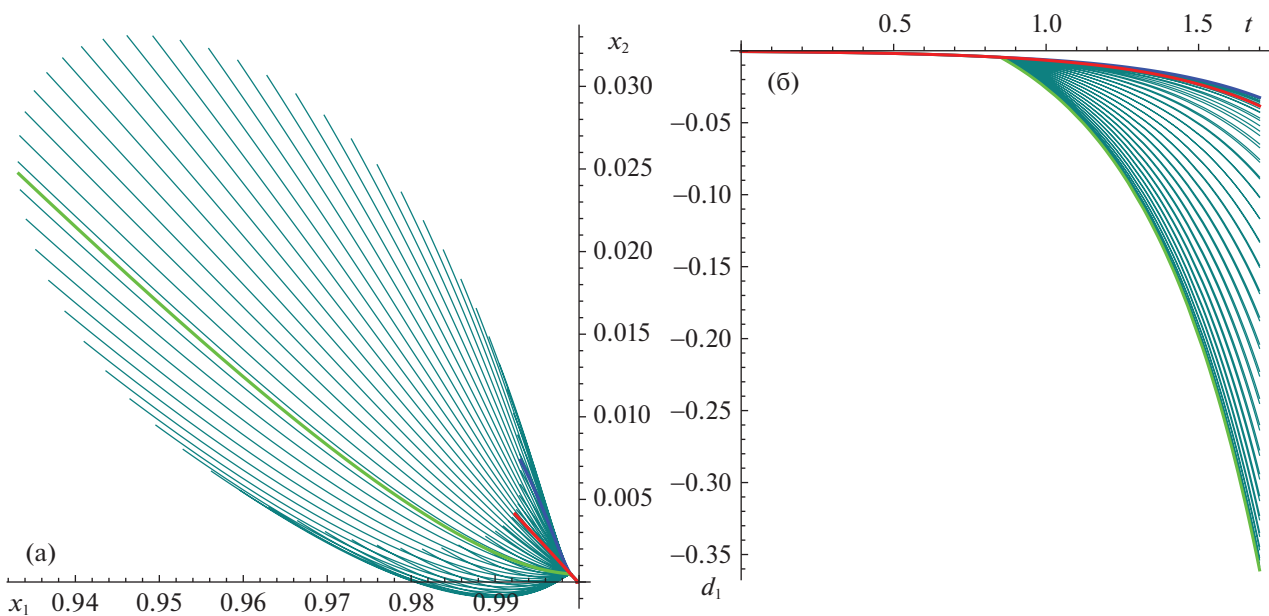


Рис. 8. Траектории движения солнечного паруса из окрестности L_1 (а) и график значений функции опасности (б) с начальными данными (11) при $d_1 < 0$ на промежутке времени около 100 сут.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложенные законы управления движением КА с солнечным парусом, построенные для модели хилловского приближения круговой ограниченной задачи трех тел, показали в ходе численных экспериментов свою эффективность и в более общей модели движения — круговой ограниченной задаче трех тел (Шиманчук и др., 2020). Эффективность управления для задачи удержания солнечно-

го паруса существенно выше в области $d_1 > 0$ по сравнению с управлением в области $d_1 < 0$. При этом такая возможность и максимальная эффективность маневрирования в области $d_1 < 0$ обеспечиваются достаточно большой отражающей способностью паруса k . Показано, что при $k < k_{cr} \approx 0.88$ такая возможность теряется, т.е. парус с невысокой отражающей способностью не может обеспечить движение “против солнечного ветра”.

Предложенная методика управления ориентацией с различной отражающей способностью солнечного паруса позволяет решать как задачи удержания солнечного аппарата в окрестностях коллинеарных точек либрации, так и задачи ухода из этих окрестностей. Задача удержания или стабилизации заключается в обеспечении близости в фазовом пространстве КА к инвариантному многообразию. При решении задачи маневрирования в межпланетном космическом пространстве Земли из условия оптимального демпфирования функции опасности определяется направление скорейшего выхода из окрестности точки либрации (для представленных численных примеров движения КА с солнечным парусом эти направления определяются значениями угла ориентации — α и β). Такой подход был использован в работе Шмырова и др. (2015). В настоящем исследовании для оценки области достижимости на конечном промежутке времени рассмотрены движения при фиксированных различных значениях угла ориентации солнечного паруса.

Приведенное численное исследование показало, что силы светового давления могут существенно повысить эффективность орбитального маневрирования в окрестности коллинеарной точки либрации системы Солнце—Земля. Это исследование позволяет сделать вывод: знак специальной функции — функции опасности в окрестности точки либрации может служить в качестве характеристики орбитального движения. Этот теоретический результат для линеаризованных уравнений

остаётся справедливым и для нелинейной системы уравнений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Буклесс, Макиннес (J. Bookless and C. McInnes), *Acta Astronautica* **62**, 159 (2008).
2. Маркеев А.П., *Точки либрации в небесной механике и космодинамике* (М.: Наука, 1978).
3. Поляхова и др. (E. Polyakhova, A. Shmyrov, and V. Shmyrov), *AIP Conf. Proceed.* (Ed. E.V. Kustova, G.A. Leonov, M.P. Yushkov, N.F. Morosov, M.A. Mekhonoshina, St. Petersburg, AIP, 2018).
4. Шиманчук Д.В., Шмыров А.С., *Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 10: Прикладная математика, информатика, процессы управления* **2**, 76 (2013).
5. Шиманчук Д.В., Шмыров А.С., Шмыров В.А., *Письма в Астрон. журн.* **46**, 193 (2020) [D.V. Shymanchuk, et al., *Astron. Lett.* **46**, 185 (2020)].
6. Шмыров В.А., *Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления* **2**, 193 (2005).
7. Шмыров, Шиманчук (A. Shmyrov and D. Shymanchuk), *Inter. Conf. on Mechanics — Seventh Polyakhov's Reading* (Ed. A.A. Tikhonov, St. Petersburg, IEEE, 2015).
8. Шмыров и др. (A. Shmyrov, D. Shymanchuk, and L. Sokolov), *Inter. Conf. on "Stability and Control Processes" in Memory of V.I. Zubov, SCP 2015 — Proceedings* (Ed. L.A. Petrosyan, A.P. Zhabko, St. Petersburg, IEEE, 2015), p. 129.