ПИСЬМА В АСТРОНОМИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2021, том 47, № 11, с. 812–820

К ВОПРОСУ ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ АСТРОЦЕНТРИЧЕСКИХ КООРДИНАТ В ПЛАНЕТНОЙ ЗАДАЧЕ

Д. В. Микрюков[1*]

[1] *Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия*

Поступила в редакцию 05.10.2021 г.
После доработки 27.10.2021 г.; принята к публикации 02.11.2021 г.

Рассматриваются и сравниваются два способа определения астроцентрических координат Пуанкаре в планетной задаче. Показано, что после исключения центра инерции оба способа приводят к одной и той же системе уравнений планетного движения. Даются формулы перехода от оскулирующих элементов в системе координат Пуанкаре к обычным астроцентрическим оскулирующим элементам. Построенный в работе аналитический аппарат пригоден для практического применения методов теории возмущений, в частности методов осреднения.

Ключевые слова: астроцентрические координаты, гелиоцентрические координаты, координаты Пуанкаре, планетная задача, оскулирующие элементы, канонические элементы Пуанкаре, канонические преобразования, гамильтониан.

DOI: 10.31857/S0320010821110048

1. ВВЕДЕНИЕ

Планетная задача является важным частным случаем задачи нескольких тел. Важность этой задачи была осознана еще классиками небесной механики, поставившими и изучавшими вопрос об устойчивости Солнечной системы. В связи с открытием экзопланетных систем, в которых могут наблюдаться самые разнообразные орбитальные и массовые параметры, планетная задача приобрела естественное развитие и продолжает оставаться актуальной.

Малость планетных масс по сравнению с массой центральной звезды делает теорию возмущений одним из наиболее эффективных средств изучения эволюции планетных орбит. Для применения методов этой теории требуется получить удобную форму уравнений планетного движения. Данная форма подразумевает исключение центра инерции, т.е. cведéние записанной в абсолютных координатах исходной системы уравнений движения к системе уравнений с $3N$ степенями свободы (здесь N — число планет, вращающихся вокруг главной звезды). Исключение центра инерции осуществляется путем перехода к подходящей системе координат. Существуют две такие системы — координаты Якоби и координаты Пуанкаре (Шарлье, 1966). Несмотря на существенные отличия, обе системы координат широко применяются в исследованиях, посвященных планетной задаче.

В настоящей работе речь будет идти о системе координат Пуанкаре. Как известно, основным удобством применения координат Пуанкаре является то, что в них не требуется получать разложение возмущающей функции в ряд по степеням малых планетных масс[1]. Внимательный анализ работ, в которых применяется данная система координат (см., например, Дункан и др., 1998; Красинский, 1973; Ласкар, Робютель, 1995; Морбиделли, 2014, глава 1, раздел 1.6; Рейн и др., 2019; Родригес, Галлардо, 2005; Ферраз-Меллу и др., 2006), показывает, что для ее определения авторы используют два близких, но разных подхода. А именно, координаты Пуанкаре в данных исследованиях определяются с помощью двух *различных* преобразований исходных абсолютных координат. Насколько известно автору, этому обстоятельству нигде в современной литературе не уделяется внимания. Обычно исследователи определяют координаты Пуанкаре некоторым преобразованием абсолютных координат (одним из указанных двух), показывают, каким

[*] Электронный адрес: d.mikryukov@spbu.ru

[1] Координаты Якоби, в отличие от координат Пуанкаре, требуют разложения возмущающего потенциала системы в ряд по степеням планетных масс. Впрочем, как справедливо отмечает Шарлье (1966, глава VI, § 3), при построении планетных теорий данный недостаток координат Якоби оказывается несущественным.

образом в результате данного преобразования исключается центр инерции, и сосредотачивают все дальнейшее внимание на полученных уравнениях планетного движения. При этом часто делается утверждение, что преобразование, состоящее в переходе к координатам Якоби, является единственной альтернативой для исключения центра инерции. В связи с этим представляется полезным подробно рассмотреть вопрос определения координат Пуанкаре в планетной задаче.

В настоящей работе мы разберем и сравним два способа определения координат Пуанкаре. Мы покажем, что, несмотря на различие в методе исключения центра инерции, оба способа в конечном счете приводят к одной и той же системе уравнений планетного движения. Целесообразность такого сравнения обусловлена также тем, что при сопоставлении полученных в различных работах результатов нередко возникают путаница и несоответствие, связанные с указанной двойственностью определения координат Пуанкаре. Решением данной задачи мы надеемся внести больше ясности в теорию применения данной системы координат. Наше исследование будем выполнять таким образом, чтобы после его проведения мы получили теорию определения координат Пуанкаре в виде, удобном для применения на практике.

В основу всех построений мы положим гамильтоновы уравнения движения в абсолютных координатах. Такой подход представляется наиболее естественным, так как в качестве оскулирующих элементов почти всегда берутся канонические элементы. Можно также опираться на уравнения Лагранжа (см., например, Холшевников и др., 2001), но в этом случае, если используются канонические элементы, все равно придется при помощи преобразования Лежандра переходить к гамильтоновой формулировке планетной задачи. Данный путь перехода от уравнений Лагранжа к уравнениям Гамильтона проиллюстрирован в статье Микрюкова (2016). К сожалению, в данной статье ее автором при совершении преобразования Лежандра функции Лагранжа была допущена ошибка, приведшая в результате к неверному определению дополнительной части возмущающей функции. В нашей работе (в разделе 3) мы рассмотрим, в чем заключается данная ошибка, и приведем верные соответствующие формулы.

Для кеплеровых элементов будем использовать стандартный набор переменных: a, e, i, M, g, Ω обозначают соответственно большую полуось, эксцентриситет, наклонение, среднюю аномалию, аргумент перицентра и долготу восходящего узла. Точкой сверху и чертой сверху мы будем обозначать соответственно дифференцирование по времени и комплексное сопряжение. Мнимую единицу обозначим через $\mathfrak{i}$ и положим $\operatorname{Exp}\varphi = \exp \mathfrak{i}\varphi$ для любого комплексного φ. Для суммирования от 1 до N и для суммирования по треугольному множеству $1 \leqslant j < k \leqslant N$ будем использовать соответственно символы

$$\sum_1 \quad \text{и} \quad \sum_2 .$$

Относительно натурального числа N будет всюду считаться, что это количество планет в системе и $N \geqslant 2$.

Предполагаем, что основными единицами измерения в работе являются масса Солнца, астрономическая единица и сидерический земной год, $\mathcal{G} = 4\pi^2$. Данная система единиц является удобной не только в планетной, но и во многих других небесномеханических задачах. Ее также часто используют, например, при изучении динамической эволюции кратных звездных систем (Мельников и др., 2014).

2. ПЕРВОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ

В абсолютной инерциальной системе отсчета с началом в точке O рассмотрим движение $N+1$ материальных точек $\mathcal{Q}_0, \ldots, \mathcal{Q}_N$, имеющих массы соответственно $\mathcal{M}_0, \ldots, \mathcal{M}_N$. Будем считать, что расстояние между двумя любыми точками всегда остается больше некоторого положительного числа (бесстолкновительное конфигурационное пространство). Если

$$\mathcal{M}_0 \gg \mathcal{M}_1, \ldots, \mathcal{M}_N, \tag{1}$$

то мы получаем так называемый планетный вариант задачи нескольких тел (планетная задача). Обычно предполагается, что масса “Солнца” $\mathcal{Q}_0$ превосходит массу каждой “планеты” $\mathcal{Q}_s$, $1 \leqslant s \leqslant N$, на три и более порядков.

Если движение планетной системы изучается в канонических элементах, то исходные уравнения движения в абсолютной системе координат естественно записать в гамильтоновом виде. Гамильтониан этих уравнений, как известно, равен сумме кинетической и потенциальной энергий и имеет вид

$$\tilde{\mathcal{H}} = \sum_{k=0}^{N} \frac{\mathbf{\Pi}_k^2}{2\mathcal{M}_k} - \mathcal{G} \sum_{0 \leqslant j < k \leqslant N} \frac{\mathcal{M}_j \mathcal{M}_k}{|\boldsymbol{\rho}_j - \boldsymbol{\rho}_k|}. \tag{2}$$

Здесь абсолютные импульсы $\mathbf{\Pi}_s = \mathcal{M}_s \dot{\boldsymbol{\rho}}_s$, абсолютные координаты $\boldsymbol{\rho}_s$ задают положение точек относительно начала O, а $\mathcal{G}$ — постоянная тяготения.

В планетной задаче использование интегралов движения центра масс обычно достигается за счет введения координат Якоби или астроцентрических координат Пуанкаре (см. соответственно § 4 и § 3 гл. V руководства Шарлье, 1966). Обе системы каноничны, и каждую из них можно определить соответствующим линейным унивалентным каноническим преобразованием исходных гамильтоновых переменных $\boldsymbol{\rho}_s$, $\boldsymbol{\Pi}_s$, $0 \leqslant s \leqslant N$. Координаты Пуанкаре получаются по формулам

$$\mathbf{r}_0 = \boldsymbol{\rho}_0, \quad \mathbf{P}_0 = \sum_{k=0}^{N} \boldsymbol{\Pi}_k, \tag{3}$$
$$\mathbf{r}_j = \boldsymbol{\rho}_j - \boldsymbol{\rho}_0, \quad \mathbf{P}_j = \boldsymbol{\Pi}_j, \quad j = 1, 2, \ldots, N.$$

Как видим, старые $\boldsymbol{\rho}_s$ и новые $\mathbf{r}_s$ координаты являются простой линейной комбинацией друг друга. То же верно для старых $\boldsymbol{\Pi}_s$ и новых $\mathbf{P}_s$ импульсов.

Терминологическое замечание. В литературе для наименования координат $\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N$, участвующих в определении канонических переменных (3), используется множество близких, но различающихся терминов. Чаще всего употребляются названия “канонические относительные координаты”, “канонические относительные координаты Пуанкаре”, “гелиоцентрические координаты Пуанкаре”, “астроцентрические координаты Пуанкаре” и “астроцентрические координаты”. Будем для краткости пользоваться термином “координаты Пуанкаре”.

Выражая из (3) старые переменные через новые и подставляя их в (2), получим

$$\tilde{\mathcal{H}} = \frac{\mathbf{P}_0^2}{2\mathcal{M}_0} - \frac{\mathbf{P}_0}{\mathcal{M}_0} \sum_1 \mathbf{P}_k + \mathcal{H}, \tag{4}$$

где

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_1,$$
$$\mathcal{H}_0 = \sum_1 \left(\frac{\mathbf{P}_s^2}{2\mathcal{B}_s} - \frac{\mathcal{G}(\mathcal{M}_0 + \mathcal{M}_s)\mathcal{B}_s}{r_s} \right),$$
$$\mathcal{H}_1 = \sum_2 \left(-\frac{\mathcal{G}\mathcal{M}_j\mathcal{M}_k}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k|} + \frac{\mathbf{P}_j\mathbf{P}_k}{\mathcal{M}_0} \right),$$
$$\mathcal{B}_s = \frac{\mathcal{M}_0\mathcal{M}_s}{\mathcal{M}_0 + \mathcal{M}_s}, \quad r_s = |\mathbf{r}_s|.$$

В итоге имеем уравнения движения в новых переменных

$$\dot{\mathbf{r}}_0 = \frac{\mathbf{P}_0}{\mathcal{M}_0} - \frac{1}{\mathcal{M}_0} \sum_1 \mathbf{P}_s, \quad \dot{\mathbf{P}}_0 = 0, \tag{5}$$
$$\dot{\mathbf{r}}_s = -\frac{\mathbf{P}_0}{\mathcal{M}_0} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{P}_s}, \quad \dot{\mathbf{P}}_s = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{r}_s},$$
$$s = 1, 2, \ldots, N.$$

Важно отметить, что величина $\mathcal{H}$ зависит только от планетных координат и импульсов $\mathbf{r}_s$, $\mathbf{P}_s$ ($1 \leqslant s \leqslant N$).

Гамильтониан $\tilde{\mathcal{H}}$ не зависит от $\mathbf{r}_0$, поэтому вектор $\mathbf{P}_0$ — интеграл движения. Компоненты P_{0x}, P_{0y}, P_{0z} вектора $\mathbf{P}_0$ постоянны в процессе эволюции системы и равны своим начальным значениям

$$P_{0x}^{(0)}, \quad P_{0y}^{(0)}, \quad P_{0z}^{(0)}.$$

Основная цель введения и использования астроцентрических координат — изучение движения планет относительно Солнца (центральной звезды). При описании этого движения можно без потери общности положить $\mathbf{P}_0 = \mathbf{P}_0^{(0)} = 0$. В самом деле, вектор $\mathbf{P}_0$ с точностью до массового множителя представляет собой скорость движения барицентра системы (относительно начала O) и этот вектор никак не связан с относительным движением точек. Такой подход очень удобен, так как условие $\mathbf{P}_0 = 0$ приводит к разделению системы (5) на две подсистемы

$$\dot{\mathbf{r}}_0 = -\frac{1}{\mathcal{M}_0} \sum_1 \mathbf{P}_s \tag{6}$$

и

$$\dot{\mathbf{r}}_s = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{P}_s}, \quad \dot{\mathbf{P}}_s = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{r}_s}, \quad s = 1, 2, \ldots, N. \tag{7}$$

Вторая подсистема уравнений (7), решающаяся независимо от первой (6), дает полное описание планетного движения. Определив из (7) векторы $\mathbf{P}_s$, $1 \leqslant s \leqslant N$, можно далее из первой подсистемы (6) получить текущие положение и скорость Солнца $\mathcal{Q}_0$ в абсолютной системе координат.

Замечание. Поскольку вектор $\mathbf{P}_0$ имеет простой физический смысл (полный ньютоновский импульс системы в абсолютных осях), может показаться, что принять $\mathbf{P}_0 = 0$ можно уже в гамильтониане (4), т.е. еще *до* составления уравнений (5). Это рассуждение ошибочно. В самом деле, если принять $\tilde{\mathcal{H}} = \mathcal{H}$, то в (5) для вектора $\mathbf{r}_0$ получаем очевидно неверное уравнение $\dot{\mathbf{r}}_0 = \partial\mathcal{H}/\partial\mathbf{P}_0 = 0$, которое означает, что Солнце $\mathcal{Q}_0$ неподвижно относительно точки O.

Гамильтоновы уравнения (7), определяющие эволюцию планетных орбит, представляют основной интерес. Однако перед переходом к их дальнейшему исследованию рассмотрим для полноты картины особенности движения Солнца $\mathcal{Q}_0$ и барицентра системы относительно точки O.

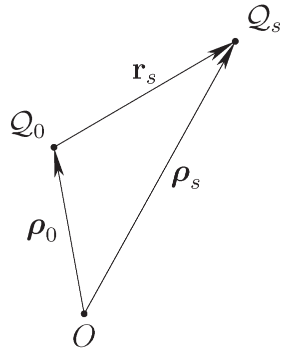

Рис. 1. Связь абсолютного и астроцентрического векторов планеты.

Условие $\mathbf{P}_0 = 0$ означает, что барицентр системы неподвижен относительно начала O. Но его положение $\mathbf{B}$ относительно O может быть абсолютно произвольным. Вектор $\mathbf{B}$ является интегралом движения, и его можно найти по формуле

$$\tilde{\mathcal{M}}\mathbf{B} = \mathcal{M}_0\boldsymbol{\rho}_0 + \sum_1 \mathcal{M}_s\boldsymbol{\rho}_s, \tag{8}$$

где $\tilde{\mathcal{M}} = \sum_{k=0}^{N} \mathcal{M}_k$. Это равенство дает возможность подобрать такие начальные координаты Солнца

$$\boldsymbol{\rho}_0^{(0)} = (\rho_{0x}^{(0)}, \rho_{0y}^{(0)}, \rho_{0z}^{(0)}) = \mathbf{r}_0^{(0)} = (r_{0x}^{(0)}, r_{0y}^{(0)}, r_{0z}^{(0)}),$$

чтобы $\mathbf{B} = 0$, т.е. чтобы точка O совпадала с барицентром системы. На практике обычно даны начальные значения

$$\mathbf{r}_1^{(0)}, \ldots, \mathbf{r}_N^{(0)}$$

планетных астроцентрических векторов

$$\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N.$$

В этом случае нужно с помощью формулы (8) выразить $\boldsymbol{\rho}_0^{(0)}$ через $\mathbf{r}_s^{(0)}$, $1 \leqslant s \leqslant N$. Подстановка равенств $\boldsymbol{\rho}_s = \mathbf{r}_s + \boldsymbol{\rho}_0$, $1 \leqslant s \leqslant N$, (рис. 1) в (8) дает

$$\tilde{\mathcal{M}}\mathbf{B} = \mathcal{M}_0\boldsymbol{\rho}_0 + \sum_1 \mathcal{M}_s(\mathbf{r}_s + \boldsymbol{\rho}_0) = \\ = \tilde{\mathcal{M}}\boldsymbol{\rho}_0 + \sum_1 \mathcal{M}_k\mathbf{r}_k.$$

Отсюда при $\mathbf{B} = 0$ получаем

$$\boldsymbol{\rho}_0 = -\frac{1}{\tilde{\mathcal{M}}}\sum_1 \mathcal{M}_s\mathbf{r}_s$$

и, в частности, для начальных координат Солнца

$$\boldsymbol{\rho}_0^{(0)} = -\frac{1}{\tilde{\mathcal{M}}}\sum_1 \mathcal{M}_s\mathbf{r}_s^{(0)}.$$

Итак, каноническая система (7) с гамильтонианом $\mathcal{H}$ позволяет найти астроцентрические положения и скорости планет $\mathbf{r}_s, \dot{\mathbf{r}}_s$, $1 \leqslant s \leqslant N$, как функции времени. Далее по этим функциям находится искомое поведение астроцентрических оскулирующих элементов.

В силу условия (1) модули импульсов $\mathbf{P}_s = \mathcal{M}_s\dot{\boldsymbol{\rho}}_s$, $1 \leqslant s \leqslant N$, оказываются в принятой нами системе единиц на несколько порядков меньше, чем модули положений $\mathbf{r}_s$, $1 \leqslant s \leqslant N$. Однако при интегрировании уравнений (7) удобно, чтобы все фазовые переменные имели примерно один и тот же порядок. Добиться этого можно с помощью стандартного в планетной задаче введения малого параметра μ. Положим

$$\mu = \max_{1 \leqslant s \leqslant N} \frac{\mathcal{M}_s}{\mathcal{M}_0}.$$

С помощью равенств $\mu m_k = \mathcal{M}_k$, $1 \leqslant k \leqslant N$, определим для каждой из N планет массовые множители

$$m_1, \ldots, m_N. \tag{9}$$

Для симметрии обозначений положим также $m_0 = \mathcal{M}_0$. Имеющие размерность массы постоянные (9) не малы и имеют порядок единицы. Они удовлетворяют неравенствам $0 < m_s \leqslant m_0$, и их можно найти по формулам $m_s = \mathcal{M}_s/\mu$, $1 \leqslant s \leqslant N$.

Совершим над переменными уравнений (7) каноническое преобразование, в котором новые координаты равны старым, а новые импульсы даются формулами

$$\mathbf{p}_s = \mathbf{P}_s/\mu, \qquad 1 \leqslant s \leqslant N.$$

Для новых координат оставим прежние обозначения $\mathbf{r}_s$, $1 \leqslant s \leqslant N$. В отличие от канонической подстановки (3), данное преобразование не сохраняет численное значение гамильтониана: новый гамильтониан $h = \mathcal{H}/\mu$ (см., например, Маркеев, 2001, раздел 170, пример 3). Теперь в используемой нами системе единиц новый гамильтониан h и новые переменные $\mathbf{r}_s$, $\mathbf{p}_s$, $1 \leqslant s \leqslant N$, имеют порядок единицы (см. также Робютель и др., 2016).

Введем обозначения

$$\beta_s = \frac{\mathcal{B}_s}{\mu} = \frac{m_0 m_s}{m_0 + \mu m_s}, \quad \varkappa_s^2 = \mathcal{G}(\mathcal{M}_0 + \mathcal{M}_s), \\ 1 \leqslant s \leqslant N.$$

Функция Гамильтона h представляется стандартной суммой невозмущенной и малой возмущающей частей:

$$h = h_0 + \mu h_1, \tag{10}$$

где

$$h_0 = \sum_1 h_{0s}, \quad h_{0s} = \frac{\mathbf{p}_s^2}{2\beta_s} - \frac{\varkappa_s^2 \beta_s}{r_s},$$

$$h_1 = \sum_2 \left(-\frac{\mathcal{G} m_j m_k}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k|} + \frac{\mathbf{p}_j \mathbf{p}_k}{m_0} \right).$$

Если в (10) положить $\mu = 0$, то уравнения движения

$$\dot{\mathbf{r}}_s = \frac{\partial h}{\partial \mathbf{p}_s}, \quad \dot{\mathbf{p}}_s = -\frac{\partial h}{\partial \mathbf{r}_s}, \quad 1 \leqslant s \leqslant N, \tag{11}$$

распадаются на N независимых задач одного притягивающего центра

$$\ddot{\mathbf{r}}_s + \varkappa_s^2 \frac{\mathbf{r}_s}{r_s^3} = 0, \quad 1 \leqslant s \leqslant N. \tag{12}$$

Каждое s-е уравнение в (12) порождается гамильтонианом h_{0s} и определяет текущие положение $\mathbf{r}_s$ и скорость $\mathbf{p}_s/\beta_s$ тела массы β_s в его движении относительно неподвижного тела массы $\mathcal{M}_0 + \mathcal{M}_s$.

Уравнения (12) решаются стандартным методом Гамильтона–Якоби, в результате чего получаются различные системы канонических элементов (Емельянов, 2015, глава 7). Данные элементы при учете возмущения μh_1 в гамильтониане h превращаются, согласно методу вариации произвольных постоянных, в функции времени. Например, если используется каноническая система комплексных элементов Пуанкаре (Ласкар, Робютель, 1995; Микрюков, Холшевников, 2016)

$$\Gamma = X\sqrt{\Lambda/2}, \quad \gamma = -\mathrm{i}\bar{\Gamma}, \tag{13}$$
$$\mathrm{Z} = Y\sqrt{2\Lambda}, \quad \zeta = -\mathrm{i}\bar{\mathrm{Z}},$$
$$\Lambda = \beta\varkappa\sqrt{a}, \quad \lambda = M + \tilde{g},$$

где

$$X = \sqrt{2(1-\eta)}\operatorname{Exp}\tilde{g}, \tag{14}$$
$$Y = \sqrt{\eta(1-\cos i)/2}\operatorname{Exp}\Omega,$$
$$\eta = \sqrt{1-e^2}, \quad \tilde{g} = g + \Omega,$$

то с учетом равенства

$$h_0 = -\sum_1 \frac{\beta_s^3 \varkappa_s^4}{2\Lambda_s^2}$$

приходим к уравнениям

$$\dot{\Gamma} = -\mu\frac{\partial h_1}{\partial \gamma}, \quad \dot{\gamma} = \mu\frac{\partial h_1}{\partial \Gamma}, \tag{15}$$
$$\dot{\mathrm{Z}} = -\mu\frac{\partial h_1}{\partial \zeta}, \quad \dot{\zeta} = \mu\frac{\partial h_1}{\partial \mathrm{Z}},$$
$$\dot{\Lambda} = -\mu\frac{\partial h_1}{\partial \lambda}, \quad \dot{\lambda} = \omega + \mu\frac{\partial h_1}{\partial \Lambda}.$$

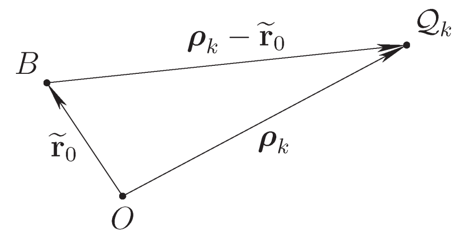

Рис. 2. Связь абсолютного и барицентрического векторов планеты. Точка B — барицентр системы.

Здесь

$$\omega = \frac{\partial h_0}{\partial \Lambda} = \frac{\varkappa^4 \beta^3}{\Lambda^3} = \varkappa a^{-3/2}, \tag{16}$$

причем в формулах (13)–(16) подразумевается, что все переменные снабжены одним и тем же индексом j, равным номеру планеты ($1 \leqslant j \leqslant N$).

3. ВТОРОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ

В предыдущем разделе мы отметили, что в планетной задаче основными используемыми системами координат являются координаты Якоби и координаты Пуанкаре. С точки зрения построения планетных теорий, главное отличие между этими системами заключается в существенно различном представлении функции Гамильтона (Шарлье, 1966; Микрюков, 2016).

Мы определили координаты Пуанкаре каноническим преобразованием (3). Однако это не единственная каноническая замена исходных переменных

$$\boldsymbol{\rho}_s, \boldsymbol{\Pi}_s, \qquad 0 \leqslant s \leqslant N,$$

которой координаты Пуанкаре могут определяться. Рассмотрим унивалентное каноническое преобразование

$$\tilde{\mathbf{r}}_0 = \mathbf{B} = \frac{1}{\tilde{\mathcal{M}}} \sum_{k=0}^{N} \mathcal{M}_k \boldsymbol{\rho}_k, \quad \tilde{\mathbf{P}}_0 = \sum_{k=0}^{N} \boldsymbol{\Pi}_k, \tag{17}$$
$$\tilde{\mathbf{r}}_j = \boldsymbol{\rho}_j - \boldsymbol{\rho}_0, \quad \tilde{\mathbf{P}}_j = \boldsymbol{\Pi}_j - \frac{\mathcal{M}_j}{\tilde{\mathcal{M}}} \sum_{k=0}^{N} \boldsymbol{\Pi}_k,$$
$$j = 1, 2, \ldots, N.$$

Как и в случае преобразования (3), переменные (17) имеют простой физический смысл. Немного не очевиден лишь смысл векторов $\tilde{\mathbf{P}}_k$, $1 \leqslant k \leqslant N$. Покажем, что эти векторы являются барицентрическими импульсами планет. Продифференцируем по времени барицентрическое положение планеты $\boldsymbol{\rho}_k - \tilde{\mathbf{r}}_0$ (рис. 2). Полученную барицентрическую скорость $\dot{\boldsymbol{\rho}}_k - \dot{\tilde{\mathbf{r}}}_0$ умножим на планетную массу $\mathcal{M}_k$:

$$\mathcal{M}_k(\dot{\boldsymbol{\rho}}_k - \dot{\tilde{\mathbf{r}}}_0) = \mathbf{\Pi}_k - \frac{\mathcal{M}_k}{\tilde{\mathcal{M}}}\tilde{\mathcal{M}}\dot{\tilde{\mathbf{r}}}_0 = \\ = \mathbf{\Pi}_k - \frac{\mathcal{M}_k}{\tilde{\mathcal{M}}}\sum_{s=0}^{N}\mathbf{\Pi}_s.$$

Обратное преобразование получается по формулам

$$\boldsymbol{\rho}_0 = \tilde{\mathbf{r}}_0 - \frac{1}{\tilde{\mathcal{M}}}\sum_1 \mathcal{M}_s\tilde{\mathbf{r}}_s, \tag{18}$$

$$\mathbf{\Pi}_0 = \frac{\mathcal{M}_0}{\tilde{\mathcal{M}}}\tilde{\mathbf{P}}_0 - \sum_1 \tilde{\mathbf{P}}_s,$$

$$\boldsymbol{\rho}_k = \tilde{\mathbf{r}}_k + \tilde{\mathbf{r}}_0 - \frac{1}{\tilde{\mathcal{M}}}\sum_1 \mathcal{M}_s\tilde{\mathbf{r}}_s,$$

$$\mathbf{\Pi}_k = \tilde{\mathbf{P}}_k + \frac{\mathcal{M}_k}{\tilde{\mathcal{M}}}\tilde{\mathbf{P}}_0, \quad 1 \leqslant k \leqslant N.$$

Подстановка (18) в исходное представление гамильтониана (2) после некоторых выкладок дает

$$\tilde{\mathcal{H}} = \frac{\tilde{\mathbf{P}}_0^2}{2\tilde{\mathcal{M}}} + \mathcal{F}, \tag{19}$$

где

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 + \mathcal{F}_1,$$

$$\mathcal{F}_0 = \sum_1 \left(\frac{\tilde{\mathbf{P}}_s^2}{2\mathcal{B}_s} - \frac{\mathcal{G}(\mathcal{M}_0 + \mathcal{M}_s)\mathcal{B}_s}{\tilde{r}_s}\right), \quad \tilde{r}_s = |\tilde{\mathbf{r}}_s|,$$

$$\mathcal{F}_1 = \sum_2 \left(-\frac{\mathcal{G}\mathcal{M}_j\mathcal{M}_k}{|\tilde{\mathbf{r}}_j - \tilde{\mathbf{r}}_k|} + \frac{\tilde{\mathbf{P}}_j\tilde{\mathbf{P}}_k}{\mathcal{M}_0}\right).$$

В результате мы снова приходим к двум группам уравнений:

$$\dot{\tilde{\mathbf{r}}}_0 = \frac{\tilde{\mathbf{P}}_0}{\tilde{\mathcal{M}}}, \quad \dot{\tilde{\mathbf{P}}}_0 = 0 \tag{20}$$

и

$$\dot{\tilde{\mathbf{r}}}_s = \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\tilde{\mathbf{P}}_s}, \quad \dot{\tilde{\mathbf{P}}}_s = -\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\tilde{\mathbf{r}}_s}, \quad 1 \leqslant s \leqslant N. \tag{21}$$

Вторая группа уравнений (21), аналогично системе (7), дает полное описание планетного движения. Первая группа (20) описывает движение барицентра (ср. с уравнениями для $\mathbf{r}_0$ и $\mathbf{P}_0$ в формулах (5)). Начальные значения $\tilde{\mathbf{r}}_0^{(0)}$, $\tilde{\mathbf{P}}_0^{(0)}$ можно задавать произвольно, они никак не влияют на поведение планетных векторов $\tilde{\mathbf{r}}_s, \tilde{\mathbf{P}}_s, 1 \leqslant s \leqslant N$.

Как показывают равенства (4) и (19), гамильтониан $\tilde{\mathcal{H}}$ выражается через переменные (17) иначе, чем через переменные (3). Это вполне нормальная ситуация, так как (3) и (17) — это различные канонические подстановки. Однако функциональная зависимость величины $\mathcal{H}$ от переменных (3) идентична функциональной зависимости $\mathcal{F}$ от переменных (17), и это здесь оказывается самым важным. Так как описание планетного движения полностью определяется либо $\mathcal{H}$, либо $\mathcal{F}$ (см. соответственно уравнения (7) и (21)), то канонический набор (17), наряду с (3), также можно положить в основу определения астроцентрических координат Пуанкаре. В литературе можно встретить оба способа. Например, в работах (Ласкар, Робютель, 1995; Ферраз-Меллу и др., 2006) используется определение (3), а в работах (Дункан и др., 1998; Рейн и др., 2019) авторы определяют координаты Пуанкаре формулами (17). Сам Пуанкаре (1965, раздел 26) определял астроцентрические координаты формулами (3). Оба определения приводят к одной и той же системе гамильтоновых уравнений планетного движения порядка $6N$, к которой далее уже могут применяться стандартные методы теории возмущений.

В работе Микрюкова (2016) для определения канонических координат и импульсов (17) используется лагранжев формализм. Следуя Уинтнеру (1967, § 340–§ 342), Микрюков (2016) делает точечное преобразование переменных $\boldsymbol{\rho}_0, \ldots, \boldsymbol{\rho}_N$ к переменным

$$\tilde{\mathbf{r}}_0, \ldots, \tilde{\mathbf{r}}_N, \tag{22}$$

после чего записывает в новых переменных (22) уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\tilde{\mathbf{r}}}_s} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\tilde{\mathbf{r}}_s} = 0, \quad 0 \leqslant s \leqslant N.$$

Лагранжиан $\mathcal{L}$, кинетическая $\mathcal{E}_1$ и потенциальная $\mathcal{E}_2$ энергии имеют вид

$$\mathcal{L} = \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2,$$

$$2\mathcal{E}_1 = \tilde{\mathcal{M}}\dot{\tilde{\mathbf{r}}}_0^2 + \sum_1 \mathcal{M}_s\dot{\tilde{\mathbf{r}}}_s^2 - \frac{1}{\tilde{\mathcal{M}}}\left(\sum_1 \mathcal{M}_s\dot{\tilde{\mathbf{r}}}_s\right)^2,$$

$$-\mathcal{E}_2 = \sum_1 \frac{\mathcal{G}\mathcal{M}_0\mathcal{M}_s}{\tilde{r}_s} + \sum_2 \frac{\mathcal{G}\mathcal{M}_j\mathcal{M}_k}{|\tilde{\mathbf{r}}_j - \tilde{\mathbf{r}}_k|}.$$

Далее Микрюков (2016) выполняет преобразование Лежандра функции Лагранжа $\mathcal{L}$ и определяет обобщенные импульсы частными производными $\partial\mathcal{L}/\partial\dot{\tilde{\mathbf{r}}}_s$, $0 \leqslant s \leqslant N$. С помощью вытекающих из (18) равенств

$$\dot{\tilde{\mathbf{r}}}_s - \frac{1}{\tilde{\mathcal{M}}}\sum_1 \mathcal{M}_k\dot{\tilde{\mathbf{r}}}_k = \dot{\boldsymbol{\rho}}_s - \dot{\tilde{\mathbf{r}}}_0, \quad 1 \leqslant s \leqslant N,$$

получаем

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\tilde{\mathbf{r}}}_0} = \tilde{\mathcal{M}}\dot{\tilde{\mathbf{r}}}_0 = \tilde{\mathbf{P}}_0, \tag{23}$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\tilde{\mathbf{r}}}_s} = \mathcal{M}_s\left(\dot{\tilde{\mathbf{r}}}_s - \frac{1}{\tilde{\mathcal{M}}}\sum_1 \mathcal{M}_k\dot{\tilde{\mathbf{r}}}_k\right) = \tilde{\mathbf{P}}_s,$$
$$1 \leqslant s \leqslant N.$$

Кинетическая энергия $\mathcal{E}_1$ является квадратичной формой по скоростям, так что

$$\tilde{\mathcal{H}} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2. \tag{24}$$

Выражая здесь $\mathcal{E}_1$ через $\tilde{\mathbf{P}}_s$, $0 \leqslant s \leqslant N$, убеждаемся, что (24) совпадает с (19), и, таким образом, приходим к уравнениям (20) и (21).

Мы с сожалением вынуждены отметить, что в указанной работе Микрюкова (2016) ее автор при определении обобщенных импульсов $\tilde{\mathbf{P}}_s$, $0 \leqslant s \leqslant N$, допустил ошибку (неправильно продифференцировал $\mathcal{L}$ по обобщенным скоростям $\dot{\tilde{\mathbf{r}}}_s$, $0 \leqslant s \leqslant N$). В результате представления гамильтониана (10) и (12) в виде суммы невозмущенной и малой возмущающей частей, приведенные в данной работе, оказались неверными. Точнее, указанные представления (10) и (12) верны с математической точки зрения: гамильтониан можно представить обоими способами. Но они неверны в том смысле, что при $\mu = 0$ они не дают N независимых задач одного притягивающего центра (формула (15) в статье Микрюкова, 2016). Верный вариант представления h в виде суммы h_0 и μh_1 дается формулой (10), полученной нами в настоящей работе. То, что (10) при $\mu = 0$ приводит к N независимым уравнениям (12), проверяется элементарным образом.

Отметим, что данная ошибка не влияет существенным образом на результаты работ Микрюкова (2018, 2020). В самом деле, сопоставление формул (10) и (12) работы Микрюкова (2016) с верным представлением (10) показывает, что в результате совершения данной ошибки неверно оказалась определена дополнительная часть возмущающей функции. Верный вариант от неверного отличается некоторым массовым множителем, на который умножается скалярное произведение

$$\mathbf{p}_j\mathbf{p}_k, \quad 1 \leqslant j < k \leqslant N. \tag{25}$$

В работе Микрюкова (2018) при описании разложения дополнительной части возмущающей функции приводится лишь метод разложения величины (25). Так как этот метод, очевидно, сохраняет силу вне зависимости от того, на какой множитель разложение (25) должно далее умножаться, то все выкладки работы Микрюкова (2018), посвященные разложению дополнительной части, остаются верными. Далее, в статье Микрюкова (2020) исследуется космогоническая эволюция некоторых планетных систем в рамках теории первого порядка по планетным массам. В этой работе дополнительная часть не используется совсем, так как теория первого порядка строится на основе среднего значения возмущающей функции, а среднее значение дополнительной части равно нулю[2].

Мы с извинениями приводим верный вариант определения обобщенных импульсов, который должен быть использован в работе Микрюкова (2016):

$$\mathbf{u}_0 = \frac{\partial\mathcal{E}_1}{\partial\dot{\mathbf{r}}_0} = m_0\tilde{m}\dot{\mathbf{r}}_0, \tag{26}$$

$$\mathbf{u}_j = \frac{\partial\mathcal{E}_1}{\partial\dot{\mathbf{r}}_j} = \mu m_j m_0\Big(\dot{\mathbf{r}}_j - \frac{\mu}{\tilde{m}}\sum_1 m_k\dot{\mathbf{r}}_k\Big),$$
$$1 \leqslant j \leqslant N.$$

Формулы (26) представляют собой формулы (23), переписанные в обозначениях работы Микрюкова (2016).

4. ПЕРЕХОД К АСТРОЦЕНТРИЧЕСКИМ ОСКУЛИРУЮЩИМ ЭЛЕМЕНТАМ

Переход от уравнений (11) к уравнениям в канонических элементах типа (15) обусловлен удобством применения методов теории возмущений, в частности, метода осреднения. Поведение канонических элементов определяет текущее положение $\mathbf{r}_s$ и скорость $\mathbf{p}_s/\beta_s$ планеты $\mathcal{Q}_s$ в системе координат Пуанкаре, т.е. текущие значения переменных уравнений (11). Для получения этих значений нужно от канонических элементов перейти к кеплеровым.

В случае переменных (13) сначала вычисляются безразмерные величины $X = \Gamma\sqrt{2/\Lambda}$ и $Y = \mathrm{Z}/\sqrt{2\Lambda}$. Далее из (14) по найденным X и Y вычисляются e, i, g и Ω:

$$\eta = 1 - \frac{|X|^2}{2}, \quad e = \sqrt{1-\eta^2}, \tag{27}$$

[2] Дополнительная часть возмущающей функции фигурирует в теории второго и более высоких порядков по планетным массам.

$$\cos i = 1 - \frac{2|Y|^2}{\eta},$$
$$\tilde{g} = \arg X, \quad \Omega = \arg Y, \quad g = \tilde{g} - \Omega.$$

Наконец, a и M даются равенствами

$$a = \frac{\Lambda^2}{\beta^2 \varkappa^2}, \quad M = \lambda - \tilde{g}. \tag{28}$$

Найденные элементы (27) и (28) — это кеплеровы элементы планеты в системе координат Пуанкаре. Поведение этих элементов не представляет существенного интереса. Нас больше всего интересует изменение обычных астроцентрических кеплеровых элементов.

Подстановка найденных элементов (27) и (28) в формулы задачи двух тел

$$\mathbf{r} = r(\mathbf{a}\cos u + \mathbf{b}\sin u),$$
$$\frac{\mathbf{p}}{\beta} = \frac{\omega a}{\eta}\left[-\mathbf{a}(\sin u + e\sin g) + \mathbf{b}(\cos u + e\cos g)\right],$$

где u — аргумент широты (истинная аномалия определяется по средней M), $\mathbf{a} = (\cos\Omega, \sin\Omega, 0)$, $\mathbf{b} = (-\cos i\sin\Omega, \cos i\cos\Omega, \sin i)$, дает эволюцию векторов $\mathbf{r}_s$, $\mathbf{p}_s$, $1 \leqslant s \leqslant N$. Осталось найти астроцентрические скорости $\dot{\mathbf{r}}_s$, $1 \leqslant s \leqslant N$. Выполняя дифференцирование в первой группе уравнений (11), получаем окончательно

$$\dot{\mathbf{r}}_s = \frac{\partial h}{\partial \mathbf{p}_s} = \frac{\mathbf{p}_s}{\beta_s} - \frac{\mu \mathbf{p}_s}{m_0} + \frac{\mu}{m_0}\sum_1 \mathbf{p}_k =$$
$$= \frac{\mathbf{p}_s}{m_s} + \frac{\mu}{m_0}\sum_1 \mathbf{p}_k, \quad 1 \leqslant s \leqslant N.$$

По найденным $\mathbf{r}_s$, $\dot{\mathbf{r}}_s$, $1 \leqslant s \leqslant N$, находим искомое изменение астроцентрических кеплеровых элементов (см., например, Холшевников, Титов, 2007, гл. 4, раздел 4.2).

5. ИТОГИ И ДАЛЬНЕЙШИЕ ЗАДАЧИ

Итак, мы показали, что в основу определения астроцентрических координат Пуанкаре могут быть равноправным образом положены две различные системы канонических переменных. Мы разработали аналитический аппарат использования координат Пуанкаре, к которому уже удобно непосредственно применять методы теории возмущений. Наконец, мы показали, как по эволюции орбит в данной системе координат восстанавливается поведение обычных астроцентрических элементов.

В следующей работе мы продолжим начатое в статье Микрюкова (2020) изучение долговременной орбитальной эволюции нерезонансных и слаборезонансных планетных систем. Мы перейдем к рассмотрению теории второго порядка по планетным массам. Исследование будем вести уже с использованием гамильтоновой формулировки координат Пуанкаре, изложенной в настоящей работе.

Автор благодарен К.В. Холшевникову (1939–2021) за предложенную тему. Автор также благодарит анонимного рецензента за полезные замечания, способствовавшие улучшению работы. Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (грант 19-72-10023).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дункан и др. (M.J. Duncan, H.F. Levison and M.H. Lee) Astron. J. **116**, 2067 (1998).
2. Емельянов Н.В., *Основы теории возмущений в небесной механике* (М.: Физический факультет МГУ, 2015).
3. Красинский Г.А., *Основные уравнения планетной теории* (М.: Наука, сб. *Малые Планеты*, под ред. Н.С. Самойловой-Яхонтовой, 1973), с. 81.
4. Ласкар, Робютель (J. Laskar and P. Robutel), Celest. Mech. Dynam. Astron. **62**, 193 (1995).
5. Маркеев А.П., *Теоретическая механика* (Ижевск: РХД, 2001).
6. Мельников А.В., Орлов В.В., Шевченко И.И, Астрон. журн. **91**, 735 (2014) [A.V. Mel'nikov, et al., Astron. Rep. **58**, 640 (2014)].
7. Микрюков Д.В., Письма в Астрон. журн. **42**, 611 (2016) [D.V. Mikryukov, Astron. Lett. **42**, 555 (2016)].
8. Микрюков Д.В., Письма в Астрон. журн. **44**, 361 (2018) [D.V. Mikryukov, Astron. Lett. **44**, 337 (2018)].
9. Микрюков Д.В., Письма в Астрон. журн. **46**, 366 (2020) [D.V. Mikryukov, Astron. Lett. **46**, 344 (2020)].
10. Микрюков Д.В., Холшевников К.В., Письма в Астрон. журн. **42**, 302 (2016) [D.V. Mikryukov, K.V. Kholshevnikov, Astron. Lett. **42**, 268 (2016)].
11. Морбиделли А., *Современная небесная механика. Аспекты динамики Солнечной системы* (М.: ИКИ, 2014).
12. Пуанкаре А., *Лекции по небесной механике* (М.: Наука, 1965).

13. Рейн и др. (H. Rein, D.M. Hernandez, D. Tamayo, G. Brown, E. Eckels, E. Holmes, M. Lau, R. Leblanc and A. Silburt) MNRAS **485**, 5490 (2019).
14. Робютель и др. (P. Robutel, L. Niederman and A. Pousse), Comp. Appl. Math. **35**, 675 (2016).
15. Родригес, Галлардо (A. Rodríguez and T. Gallardo), Astrophys. J. **628**, 1006 (2005).
16. Уинтнер A., *Аналитические основы небесной механики* (M.: Наука, 1967).
17. Ферраз-Меллу и др. (S. Ferraz-Mello, T.A. Micchtchenko and C. Beaugé), *Regular motions in extra-solar planetary systems* (Springer, 2006, in *Chaotic Worlds: From Order to Disorder in Gravitational N-Body Dynamical Systems*, Ed. B.A. Steves, A.J. Maciejewski, M. Hendry), p. 255.
18. Холшевников К.В., Греб А.В., Кузнецов Э.Д., Астрон. вестник **35**, 267 (2001) [K.V. Kholshevnikov et al., Solar System. Res. **35**, 243 (2001)].
19. Холшевников К.В., Титов В.Б., *Задача двух тел: Учебное пособие* (СПб.: СПбГУ, 2007).
20. Шарлье К., *Небесная механика* (M.: Наука, 1966).