

## ПОИСК ПЕРИОДИЧЕСКОГО СИГНАЛА В ИЗЛУЧЕНИИ КРАБОВИДНОЙ ТУМАННОСТИ В ОБЛАСТИ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

© 2021 г. Б. А. Низамов<sup>1,2</sup>, М. С. Пширков<sup>1,3,4\*</sup>

<sup>1</sup>Государственный астрономический институт им. П.К. Штернберга Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

<sup>2</sup>Институт космических исследований РАН, Москва, Россия

<sup>3</sup>Институт ядерных исследований РАН, Москва, Россия

<sup>4</sup>Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН, Пушчинская радиоастрономическая обсерватория АКЦ ФИАН, Пушчино, Россия

Поступила в редакцию 20.11.2020 г.

После доработки 26.11.2020 г.; принята к публикации 26.11.2020 г.

Излучение Крабовидной туманности демонстрирует существенную переменность в гамма-диапазоне. В данной работе мы проанализировали эту переменность с точки зрения периодичности. Используя эфемериды пульсара, построенные по радиоданным, мы получили кривую блеска Крабовидной туманности с подавленным вкладом пульсара в диапазоне энергий 100–300 МэВ с августа 2008 по март 2020 г. С помощью метода дисперсионного анализа мы обнаружили указание на периодичность вспышек в туманности с периодом 49 недель. Статистическая значимость сигнала составила 0.02 ( $2.1\sigma$ ), если учитывать только наибольший пик в периодограмме, и 0.003 ( $2.7\sigma$ ), если учитывать два пика — наибольший и пик на удвоенном периоде (98 недель), которые могут вызываться одним и тем же сигналом. Если найденная нами периодичность реальна, то новых периодов повышенной активности туманности следует ждать в августе 2021 и 2022 гг.

*Ключевые слова:* Крабовидная туманность, туманности пульсарного ветра, гамма-астрономия.

DOI: 10.31857/S0320010821020042

### ВВЕДЕНИЕ

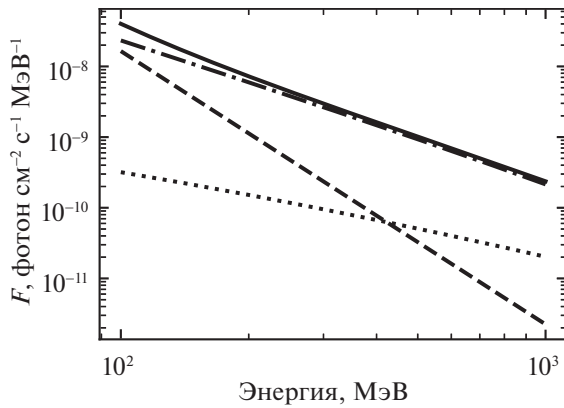
Крабовидная туманность и пульсар в ней являются одними из наиболее изучаемых объектов во всей астрофизике. Наблюдение процессов, протекающих в них, помогает изучить два таких важных класса астрофизических источников, как пульсары и туманности пульсарного ветра. Особенно это важно во втором случае, когда можно утверждать, что без наблюдений Крабовидной туманности наши знания о туманностях пульсарного ветра были бы во много раз меньше.

Суммарное излучение пульсара и туманности долгое время считалось постоянным с высокой степенью точности и даже выступало в качестве эталонного источника и единицы измерений в области высоких энергий (рентген и гамма). Это предположение естественным образом вытекало из значительной пространственной протяженности туманности и подтверждалось данными наблюдений.

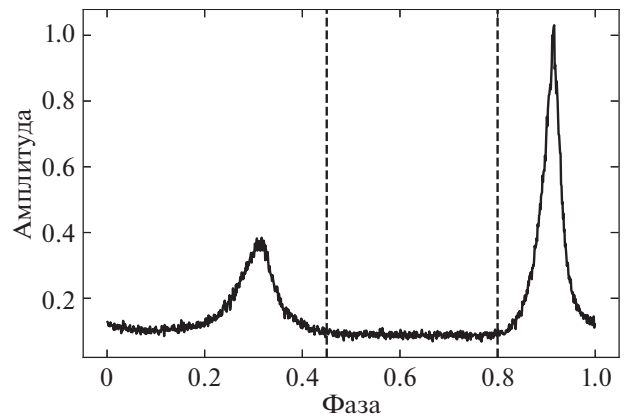
Однако наблюдения с помощью новых, более чувствительных инструментов показали, что поток от туманности не является постоянным. Впервые, в наблюдениях в диапазоне 15–50 кэВ детекторами Fermi/GBM, Swift/BAT, RXTE/PCA и INTEGRAL/IBIS было обнаружено падение потока на уровне 7% за два года (2008–2010) (Вилсон-Ходж и др., 2011). Во-вторых, еще более непредвиденным стало открытие телескопами AGILE и Fermi/LAT мощных вспышек в гамма-диапазоне (100–500 МэВ) (Тавани и др., 2011; Абдо и др., 2011). Во время самой яркой из детектированных на данный момент вспышек, которая произошла в апреле 2011 г., и продолжительность которой составила 9 дней, пиковый поток от туманности на энергиях выше 100 МэВ вырос в 30 раз по сравнению со средним (Бюлер и др., 2012).

В предыдущей работе (Пширков и др., 2020) мы детально исследовали переменность потока от туманности в промежутки времени с августа 2008 по март 2019 г. Кроме мощных известных вспышек, мы обнаружили продолжительные

\*Электронный адрес: pshirkov@sai.msu.ru



**Рис. 1.** Спектры пульсара и двух компонент пульсарной туманности по данным каталога 4FGL: штрих-пунктирная линия — спектр пульсара, штриховая линия — спектр синхротронной компоненты туманности, пунктирная линия — спектр обратной комптоновской компоненты туманности, сплошная линия — суммарный спектр всех компонент.



**Рис. 2.** Нормированное распределение потоков пульсара и туманности, свернутых с периодом вращения пульсара. Максимум распределения приходится на фазу 0.915. Вертикальные штриховые линии на фазах 0.45 и 0.8 выделяют интервал, из которого брались фотоны для анализа излучения туманности.

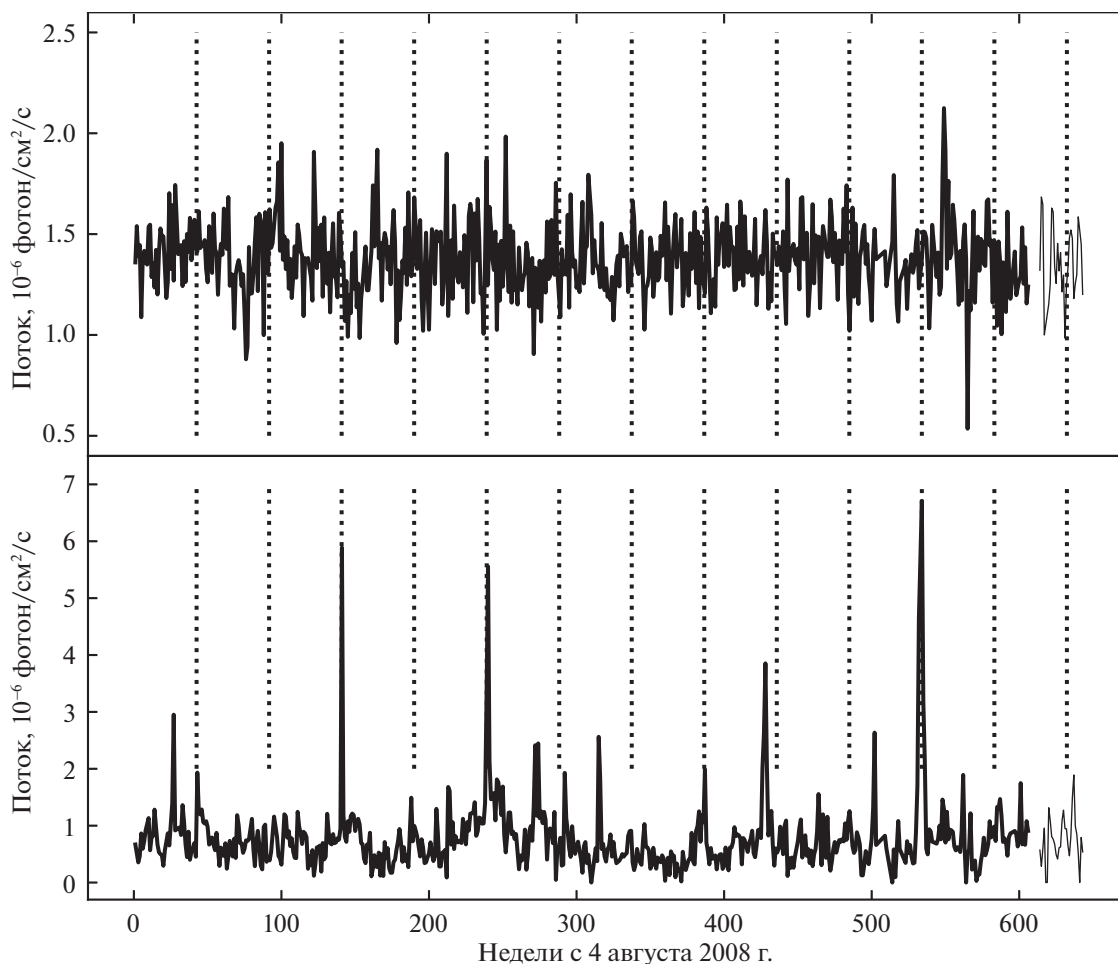
уменьшения уровня потока и редкие быстрые на временном масштабе одной-двух недель падения потока до уровня, совместного с отсутствием излучения. Также были обнаружены указания на присутствие (квази)периодической компоненты в кривой блеска — в периодограмме Ломба–Скаргла (Ломб, 1976; Скаргл, 1982) наблюдался пик на частоте, соответствующей периоду 95 нед. В данной работе мы осуществили тщательное исследование этого вопроса. В последующих разделах описаны использованные данные, метод поиска периодичности и оценки статистической значимости обнаруженного сигнала, а также краткое обсуждение полученных результатов.

## НАБЛЮДЕНИЯ

Мы расширили наблюдательный материал, который использовался в предыдущей статье (Пширков и др., 2020), добавив еще один год наблюдений. Были использованы наблюдения космической гамма-обсерватории Fermi-LAT с 4 августа 2008 по 17 марта 2020 г. Для анализа мы выбрали фотоны класса SOURCE с направлениями прихода в радиусе 15 градусов от пульсарной туманности ( $\alpha_{J2000} = 83^{\circ}6331$ ,  $\delta_{J2000} = 22^{\circ}0145$ ) в диапазоне энергий 100–300 МэВ. Из рассмотрения были исключены фотоны, у которых направление прихода имеет зенитный угол более  $90^{\circ}$ .

В последней, четвертой версии каталога FGL, построенного по восьми годам наблюдений Fermi-LAT, гамма-излучение Крабовидной туманности описывается суммой трех компонент. Одна из них относится к излучению пульсара, а две другие (синхротронная и обратная комптоновская) — к пульсарной туманности. Несмотря на то что

компонента, соответствующая обратному комптоновскому рассеянию, выделяется как протяженный источник размером  $0.06^{\circ}$ , пространственного разрешения телескопа недостаточно, чтобы разделить пульсар и синхротронную компоненту туманности. Однако все три компоненты имеют разную форму спектра, что позволяет уверенно их разделять. На рис. 1 показаны спектры этих компонент в диапазоне 100–1000 МэВ. Видно, что в интересующем нас диапазоне энергий 100–300 МэВ пульсар гораздо ярче туманности (их потоки в этом диапазоне соответственно  $1.58 \times 10^{-6}$  и  $0.58 \times 10^{-6}$  фотон  $\text{см}^{-2}\text{с}^{-1}$ ), и вклад излучения от него необходимо максимально подавить. Как известно, излучение пульсара зависит от его фазы: оно намного сильнее во время импульса и несколько менее яркого интер-импульса и слабее в остальное время. Чтобы из всех фотонов от пульсара и туманности выделить те, которые пришли вне импульсов пульсара, мы использовали эфемериды, которые строятся на основе радионаблюдений в обсерватории “Джодрелл Бэнк” (Лайн и др., 1993). Это позволяет каждому гамма-фотону приписать фазу в зависимости от времени его регистрации. После этого мы исключили все фотоны, фаза которых соответствует импульсу либо интер-импульсу. Считая, что максимум яркости пульсара приходится на фазу 0.915, использовались фотоны с фазами от 0.45 до 0.8. На рис. 2 изображен фазовый профиль излучения пульсара и туманности, а вертикальными линиями выделен интервал фаз, использованный в работе. Далее отсчеты детектора были реконструированы с использованием инструментальной функции P8R3 методом максимального правдоподобия в стандартном программном пакете FermiTools. Модели источников взяты из



**Рис. 3.** Кривые блеска пульсара (вверху) и пульсарной туманности (внизу) в диапазоне 100–300 МэВ с временным разрешением 1 неделя. Вертикальными линиями отмечены эпохи активности, найденные из анализа периодичности. Тонкими линиями показаны фрагменты данных, которые не использовались в анализе, а использовались для проверки предсказания (см. раздел “Результаты и обсуждение”).

каталога 4FGL (Абдоллахи и др., 2020). В качестве моделей для галактического и изотропного фона выбраны соответственно модели `gll_iem_v07.fits` и `iso_P8R3_SOURCE_V2_v1.txt`<sup>1</sup>. Излучение пульсарной туманности мы описали степенным законом, параметры которого подбирались из наблюдений. Также из наблюдений определялись нормировки галактического и изотропного фона, а все остальные параметры модели (в том числе описывающие все другие источники) были зафиксированы. Представленным способом мы построили кривую блеска пульсарной туманности с временным разрешением, равным одной неделе. Она показана на рис. 3 вместе с кривой блеска пульсара.

<sup>1</sup> <http://fermi.gsfc.nasa.gov/ssc/data/access/lat/BackgroundModels.html>

## ПОИСК ПЕРИОДИЧНОСТИ

Задача поиска во временном ряду периодического компонента, в свою очередь, состоит из двух подзадач: 1) выбор оптимального метода собственно для поиска периодического сигнала; 2) оценка статистической значимости найденного периодического компонента. В последующих подразделах мы подробнее остановимся на каждой из этих подзадач.

### *Метод поиска периодичности*

Разные методы поиска периодичности бывают более или менее чувствительны в зависимости от свойств сигнала. Если периодический сигнал “квазисинусоидальный”, т.е. демонстрирует плавную переменность, то разумно применить периодограмму Ломба–Скаргла. В случае, когда периодичность связана с резкими и кратковременными всплесками (вспышками), чувствительность этого

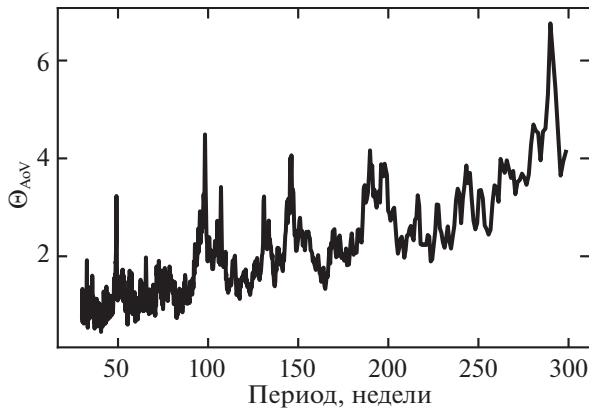


Рис. 4. Периодограмма для пульсарной туманности, построенная методом дисперсионного анализа.

метода существенно снижается, и тогда выгоднее использовать, например, дисперсионный анализ (в английской литературе analysis of variance, AoV, ANOVA).

Кроме того, периодический сигнал может присутствовать в данных как на протяжении всего времени наблюдений, так и, вообще говоря, в течение меньшего интервала времени. В первом случае оптимальным будет глобальный поиск сигнала, как, например, в периодограмме Ломба–Скаргла, во втором же следует воспользоваться методом, дающим не только спектральную, но и временную информацию о сигнале, например, оконным преобразованием Фурье или вейвлет-преобразованием, в этом случае неизбежны потери в частотном разрешении.

Очевидно, что заранее свойства периодического сигнала, если он вообще существует, неизвестны, поэтому необходимо осуществить его поиск разными методами. Мы применили к нашим данным три метода поиска периодичности: периодограмму Ломба–Скаргла, взвешенное вейвлетное Z-преобразование (Фостер, 1996) и дисперсионный анализ. Первые два метода не выявили скольконибудь значимого сигнала ни за все время наблюдений, ни в каком-то его промежутке, поэтому в дальнейшем речь будет идти только о методе дисперсионного анализа.

Данный метод в приложении к астрономическим наблюдениям описан в работе (Шварценберг-Черны, 1989). Пусть имеется ряд из  $n$  наблюдений  $x_i$ , каждому из которых приписан момент времени  $t_i$ , а их среднее значение равно  $\bar{x}$ . Для некоторого пробного периода  $P$  определим фазу каждого наблюдения как остаток от деления  $t_i$  на  $P$ . Разобьем фазы на  $r$  бинов. Пусть в  $i$ -й бин попало  $n_i$  наблюдений, их среднее  $\bar{x}_i$ . Пусть также  $x_{ij}$  —  $j$ -е наблюдение в  $i$ -м бине. Определим величины  $s_1^2, s_2^2$

следующим образом:

$$s_1^2 = \frac{1}{r-1} \sum_{i=1}^r n_i (\bar{x}_i - \bar{x})^2, \quad (1)$$

$$s_2^2 = \frac{1}{n-r} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \bar{x}_i)^2. \quad (2)$$

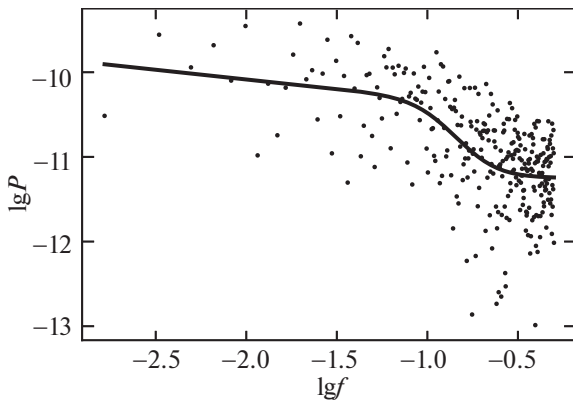
Как видно из определений,  $s_1^2$  показывает, насколько среднее по отдельным бинам отличается от глобального среднего, а  $s_2^2$  характеризует дисперсию данных. Если пробный период  $P$  далек от периода реального сигнала (если он существует), то измерения, попавшие в один бин, будут иметь случайные значения, а их среднее будет мало отличаться от среднего по всем наблюдениям. Если же  $P$  близко к периоду присутствующего в данных сигнала, то измерения с близкими фазами будут иметь близкие значения, а значит, средние значения в бинах будут сильнее отличаться от глобального среднего. Поэтому величина  $\Theta_{AoV} = s_1^2/s_2^2$ , вычисляемая для каждого пробного периода, показывает, какие из них могут соответствовать реальному периодическому сигналу в данных.

Важной особенностью метода является его способность детектировать периодические процессы как с плавной переменностью, так и с резкими всплесками, в нашем случае вспышками гамма-излучения. В этой работе мы использовали метод дисперсионного анализа, реализованный в программном пакете *vartools* (Хартман, Бакос, 2016; Девор, 2005). На рис. 4 показана периодограмма кривой блеска пульсарной туманности в пределах от 30 до 300 нед. Видны несколько выраженных пиков, расположенных на одинаковых расстояниях друг от друга. Самым статистически значимым (об оценке значимости см. ниже) оказывается первый из этих пиков, соответствующий периоду 49 нед.

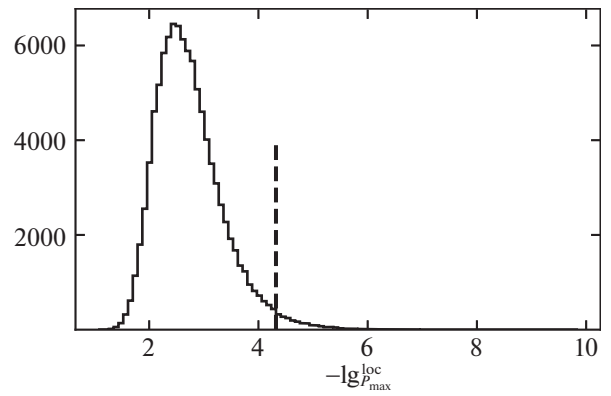
В оригинальной работе (Шварценберг-Черны, 1989) показано, что распределение величины  $\Theta_{AoV}$  можно записать аналитически, но это возможно только в том случае, когда данные представляют собой сумму периодического сигнала и белого шума. Как будет показано ниже, наш ряд данных имеет спектр мощности, отличный от спектра белого шума. Это означает, что у нас нет аналитической оценки статистической значимости получаемых значений  $\Theta_{AoV}$ . Мы применили другой способ оценки статистической значимости, который описан в следующем подразделе.

#### Оценка статистической значимости

Для оценки статистической значимости периодограмм, получаемых разными методами, если



**Рис. 5.** Спектр мощности для кривой блеска пульсарной туманности. Сплошная линия построена методом, описанным в работе Пападакиса, Лоуренса (1993).



**Рис. 6.** Распределение логарифма минимальных локальных  $p$ -значений периодических сигналов, достигаемых в симулированных данных. Доля симуляций, где это значение меньше, чем в наблюдаемых данных (т.е. правее вертикальной линии), равна глобальной значимости найденного сигнала.

аналитические формулы недоступны, обычно используется метод Монте-Карло. В данной работе мы также применили этот метод. Для этого мы сгенерировали  $10^5$  кривых блеска, следуя методу, изложенному в статье Эмманулопулос и др. (2013). Он заключается в том, чтобы строить такие кривые блеска, у которых, во-первых, будет такая же спектральная плотность мощности, как у наблюдаемого ряда данных, и, во-вторых, такое же распределение амплитуд потоков. Выполнение двух этих условий позволяет говорить, что симулированные ряды данных статистически идентичны наблюдаемому в том смысле, что применение к ним метода дисперсионного анализа (или другого метода поиска периодичности) дает эмпирическую статистику для величин  $\Theta_{A0V}$ . Спектр мощности для кривой блеска туманности показан на рис. 5. Для симуляции мы использовали код, написанный Коннолли (2015)<sup>2</sup>.

Прежде всего определим некоторые понятия. Вероятность того, что значение периодограммы  $\Theta_{A0V}$  на периоде  $P$  не меньше  $\Theta_0$ , мы называем локальным  $p$ -значением сигнала для указанного периода:

$$p_P^{\text{loc}} = \mathcal{P}(\Theta_{A0V}(P) \geq \Theta_0). \quad (3)$$

Вероятность того, что минимальное локальное  $p$ -значение, достигаемое в случайной (симулированной) кривой блеска при переборе всех периодов, меньше или равно  $p$ , мы называем глобальной значимостью этого сигнала. Отметим, что все указанные вероятности имеют частотный (еще точнее — эмпирический) смысл. Например,  $\mathcal{P}(\Theta_{A0V}(P) \geq \Theta_0)$  — это просто доля симулированных кривых блеска, в которых значение статистики  $\Theta_{A0V}$  для периода  $P$  не менее  $\Theta_0$ . Аналогично глобальная

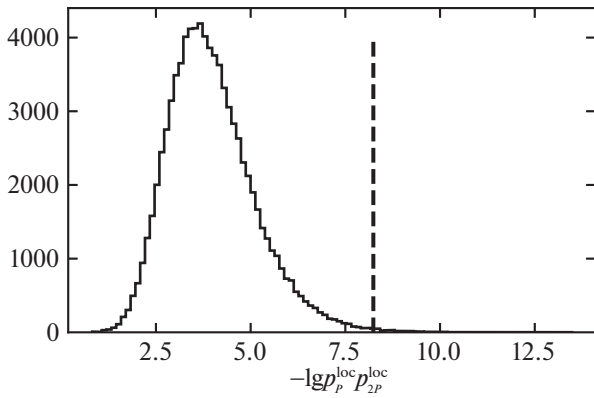
значимость — это доля симуляций, где минимальное локальное  $p$ -значение сигнала меньше или равно  $p$ . Описанный способ определения глобальной статистической значимости при поиске периодичности применен в работе (Фрескура и др., 2008). На рис. 6 показано распределение логарифма минимальных локальных  $p$ -значений (с обратным знаком), достигаемых в симулированных кривых блеска. Вертикальной линией обозначено локальное  $p$ -значение сигнала, достигаемое в наблюдаемой кривой блеска на периоде 49 нед. Глобальная значимость этого сигнала оказывается равной 0.02 ( $2.1\sigma$ ).

Как следует из рис. 4, за максимальным пиком в периодограмме следуют еще несколько равноотстоящих пиков. Когда сигнал состоит из узких равноотстоящих всплесков, периодограмма может выявлять не только период, равный наименьшему расстоянию между всплесками, но и кратные ему<sup>3</sup>. Поэтому, полагая, что равноотстоящие пики в периодограмме могут быть “гармониками” одного и того же периодического сигнала и давать вклад в его глобальную значимость, мы несколько модифицировали описанный выше метод, чтобы учесть одновременно значимость главного (максимального) пика и его возможной гармоник. Пусть минимальное локальное  $p$ -значение сигнала достигается на периоде  $P$  и равно  $p_1$ . Пусть также локальное  $p$ -значение сигнала на периоде  $2P$  равно  $p_2$ . Теперь мы оцениваем глобальную значимость не по распределению минимальных локальных  $p$ -значений, а по распределению значений  $p_1 \cdot p_2$ , вычисленных для каждой симулированной кривой блеска, по следующему алгоритму: 1) в каждом симулированном ряду данных определяется период  $P_{\text{max}}$ , для

<sup>2</sup> <https://github.com/samconnolly/DELIGHTCURVESIMULATION>

<sup>3</sup> Условно назовем их “гармониками”.





**Рис. 7.** Распределение величины  $-\lg p_{P_{\max}}^{\text{loc}} \cdot p_{2P_{\max}}^{\text{loc}}$ . Вертикальная линия соответствует значению этой величины для наблюдаемой кривой блеска.

которого локальное  $p$ -значение минимально (оно равно  $p_{P_{\max}}^{\text{loc}}$ ); 2) определяется локальное  $p$ -значение сигнала на удвоенном периоде  $p_{2P_{\max}}^{\text{loc}}$ ; 3) по всем симуляциям строится распределение величины  $p_{P_{\max}}^{\text{loc}} \cdot p_{2P_{\max}}^{\text{loc}}$  и по нему определяется глобальная значимость, достигаемая в периодограмме для пульсарной туманности. На рис. 7 показано распределение логарифма величины  $p_{P_{\max}}^{\text{loc}} \cdot p_{2P_{\max}}^{\text{loc}}$  (с обратным знаком), а вертикальной линией обозначено значение, достигаемое в наблюдаемых данных. Его глобальная значимость оказалась на уровне 0.003 ( $2.7\sigma$ ).

Отметим, что найденный сигнал связан именно с пульсарной туманностью, а не самим пульсаром. Мы проделали описанный анализ для кривой блеска пульсара и не обнаружили значимого периодического сигнала; это неудивительно, поскольку пульсар не демонстрирует вспышек, а статистическая значимость оценивалась нами по симулированным кривым блеска, содержащим вспышки.

## РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

Наш анализ позволяет заподозрить некоторую периодичность в излучении туманности, причем эта периодичность связана со вспышками. На рис. 3 мы вертикальными линиями обозначили эпохи, разделенные найденным периодом 49 недель. Видно, что в некоторые из этих эпох действительно наблюдалось увеличение яркости туманности. Более того, если из данных исключить промежутки с мощными вспышками, то значимость найденного сигнала сильно уменьшится. Отметим, что некоторые из найденных ранее вспышек Крабовидной туманности (в апреле 2011 г., марте 2013 г., июне 2009 г.; см. Аракава и др., 2020) как раз попадают на периоды активности, отмеченные на рис. 3. Кроме того, мы можем сделать предсказание о последующих таких периодах активности, а именно, в

сентябре 2020 г., августе 2021 г. и августе 2022 г. Эфемериды пульсара на сентябрь 2020 г. появились, когда данная работа была отправлена в редакцию, поэтому эти данные не были использованы для анализа, но мы привели их на рис. 3 тонкими линиями для проверки предсказания. На эпоху повышенной активности не приходится какой-либо значительной вспышки, хотя через четыре недели имело место умеренное повышение потока. Однако, как видно из рис. 3, и в прошлом не всегда в эпоху повышенной активности случались мощные вспышки, поэтому для проверки гипотезы о периодичности следует дождаться нескольких следующих предсказанных эпох повышенной активности.

Обнаруженная периодичность в кривой блеска туманности может вызываться осцилляциями стоячей ударной волны пульсарного ветра, где происходит ускорение основной доли частиц, являющихся источником наблюдаемого синхротронного гамма-излучения. Такая интерпретация переменности была предложена в работах по численному моделированию излучения Крабовидной туманности (Камю и др., 2009; Порт и др., 2014), где в ходе двух- и трехмерных симуляций наблюдались квазипериодические изменения кривой блеска с квазипериодом  $P = 1.5\text{--}3$  г. Величина этого квазипериода определяется поперечником области ударной волны, который примерно равен световому году (Камю и др., 2009).

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Произведен поиск периодичности в излучении Крабовидной туманности в диапазоне энергий 100–300 МэВ за промежуток времени с августа 2008 по март 2020 г. С помощью метода дисперсионного анализа мы нашли указания на переменность с периодом  $\sim 49$  недель. Статистическая значимость обнаруженной периодичности была оценена с помощью Монте-Карло симуляций — на основании  $10^5$  реализаций кривой блеска  $p$ -значение сигнала было найдено равным  $3 \times 10^{-3}$ . Если обнаруженная периодичность является реальной, то новые фазы активности ожидаются в августе 2021 и 2022 гг.

Поддержано Минобрнауки РФ в рамках программы финансирования крупных научных проектов национального проекта “Наука” (грант 075-15-2020-778). Авторы благодарят за поддержку Фонд развития теоретической физики и математики “БАЗИС”. Обработка данных была выполнена на вычислительном кластере Отдела теоретической физики ИЯИ РАН.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абдо и др. (A. Abdo, M. Ackermann, M. Ajello, A. Allafort, L. Baldini, J. Ballet, et al.), *Science* **331** (6018), 739 (2011).
2. Абдоллахи и др. (S. Abdollahi, F. Acero, M. Ackermann, M. Ajello, W. Atwood, M. Axelsson, et al.), *Astrophys. J. Suppl. Ser.* **247** (1), 33 (2020).
3. Бюлер и др. (R. Buehler, J. Scargle, R. Blandford, L. Baldini, M. Baring, A. Belfiore, et al.), *Astrophys. J.* **749** (1), 26 (2012).
4. Вилсон-Ходж и др. (C. Wilson-Hodge, M. Cherry, G. Case, W. Baumgartner, E. Beklen, P. Narayana Bhat, et al.), *Astrophys. J. Lett.* **727** (2), L40 (2011).
5. Девор (J. Devor), *Astrophys. J.* **628** (1), 411 (2005).
6. Камю и др. (N. Camus, S. Komissarov, N. Bucciantini, and P. Hughes), *MNRAS* **400** (3), 1241 (2009).
7. Коннолли (S. Connolly) (2015).
8. Лайн и др. (A. Lyne, R. Pritchard, and F. Graham Smith), *MNRAS* **265**, 1003 (1993).
9. Ломб (N. Lomb), *Astrophys. Sp. Sci.* **39** (2), 447 (1976).
10. Порт и др. (O. Porth, S. Komissarov, and R. Kerrpens), *MNRAS* **438** (1), 278 (2014).
11. Пширков и др. (M. Pshirkov, B. Nizamov, A. Vykov, and Y. Uvarov), *MNRAS* **496** (4), 5227 (2020).
12. Скаргл (J. Scargle), *Astrophys. J.* **263**, 835 (1982).
13. Тавани и др. (M. Tavani, A. Bulgarelli, V. Vittorini, A. Pellizzoni, E. Striani, P. Caraveo, et al.), *Science* **331** (6018), 736 (2011).
14. Фостер (G. Foster), *Astron. J.* **112**, 1709 (1996).
15. Фрескура и др. (F. Frescura, C. Engelbrecht, and B. Frank), *MNRAS* **388** (4), 1693 (2008).
16. Хартман, Бакос (J. Hartman and G. Bakos), *Astronomy and Computing* **17**, 1 (2016).
17. Шварценберг-Черны (A. Schwarzenberg-Czerny), *MNRAS* **241**, 153 (1989).
18. Эмманулопулос и др. (D. Emmanoulopoulos, I. McHardy, and I. Papadakis), *MNRAS* **433** (2), 907 (2013).