

## ОБ ЭВОЛЮЦИИ ОРБИТ В ФОТОГРАВИТАЦИОННОЙ КРУГОВОЙ ЗАДАЧЕ ТРЕХ ТЕЛ. ВНУТРЕННЯЯ ЗАДАЧА

© 2021 г. А. В. Доброславский<sup>1\*</sup>, П. С. Красильников<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, Россия

Поступила в редакцию 14.12.2020 г.

После доработки 30.01.2021 г.; принята к публикации 02.02.2021 г.

Рассмотрена пространственная ограниченная круговая задача трех тел в нерезонансном случае. Предполагается, что пассивно гравитирующее тело (спутник) имеет большую парусность, поэтому учитывается световое давление. Изучение эволюции орбиты спутника проводится на основе схемы Гаусса: исследуются усредненные уравнения движений в кеплеровом фазовом пространстве, когда в качестве невозмущенной орбиты берется кеплеровский эллипс с фокусом в основном теле (Солнце), находящийся внутри сферы, радиус которой равен радиусу орбиты внешней планеты (внутренняя задача). Известно, что исследование усредненной модели в классическом случае, когда световым давлением пренебрегают, сталкивается с немалыми трудностями как при вычислении усредненной силовой функции, так и при анализе эволюционирующих орбит. Впервые показано, что дважды усредненная силовая функция допускает, на основе применения формулы Парсевалья, явное аналитическое представление через гипергеометрические (обобщенные гипергеометрические) функции, допускающие разложение в сходящиеся степенные ряды. Показано также, что усредненные уравнения движения, учитывающие дополнительное влияние светового давления, интегрируются по Лиувиллю (имеем три независимых первых интеграла в инволюции). Исследованы, при фиксированных значениях интеграла Лидова–Козаи, стационарные режимы колебаний в случае малых значений большой невозмущенной полуоси спутника (случай Хилла), их бифуркации в зависимости от коэффициента светового давления  $\delta$ . В плоскости кеплеровских элементов  $e, \omega$  построены фазовые портреты колебаний при разных значениях коэффициента светового давления. Описана перестройка портрета, обусловленная как бифуркациями положений равновесия, так и расщеплением сепаратрис. Показано, что расщепление сепаратрис приводит к изменению направления эволюции аргумента перицентра  $\omega$  на противоположное в случае ротационных движений.

*Ключевые слова:* световое давление, ограниченная пространственная задача трех тел, искусственный спутник Солнца.

DOI: 10.31857/S0320010821040069

### ВВЕДЕНИЕ

Световое давление имеет существенное значение при расчете параметров движения небесных объектов с большим отношением площади миделева сечения к массе. Впервые с необходимостью учитывать этот эффект столкнулись в расчетах, связанных со спутником Vanguard I в работе Мюзена (1960) и Паркинсона и др. (1960), когда для объяснения деградации орбиты потребовалось учесть и световое давление на спутник. Большую роль световое давление сыграло при исследовании движения спутников-баллонов Echo 1, Echo 2 и PAGESOS, чему посвящен целый ряд работ, среди которых следует упомянуть работу Козаи (1961),

где было решено уравнение тени, работу Феррас-Мелло (1964), в которой предложено учитывать заход спутника в тень путем введения теневой функции, и работы Вашковьяк (1974, 1976), в которых было предложено теневую функцию рассчитывать в виде ряда по полиномам Лежандра и выражать через элементы орбиты, в результате чего были получены вековые и долгопериодические возмущения элементов орбиты под влиянием светового давления. В монографии (Аксёнов, 1977) исследовано влияние светового давления и земной тени на эволюцию кеплеровских элементов орбиты в первом приближении метода малого параметра.

Исследование движения объектов большой парусности приобретает особое значение в связи с космическим мусором, движущимся на высоких орбитах. Так, в работе Кривова и др. (1995), наряду с возмущениями от зональных гармоник, рас-

\* Электронный адрес: a.dobroslavskiy@gmail.com

смотрены возмущения от сил светового давления. Эта же задача, но дополненная возмущениями от электромагнитных сил, рассматривается в работе Гамильтона, Кривова (1996).

В августе 2018 г. стартовала миссия Parker Solar Probe (Сабо, 2018) в задачи которой входит изучение солнечной короны. По своим параметрам зонд соответствует объектам с большим отношением площади миделева сечения к массе.

Для исследования орбит вышеупомянутых объектов на значительных временных промежутках применяется, в частности, метод усреднения, приложения которого к классической задаче трех тел были подробно разобраны в статье Моисеева (1945). Брайант (1961), используя идеи метода усреднения, описал явное изменение большой полуоси за период обращения спутника по орбите с учетом светового давления и эффекта тени. Он показал также, что при отсутствии тени большая полуось орбиты спутника сохраняет свое невозмущенное значение. В работах Лидова (1961, 1962) описана эволюция орбиты спутника планеты в рамках эллиптической задачи трех тел для случая Хилла (случай малого отношения большой невозмущенной полуоси орбиты спутника к радиусу орбиты планеты); был описан эффект падения спутника на центральное тело, когда плоскость орбиты спутника перпендикулярна плоскости орбиты возмущающего тела. В работе Козаи (1962) получено приближенное выражение для дважды усредненной возмущающей силовой функции в астероидной круговой задаче трех тел, вычислены значения критических наклонений орбит. В работе Сидоренко (2018) исследуется эксцентриситетский эффект Лидова–Козаи, который может быть интерпретирован как резонансный эффект. Аксёнов (1967) получил аналитическое выражение для дважды усредненной возмущающей силовой функции в круговой задаче трех тел в виде ряда Фурье, коэффициенты которого выражаются через специальные функции, записанные в виде квадратур. В этой же работе дано обоснование методу усреднения Гаусса, заменяющему процедуру усреднения по средней аномалии движения планеты равномерным размазыванием массы планеты по ее орбите. В работах Аксёнова (1979а,б) исследована плоская ограниченная эллиптическая задача трех тел методом двойного усреднения, изучена эволюция траекторий движения спутника, в частности, описаны траектории его падения на центральное тело. Топология движений в усредненной круговой задаче трех тел (внутренняя задача) исследована численно в замечательной работе Вашковьяка (1981).

Заметим также, что метод усреднения эффективно используется и в задачах о вращательных

движениях спутников на эволюционирующих орбитах: усреднение используется в статьях Тихонова и др. (2017) и Александрова, Тихонова (2020) при исследовании устойчивости программного вращательного движения спутника вокруг его центра масс на эволюционирующей орбите. Использование метода функций Ляпунова в сочетании с приемом усреднения уравнений вращательного движения спутника эффективно применялось для обоснования асимптотической устойчивости стабилизированного движения (Александров, Тихонов, 2020). В статье Амелькина (2019) методом усреднения определено среднее смещение перигелия Меркурия в плоской планетной задаче.

Авторами статьи ранее была исследована задача трех тел с учетом светового давления в плоской эллиптической задаче трех тел (Доброславский, Красильников, 2018). К сожалению, при записи силовой функции светового давления была допущена ошибка<sup>1</sup>, как следствие, появились лишние равновесия  $e = \text{const}, \omega = \pi/2$ ; остальные результаты изменились мало. В следующей статье (Доброславский, Красильников, 2020), посвященной уже задаче четырех тел (Земля–Луна–Солнце–спутник Земли), учитывающей световое давление, построены фазовые портреты колебаний в кеплеровских элементах орбиты, изучена перестройка фазовых портретов при разных значениях коэффициента светового давления. В указанных работах эффект захода в земную тень не учитывался в силу того, что при значении большой полуоси эллиптической орбиты спутника, сравнимом с соответствующим параметром Луны и превышающим его, среднее время пребывания спутника в тени составляет порядка 0.62% за виток (Доброславский, 2020).

Цель данной работы — исследовать эволюцию пространственных орбит близкого спутника звезды (солнечного зонда) с учетом возмущений от внешней планеты (Юпитера) и от солнечного давления.

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим круговую пространственную ограниченную задачу трех тел с учетом сил светового давления  $\mathbf{F}_\lambda$ . Предположим, что пассивно гравитирующее тело (спутник)  $P$ , имея большое отношение площади поверхности к собственной массе, находится в гравитационном поле двух массивных тел, движущихся друг относительно друга по круговой орбите радиуса  $r_J$ ; центральное тело  $S$  (Солнце) имеет массу  $m_S$  и воздействует на спутник с силой  $\mathbf{F}_S$ , второе тело  $J$  (Юпитер) массы  $m_J$  оказывает возмущающее действие с силой  $\mathbf{F}_J$ . Считаем, что

<sup>1</sup>Проф. Н.И. Амелькин любезно указал на нее.

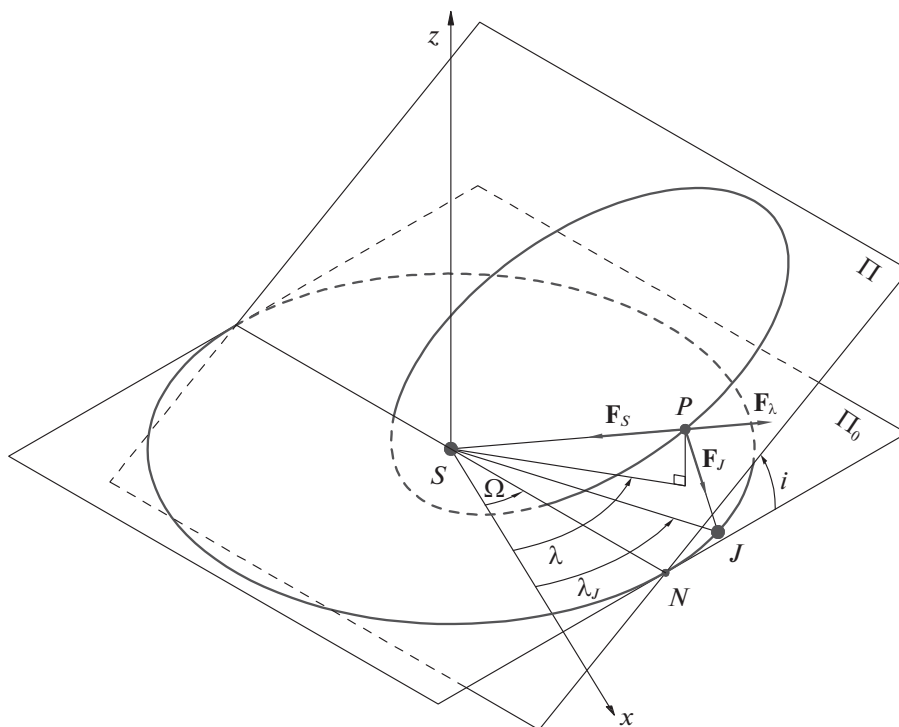


Рис. 1. Невозмущенные траектории небесных тел. Угловые переменные.

невозмущенная траектория спутника есть кеплеровский эллипс с фокусом в  $S$ , плоскость которого  $\Pi$  образует с плоскостью движения  $\Pi_0$  притягивающих тел угол  $i$  (рис. 1).

Заметим, что в классическом случае, когда световое давление на спутник пренебрежимо мало, задача подробно исследована в статье (Вашковьяк, 1981). Цель нашей статьи — описать новые эффекты в усредненном движении спутника, вызванные световым давлением.

Введем гелиоцентрическую систему координат с центром в  $S$ . Ось  $Sx$  направим в точку весеннего равноденствия,  $SN$  — линия узлов орбиты спутника, остальные оси, образующие правую систему координат, на рис. 1 не указаны. Пусть  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор тела  $P$ ,  $\mathbf{r}_J$  — радиус-вектор тела  $J$ .

Пусть  $\Omega$  — долгота восходящего узла невозмущенной орбиты спутника на плоскости  $\Pi_0$ ,  $e$ ,  $\omega$  — эксцентриситет и аргумент перигея этой орбиты,  $\lambda_J$  — долгота тела  $J$ , а  $\lambda$  — долгота тела  $P$  в плоскости  $\Pi_0$ .

Рассмотрим “внутренний” вариант задачи трех тел, когда движение тела  $P$  происходит внутри сферы радиуса  $r_J$ :

$$a(1 + e) < r_J.$$

Здесь  $a$  — большая полуось невозмущенной орбиты спутника.

Запишем выражение для возмущенной силовой функции задачи:

$$R = R_J + R_S. \tag{1}$$

Здесь  $R_J$  — силовая функция гравитационного воздействия со стороны тела  $J$ , имеющая вид

$$R_J = fm_J \left( \frac{1}{\Delta} - \frac{(\mathbf{r}_J, \mathbf{r})}{r_J^3} \right), \tag{2}$$

$$\Delta = r_J \sqrt{1 - 2 \left( \frac{r}{r_J} \right) \cos \gamma + \left( \frac{r}{r_J} \right)^2},$$

где  $f$  — постоянная тяготения,  $\gamma$  — угол между  $\mathbf{r}_J$  и  $\mathbf{r}$ ,

$$\cos \gamma = \cos(\lambda_J - \Omega) \cos(\omega + \nu) + \sin(\lambda_J - \Omega) \sin(\omega + \nu) \cos i, \tag{3}$$

$\nu$  — истинная аномалия в движении спутника вдоль невозмущенной орбиты.

Функция (2) может быть разложена в ряд по полиномам Лежандра с точностью до членов, не зависящих от координат тела  $P$ :

$$R_J = \frac{fm_J}{r_J} \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{r}{r_J} \right)^n P_n(\cos \gamma).$$

Силовая функция светового давления на сферический спутник, находящийся на круговой орбите,

может быть представлена в виде

$$R_S = -\frac{\delta r_0^2}{r}.$$

Здесь  $\delta > 0$  — коэффициент светового давления (Аксёнов, 1977)

$$\delta = \frac{\varkappa \pi \rho^2 E_0}{mc}, \quad (4)$$

$\rho$  — радиус поверхности спутника,  $m$  — его масса,  $\varkappa$  — коэффициент отражения поверхности спутника, равный 1 для полного поглощения или отражения света, и 1.44 для диффузного рассеивания.  $E_0$  — солнечная постоянная, определенная как мощность светового потока на расстоянии  $r_0$  (1 а.е.) от Солнца (приблизительно 1367 Вт/м<sup>2</sup>),  $c$  — скорость света в вакууме.

Тогда, с учетом выражений для  $R_J$  и  $R_S$ , силовая функция задачи принимает вид:

$$R = -\frac{\delta r_0^2}{r} + \frac{f m_J}{r_J} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{r}{r_J}\right)^n P_n(\cos \gamma). \quad (5)$$

### УСРЕДНЕНИЕ СИЛОВОЙ ФУНКЦИИ

Известно, что долгота  $\lambda$  тела  $P$  в плоскости эллиптики описывается формулами (Аксёнов, 1967)

$$\begin{aligned} \cos \lambda &= \frac{\cos(\nu + \omega)}{\sqrt{1 - \sin^2 i \sin^2(\nu + \omega)}}, \\ \sin \lambda &= \frac{\sin(\nu + \omega) \cos i}{\sqrt{1 - \sin^2 i \sin^2(\nu + \omega)}}. \end{aligned}$$

Тогда (3) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \cos \gamma &= \cos(\lambda_J - \Omega - \lambda) \times \\ &\times \sqrt{1 - \sin^2 i \sin^2(\nu + \omega)}. \end{aligned} \quad (6)$$

Для преобразования выражения (5) к удобному для усреднения виду воспользуемся теоремой сложения для полиномов Лежандра. С учетом (6) будем иметь

$$\begin{aligned} P_n(\cos \gamma) &= P_n(0) P_n[\sin i \sin(\nu + \omega)] + \\ &+ 2 \sum_{k=1}^n \frac{(n-k)!}{(n+k)!} P_n^{(k)}(0) P_n^{(k)}[\sin i \sin(\nu + \omega)] \times \\ &\times \cos k(\lambda_J - \Omega - \lambda). \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь  $P_n^{(k)}$  — присоединенные функции Лежандра, представимые в нуле следующим образом:

$$P_n^{(k)}(0) = \begin{cases} (-1)^{(n-k)/2} \frac{(n+k)!}{2^n \left(\frac{n-k}{2}\right)! \left(\frac{n+k}{2}\right)!}, \\ n-k = 2m, \quad m \in \mathbb{Z}, \\ 0, \quad n-k = 2m+1, \quad m \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Далее считаем, что частота  $\dot{\lambda}_J$  не резонирует с частотой  $n$  невозмущенного движения спутника. Проводя усреднение (5) по долготе  $\lambda_J$  тела  $J$ , получим, с учетом (3), (7) и равенства  $P_{2n+1}(0) = 0$ , однократно усредненную силовую функцию  $R^*$  задачи

$$\begin{aligned} R^* &= \frac{1}{2\pi} \times \\ &\times \int_0^{2\pi} \left[ -\frac{\delta r_0^2}{r} + \frac{f m_J}{r_J} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{r}{r_J}\right)^n P_n(\cos \gamma) \right] d\lambda_J = \\ &= -\frac{\delta r_0^2}{r} + \frac{f m_J}{r_J} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{r_J}\right)^{2n} \times \\ &\times P_{2n}(0) P_{2n}[\sin i \sin(\nu + \omega)]. \end{aligned} \quad (8)$$

Выражение (8) совпадает с точностью до члена, учитывающего световое давление, с силовой функцией кольца Гаусса (Дубошин, 1961), что было впервые установлено в работе Аксёнова (1967).

Усредним теперь полученное выражение (8) по истинной аномалии  $\nu$  тела  $P$ . Для этого необходимо записать выражение для  $r$  через истинную аномалию  $\nu$ , используя формулы невозмущенного движения, и подставить в (8). Вычисления показывают, что функция  $R^*$  содержит под знаком суммы произведение двух периодических по  $\nu$  функций:  $(1 + e \cos \nu)^{-2n}$  и  $P_{2n}(\sin i \cos \theta)$ , где  $\theta = \nu + \omega - \pi/2$ . Основная техническая проблема исследований — подсчитать среднее от этого произведения. Современные программные комплексы, такие как Wolfram Mathematica и Maple, с этой задачей не справляются. Для этого воспользуемся формулой Парсевалья (Градштейн, 1963), описывающей главный (секулярный) член произведения двух рядов Фурье:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (1 + e \cos \nu)^{-2n} \times \\ &\times P_{2n}(\sin i \cos \theta) d\nu = \\ &= \frac{a_0 \alpha_0}{4} + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \alpha_m + b_m \beta_m). \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь  $\{a_0, a_m, b_m\}$  — коэффициенты Фурье функции  $(1 + e \cos \nu)^{-2n}$ ,  $\{\alpha_0, \alpha_m, \beta_m\}$  — коэффициенты Фурье функции  $P_{2n}(\sin i \cos \theta)$ . Выражения для этих коэффициентов имеют вид

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (1 + e \cos \nu)^{-2n} d\nu = \quad (10)$$

$$= \frac{2}{(1-e)^{2n}} F_{2,1} \left( \frac{1}{2}, 2n; 1; \frac{2e}{e-1} \right),$$

$$a_m = \frac{2}{(1-e)^{2n}} \times$$

$$\times F_{3,2}^{\text{reg}} \left( \frac{1}{2}, 1, 2n; 1-m, 1+m; \frac{2e}{e-1} \right),$$

$$b_m = 0,$$

$$\alpha_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} P_{2n}(\sin i \cos \theta) d\nu = \quad (11)$$

$$= 2P_{2n}(0)P_{2n}(\cos i),$$

$$\alpha_m = \begin{cases} 2 \cos \left( \frac{m\pi}{2} - m\omega \right) \frac{(2n-m)!}{(2n+m)!} \times \\ \times P_{2n}^{(m)}(0)P_{2n}^{(m)}(\cos i), & m \leq 2n, \\ 0, & m > 2n, \end{cases}$$

$$\beta_m = 0.$$

В итоге дважды усредненная возмущенная силовая функция принимает вид

$$R^{**} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} R^* d\nu = -\frac{\delta r_0^2}{a(1-e^2)} + \quad (12)$$

$$+ \frac{fm_J}{r_J} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{a(1-e^2)}{r_J} \right]^{2n} \times$$

$$\times P_{2n}(0) I_{2n}(i, e, \omega).$$

Здесь

$$I_{2n}(i, e, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (1 + e \cos \nu)^{-2n} \times \quad (13)$$

$$\times P_{2n}(\sin i \cos \theta) d\nu = \frac{1}{(1-e)^{2n}} \times$$

$$\times \left[ P_{2n}(0)P_{2n}(\cos i)F_{2,1} \left( \frac{1}{2}, 2n; 1; \frac{2e}{e-1} \right) + \right.$$

$$\left. + 2 \sum_{m=1}^{2n} F_{3,2}^{\text{reg}} \left( \frac{1}{2}, 1, 2n; 1-m, 1+m; \frac{2e}{e-1} \right) \times \right.$$

$$\left. \times \cos \left( \frac{m\pi}{2} - m\omega \right) \frac{(2n-m)!}{(2n+m)!} P_{2n}^{(m)}(0)P_{2n}^{(m)}(\cos i) \right],$$

$F_{2,1}$  — гипергеометрическая функция, а  $F_{3,2}^{\text{reg}}$  — обобщенная регуляризованная гипергеометрическая функция, имеющая вид

$$F_{3,2}^{\text{reg}}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3; \beta_1, \beta_2; z) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_k (\alpha_2)_k (\alpha_3)_k}{\Gamma(\beta_1+k) \Gamma(\beta_2+k) k!} z^k,$$

где  $\Gamma(a)$  — гамма-функция,  $(x)_k$  — символ Похгаммера:

$$(x)_k = \frac{\Gamma(x+k)}{\Gamma(x)}.$$

Достоверность формулы (13) была подтверждена численно — результаты вычислений левой и правой частей формулы совпадают по всем значащим цифрам для следующего декартового произведения значений параметров:  $e$  от 0 до 1 с шагом 0.1,  $\omega$  от 0 до  $2\pi$  с шагом  $\pi/6$ ,  $i$  от  $-\pi/2$  до  $\pi/2$  с шагом  $\pi/6$  и  $n$  от 1 до 15 с шагом 1.

Выражение для усредненной силовой функции (12), (13) можно разложить в ряд Фурье по  $\omega$ . Вычисления показывают, что этот ряд имеет вид

$$R^{**} = -\frac{\delta r_0^2}{a(1-e^2)} + \quad (14)$$

$$+ \frac{fm_J}{r_J} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ B_{2n}(e)P_{2n}(0)P_{2n}(\cos i) \times \right.$$

$$\times F_{2,1} \left( \frac{1}{2}, 2n; 1; \frac{2e}{e-1} \right) +$$

$$\left. + (-1)^n \left( \sum_{k=n}^{\infty} B_{2k}(e)A_{2n}^{(2k)}(e, \cos i) \right) \cos 2n\omega \right].$$

Здесь

$$B_{2k}(e) = \frac{a^{2k}(1+e)^{2k}}{r_J^{2k}} P_{2k}(0),$$

$$A_{2n}^{(2k)}(e, \cos i) =$$

$$= \begin{cases} 2F_{3,2}^{\text{reg}} \left( \frac{1}{2}, 1, 2k; 1-2n, 1+2n; \frac{2e}{e-1} \right) \times \\ \times \frac{(2k-2n)!}{(2k+2n)!} P_{2k}^{(2n)}(0)P_{2k}^{(2n)}(\cos i), \\ 1 \leq n \leq k, \\ 0, & n > k. \end{cases}$$

При выводе формулы (14) мы воспользовались известным равенством  $P_{2k}^{(2n+1)}(0) = 0$ , обнуляющим члены, содержащие  $\sin 2n\omega$ .

Здесь следует отметить, что аналитическое представление дважды усредненной силовой функции задачи в виде ряда Фурье по  $\omega$  впервые получено в работе Аксёнова (1967). Коэффициенты этого ряда автор статьи выразил через некоторые неизвестные специальные функции, имеющие вид квадратур. К сожалению, квадратуры не были разложены в сходящиеся ряды, автор ограничился

описанием рекуррентных соотношений для квадратур. Поэтому использовать результаты статьи Е.П. Аксёнова в аналитических исследованиях крайне затруднительно.

### УСРЕДНЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЙ

Усредненные уравнения в оскулирующих переменных (уравнения Лагранжа) имеют вид (Дубошин, 1968)

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= 0, \\ \frac{de}{dt} &= -\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \frac{\partial R^{**}}{\partial \omega}, \\ \frac{di}{dt} &= \frac{\operatorname{ctg} i}{na^2\sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R^{**}}{\partial \omega}, \\ \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{\operatorname{cosec} i}{na^2\sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R^{**}}{\partial i}, \\ \frac{d\omega}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \frac{\partial R^{**}}{\partial e} - \frac{\operatorname{ctg} i}{na^2\sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R^{**}}{\partial i}. \end{aligned} \quad (15)$$

Первые интегралы системы описываются равенствами

$$a = c_0, \quad (1 - e^2) \cos^2 i = c_1, \quad R^{**} = c_2.$$

Второй из этих интегралов принято называть интегралом Лидова–Козаи. Заметим, что впервые интеграл был получен в работе фон Цейпеля (1910), позже — в статье Моисеева (1945). С его помощью исключаем угол  $i$ :

$$i = \arccos \left( \pm \sqrt{\frac{c_1}{1-e^2}} \right),$$

из усредненной силовой функции  $R^{**}$  получаем редуцированную систему уравнений с одной степенью свободы:

$$\frac{de}{dt} = -\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \frac{\partial \hat{R}}{\partial \omega}, \quad \frac{d\omega}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \frac{\partial \hat{R}}{\partial e}. \quad (16)$$

Силовая функция  $\hat{R} = \hat{R}(e, \omega)$  — результат исключения угла  $i$ . Очевидно, что интеграл энергии уравнений (16) имеет вид  $\hat{R}(e, \omega) = \text{const}$ .

Из интеграла Лидова–Козаи следует ограничение на область изменения оскулирующего эксцентриситета орбиты:  $0 \leq e \leq \sqrt{1-c_1}$ .

### КАЧЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ

Для проведения качественного анализа отметим прежде всего, что многообразия  $e = 0$ ,  $e = \sqrt{1-c_1}$

являются интегральными в редуцированной системе уравнений (16). Действительно, производная от  $\hat{R}$  по  $\omega$  имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{R}}{\partial \omega} &= -\frac{fm_J}{r_J} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \times \\ &\times 2n \left( \sum_{k=n}^{\infty} B_{2k}(e) A_{2n}^{(2k)}(e, \cos i) \right) \sin 2n\omega. \end{aligned}$$

Она обращается в ноль при  $e = \sqrt{1-c_1}$ , так как при этом  $\cos i = \pm 1$ , а  $A_{2n}^{(2k)}(e, \pm 1) = 0$ . Интегральность многообразия  $e = 0$  следует из разложения этой производной в ряд по  $e$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{R}}{\partial \omega} &= -\frac{fm_J}{r_J} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \times \\ &\times 4n \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} \left( \frac{a}{r_J} \right)^{2k} \frac{(2k-2n)!}{(2k+2n)!} \times \right. \\ &\times P_{2k}(0) P_{2k}^{(2n)}(0) P_{2k}^{(2n)}(\cos i) \times \\ &\times \left[ \frac{1}{\Gamma(1-2n)\Gamma(1+2n)} + \left( \frac{2k}{\Gamma(1-2n)\Gamma(1+2n)} - \right. \right. \\ &\left. \left. - \frac{2k}{\Gamma(2-2n)\Gamma(2+2n)} \right) e + O(e^2) \right] \left. \right\} \sin 2n\omega. \end{aligned}$$

Действительно, коэффициенты при  $e^0, e^1$  обращаются в ноль, так как целые числа  $m = 0, -1, -2, \dots$  являются полюсами первого порядка гамма-функции  $\Gamma(z)$ . Как следствие, производная равна нулю при  $e = 0$ .

Отсюда получаем

$$\frac{\partial \hat{R}}{\partial \omega} \sim e^2 \sin 2\omega.$$

Отметим, что ранее это отношение было получено в работе Зиглина (1976) с помощью специального преобразования усредненной силовой функции, не имеющей явного описания в конечном виде, и представленной в виде квадратуры по средней долготе точки  $P$ .

Разложим редуцированную функцию  $\hat{R}(e, \omega)$  в ряд по  $(a/r_J)$  и удержим члены до второго порядка включительно:

$$\begin{aligned} \hat{R}^{(2)} &= -\frac{\delta r_0^2}{a(1-e^2)} - \frac{fm_J a^2}{8r_J^3} \times \quad (17) \\ &\times \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \left\{ \left[ 6(1-e^2)^{3/2} + 9e^2 - 6 \right] \times \right. \\ &\times \left. \left( \frac{c_1 - 1}{e^2} + 1 \right) \cos 2\omega - 3c_1 - e^2 + 1 \right\}. \end{aligned}$$

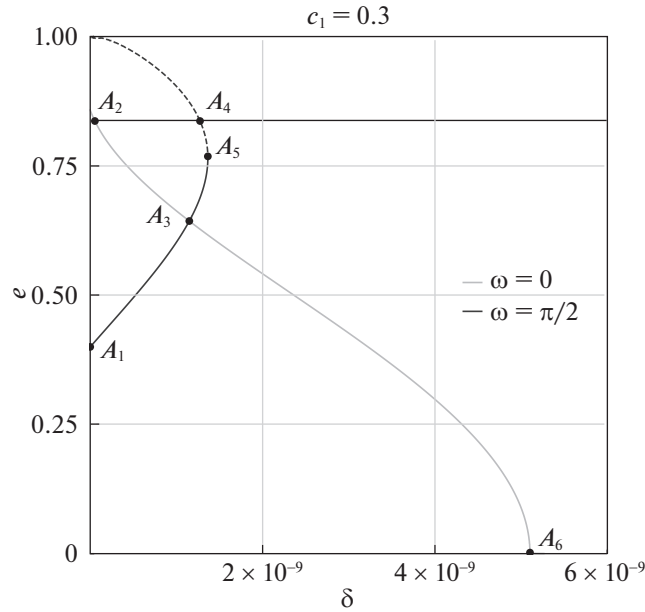


Рис. 2. Диаграмма равновесий при  $c_1 = 0.3$ .

Тогда уравнения стационарных точек, записанные с точностью до членов 5-го порядка малости по  $e$ , приводятся к виду

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{R}^{(2)}}{\partial e} &= \left\{ -\frac{2\delta}{a} + \right. & (18) \\ &+ \left. \frac{a^2 f m_J}{8r_J^3} \left[ -\frac{9}{2}(c_1 - 1) \cos 2\omega + 3c_1 + 1 \right] \right\} e + \\ &+ \left\{ -\frac{4\delta}{a} - \frac{a^2 f m_J}{16r_J^3} [6(2c_1 + 1) \cos 2\omega - \right. \\ &\quad \left. - 9c_1 - 1] \right\} e^3 + \dots = 0, \\ \frac{\partial \hat{R}^{(2)}}{\partial \omega} &= \frac{3a^2 f m_J}{16r_J^3} [3(c_1 - 1)e^2 + \\ &+ (2c_1 + 1)e^4 + \dots] \sin 2\omega = 0. \end{aligned}$$

Множество стационарных решений имеет вид  $e = e(\delta, \omega, c_1)$ ,  $\omega = \{0, \pi/2\}$ . Следующие результаты имеют место для параметров  $a, e$  из диапазона  $0 \leq a/r_J \leq 0.5$ ,  $0 \leq e < 1$ . Кривые равновесий  $e(\delta, \omega, c_1)$  построены при разных значениях  $\omega$  и фиксированном  $c_1$  (рис. 2) для системы Солнце–Юпитер–спутник, когда  $a/r_J = 0.384$ ,  $m_J = 0.00095$ ,  $r_J = 5.204$  а.е.,  $c_1 = 0.3$ ,  $0 \leq e \leq 1$ ,  $0 \leq \delta \leq 6 \times 10^{-9}$ . На этом рисунке указаны некоторые реперные точки  $A_j$  с координатами  $(\delta_j, e_j)$ :  $A_1 = (0, 0.3998)$ ,  $A_2 = (0.054 \times 10^{-9}, 0.83666)$ ,  $A_3 = (1.15 \times 10^{-9}, 0.6432)$ ,  $A_4 = (1.274 \times 10^{-9}, 0.83666)$ ,  $A_5 = (1.365 \times 10^{-9}, 0.7683)$ ,  $A_6 = (5.102 \times 10^{-9}, 0)$ .

Удержание большего количества членов по  $e$  в (18) мало меняет картину: было проведено численное сравнение полученных результатов с результатами расчетов уравнений (18), содержащих члены до 7-го порядка малости по  $e$  включительно, и показано, что кривые равновесий на рис. 2 незначительно сместились в сторону возрастания по оси эксцентриситета  $e$ .

Для стационарных значений  $e, \omega$  долгота восходящего угла  $\Omega$  находится квадратурой из соответствующего уравнения системы (16). Видно, что

$$\Omega = \Omega_0 - \frac{2\sqrt{c_1}}{na^2} \text{sign}(\cos i) \frac{\partial \hat{R}}{\partial c_1} t.$$

Таким образом, стационарным решениям уравнений (16) отвечают эллиптические орбиты с фокусом в основном притягивающем теле, имеющие постоянный угол наклона  $i$  по отношению к плоскости движения основных тел, медленно и равномерно прецессирующие вокруг нормали к этой плоскости. При этом большая полуось орбиты совпадает с линией узлов  $SN$  (случай  $\omega = 0$ ) во все время движений либо перпендикулярна ей (случай  $\omega = \pi/2$ ).

Точке  $A_5$  отвечает бифуркация типа “седло–узел”, неустойчивые равновесия выделены пунктиром. В точках  $A_2, A_4, A_6$  исчезают реальные равновесия, так как кривые равновесия уходят в мнимые области  $e > \sqrt{1 - c_1}$  либо  $e < 0$  (на рис. 2 показана вся кривая равновесий при  $\omega = \pi/2$ , содержащая куски, принадлежащие мнимой области  $e > \sqrt{1 - c_1}$  возможных движений). Точке  $A_3$  отвечают сразу две одинаковые прецессирующие

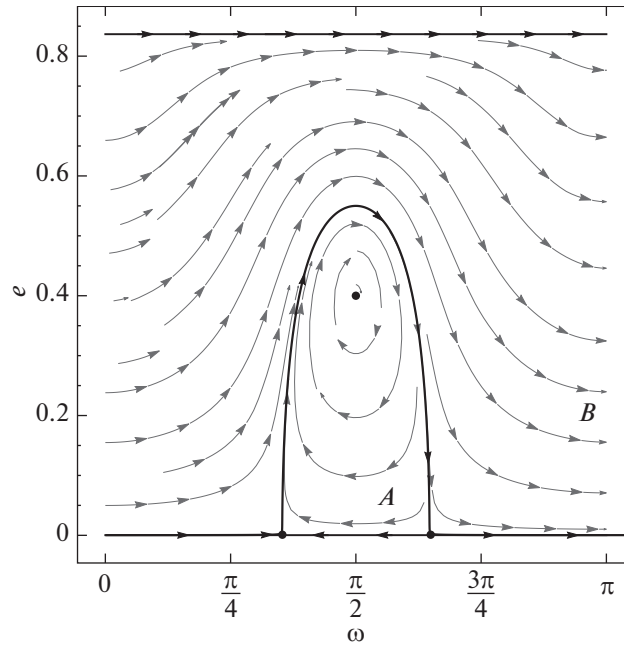


Рис. 3. Фазовый портрет при  $\delta = 0$ .

эллиптические орбиты с фокусом в Солнце, но с разными аргументами перигелия. Точке  $A_1$  соответствует равновесие классической задачи трех тел, когда  $\delta = 0$ .

Из рис. 2 следует, что на малом интервале  $(\delta_1, \delta_2) = (0, 0.054 \times 10^{-9})$  имеем одно устойчивое положение равновесия (случай  $\omega = \pi/2$ ). На интервале  $\delta \in (\delta_2, \delta_4) = (0.054 \times 10^{-9}, 1.274 \times 10^{-9})$  появляется второе устойчивое положение равновесия для значения параметра  $\omega = 0$ . На интервале  $\delta \in (\delta_4, \delta_5) = (1.274 \times 10^{-9}, 1.365 \times 10^{-9})$  появляется еще одно неустойчивое равновесие на кривой  $\omega = \pi/2$ . В точке бифуркации  $A_5$  два равновесия на кривой  $\omega = \pi/2$  сливаются в одно и далее пропадают. Так что на интервале  $\delta \in (\delta_5, \delta_6) = (1.365 \times 10^{-9}, 5.102 \times 10^{-9})$  остается единственное устойчивое равновесие, принадлежащее кривой  $\omega = 0$ , а при  $\delta \in (\delta_6, +\infty)$  положения равновесия исчезают полностью.

Для всех перечисленных интервалов по  $\delta$ , путем численного интегрирования уравнений (16), были построены фазовые портреты колебаний, изображенные на рис. 3–9. Результаты численного интегрирования были подтверждены построением линий уровня интеграла  $\hat{R}^{(2)}$ . Поскольку ряд Фурье для  $\hat{R}$  содержит только четные гармоники  $\cos 2n\omega$ , то интегральные кривые  $\hat{R} = h$  симметричны относительно  $\omega = \pi/2$ . Фазовый портрет на рис. 3 получен для значений параметров  $c_1 = 0.3$ ,  $a = 2$  а.е.,  $\delta = 0$  и качественно совпадает с фазовым портретом в статье (Вашковьяк, 1981). Эта картинка ка-

чественно сохраняется для любого  $\delta$  из интервала  $(\delta_1, \delta_2)$ . Здесь можно видеть стационарную точку типа центр с координатами  $e = 0.2472$ ,  $\omega = \pi/2$ . В области  $A$  наблюдаем либрационные движения линии апсид, в то же время в области  $B$  линия апсид совершает ротационное движение в сторону увеличения аргумента перигелия. На фазовом портрете изображены два интегральных многообразия  $e = 0$  и  $e = \sqrt{1 - c_1}$ , ограничивающие собой область возможных движений. Эти интегральные многообразия указаны также и на других фазовых портретах.

На фазовом портрете рис. 4, построенном для значений параметров  $c_1 = 0.3$ ,  $a = 2$  а.е.,  $\delta = 0.5 \times 10^{-9} \in (\delta_2, \delta_4)$ , присутствуют две стационарные точки типа “центр” для значений  $\omega = 0$  и  $\omega = \pi/2$ . В окрестности стационарных точек имеем либрационные движения, в области  $B$  — ротационные движения в сторону увеличения аргумента перигелия. При увеличении  $\delta$  наблюдаем вытягивание области  $A$  по вертикали вверх, до тех пор, пока верхняя точка этой области не коснется верхнего многообразия  $e = \sqrt{1 - c_1}$ . Точка касания, являющаяся равновесием на этом многообразии, раздваивается при дальнейшем увеличении параметра  $\delta$ , появляются две сепаратрисы (гетероклинические траектории), соединяющие нижние равновесия с верхними (рис. 5). Параметр  $\delta = 1.0352 \times 10^{-9}$  (см. рис. 5) является бифуркационным, так как ведет к расщеплению сепаратрис. Каждая из двух сепаратрис расщепляется на пару кривых так, что две вновь появившиеся кривые из области  $A$  стре-



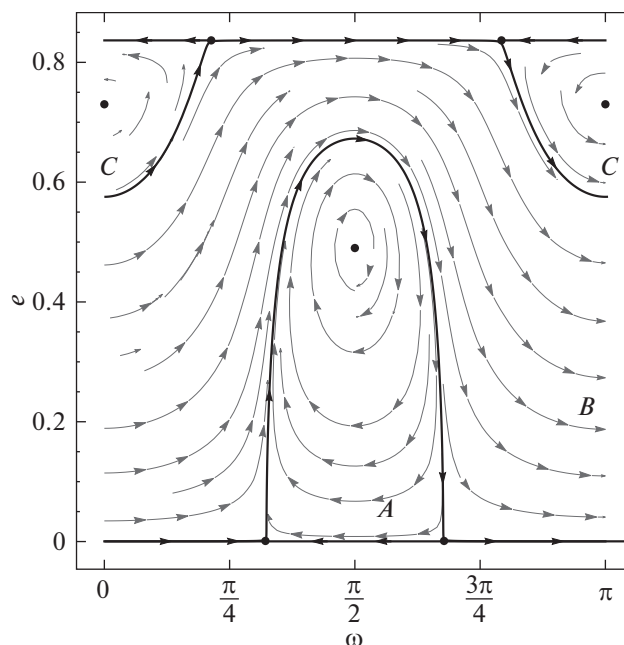


Рис. 4. Фазовый портрет при  $\delta = 0.5 \times 10^{-9}$ .

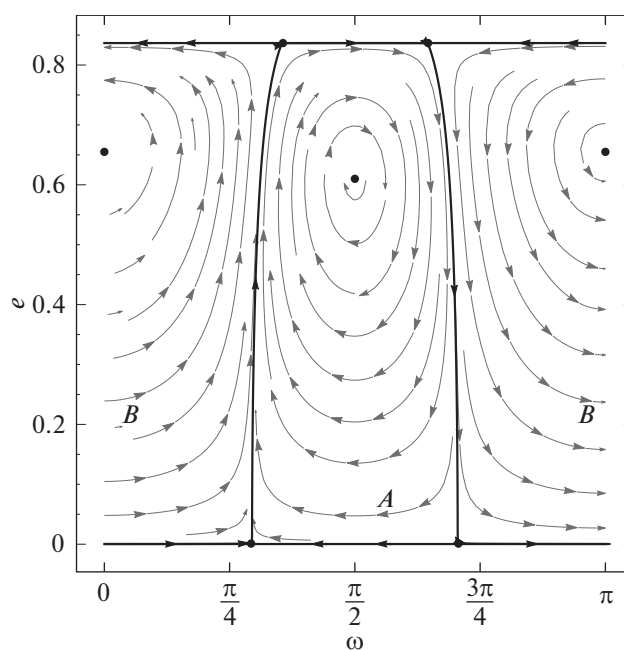


Рис. 5. Фазовый портрет при  $\delta = 1.0352 \times 10^{-9}$ .

мятся асимптотически (при  $t \rightarrow \pm\infty$ ) к верхним равновесиям, образуя единую кривую, ограничивающую новую либрационную область  $B$  (рис. 6). Пара крайних кривых, появившихся слева и справа от области  $A$  рис. 5, сохраняют асимптотическое стремление к нижним равновесиям при  $t \rightarrow \pm\infty$ , асимптотически приближаясь к многообразию  $e = \sqrt{1 - c_1}$  (рис. 6).

Описанное расщепление сепаратрис ведет к по-

явлению сначала узкой, а потом расширяющейся области ротационных движений, когда аргумент перигея  $\omega$  монотонно убывает. Вдоль этих траекторий движения орбита спутника медленно поворачивается в своей оскулирующей плоскости в направлении, противоположном случаю  $\delta = 0$ .

На фазовом портрете рис. 7, отвечающем случаю  $\delta = 1.3 \times 10^{-9} \in (\delta_4, \delta_5)$ , появляется дополнительно неустойчивая стационарная точка  $D$ , распо-

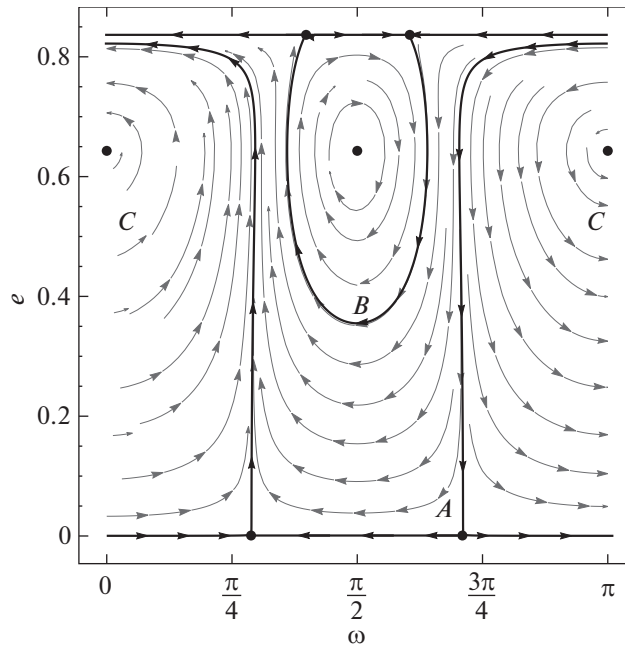


Рис. 6. Фазовый портрет при  $\delta = 1.1497 \times 10^{-9}$ .

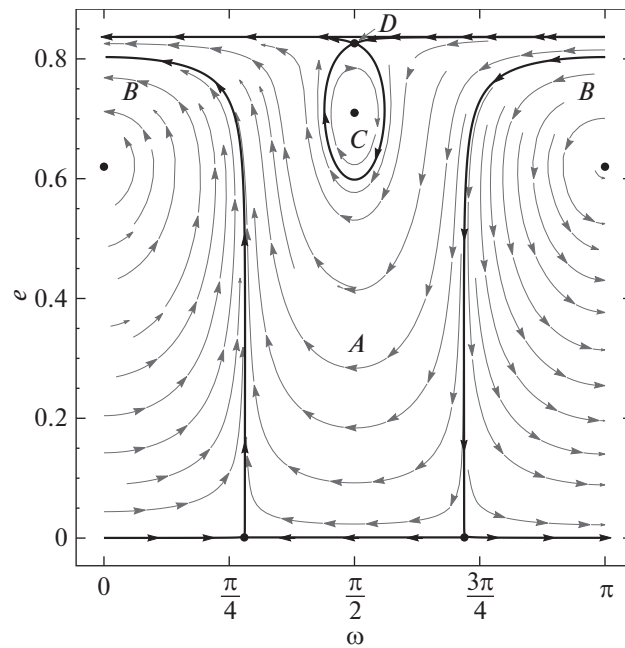


Рис. 7. Фазовый портрет при  $\delta = 1.3 \times 10^{-9}$ .

ложенная вблизи интегрального многообразия  $e = \sqrt{1 - c_1}$ . Дальнейшее увеличение  $\delta$  ведет к слиянию устойчивой и неустойчивой точек при  $\delta = 1.365 \times 10^{-9}$  и последующему их исчезновению при сохранении стационарной точки на второй ветви равновесий  $\omega = 0$  (рис. 8, случай  $\delta \in (\delta_5, \delta_6)$ ).

Для случая  $\delta > \delta_6$  фазовый портрет колебаний изображен на рис. 9. Он не содержит стационарных

точек, имеем вековой уход линии апсид в сторону уменьшения аргумента перицентра.

Показано, что члены четвертого и шестого порядков малости по  $a/r_J$  в редуцированной силовой функции  $\hat{R}$  практически не влияют на фазовый портрет колебаний, незначительно смещая точки равновесий по вертикальной прямой, мало меняя бифуркационные значения  $\delta$ .

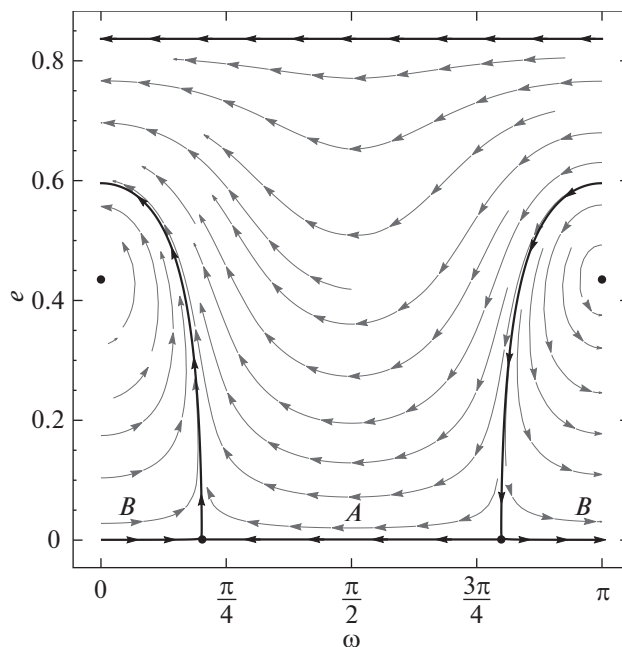


Рис. 8. Фазовый портрет при  $\delta = 2.88 \times 10^{-9}$ .

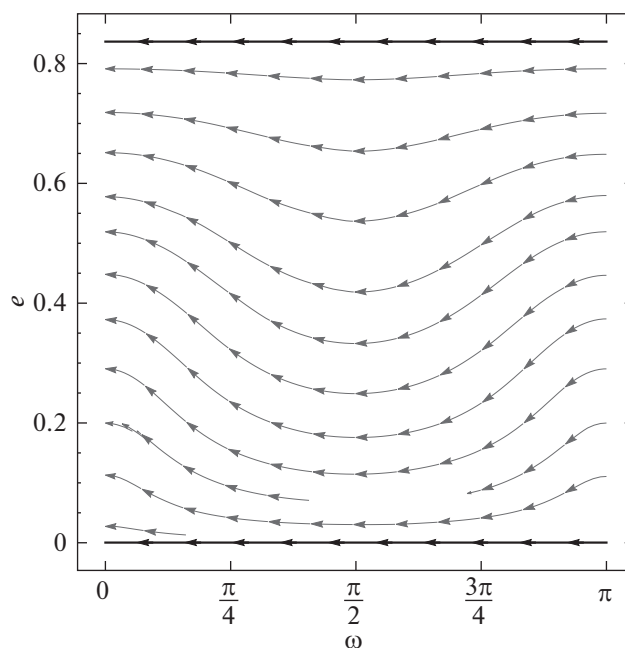


Рис. 9. Фазовый портрет при  $\delta = 5.5 \times 10^{-9}$ .

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы рассмотрели оскулирующие эллиптические движения астероида (солнечного зонда) бесконечно малой массы вокруг звезды (Солнца) под действием двух возмущений: гравитационного притяжения со стороны внешней планеты (Юпитера) и солнечного светового давления. Использована схема Гаусса двукратного усреднения возмущенной силовой функции задачи по долготе планеты

и истинной аномалии невозмущенного движения спутника. Впервые получено явное аналитическое выражение усредненной силовой функции в виде ряда Фурье, коэффициенты которого выражаются через известные специальные функции. Аналитическое выражение усредненной силовой функции позволяет быстро и эффективно получить любое приближение функции по малому параметру  $a/r_J$ , просто доказать интегральность некоторых много-

образий, в частности, интегральность многообразия  $e = \sqrt{1 - c_1}$  в редуцированной системе, что является новым результатом и в классической задаче трех тел.

Анализ эволюционных движений показал, что влияние солнечного давления весьма существенно уже при малых значениях коэффициента светового давления, когда  $\delta \sim 10^{-9}$ : в диапазоне  $0 \leq a/r_J \leq 0.5$ ,  $0 \leq e < 1$  появляется дополнительная ветвь семейства стационарных движений  $e(\delta) = \text{const}$ ,  $\omega = 0$ , наблюдается бифуркация равновесий типа “седло–узел” на ветви традиционного случая  $\omega = \pi/2$ , исчезают реальные равновесия, когда семейство стационарных точек выходит за границы области возможных движений.

Существенно осложняется фазовый портрет колебаний в сравнении с фазовым портретом оскулирующих движений в классической круговой задаче трех тел. К примеру, появляются седловые точки вблизи многообразия  $e = \sqrt{1 - c_1}$  в области  $(\delta_4, \delta_5)$ , наблюдается расщепление сепаратрис для значений параметра  $\delta$  из интервала  $(\delta_2, \delta_4)$ , что приводит к изменению направления эволюции аргумента перицентра  $\omega$  на противоположное в случае ротационных движений.

Указанные значения параметра  $\delta$  по порядку величины характерны для Parker Solar Probe. Таким образом, полученные результаты могут быть использованы при оценке параметров движения при учете светового давления на данный зонд.

Авторы признательны рецензенту за сделанные замечания.

Исследования выполнены в Московском авиационном институте при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 18-01-00820 А).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Аксенов Е.П., Тр. ун-та дружбы народов им. П. Лумумбы **21**, 184 (1967).
- Аксенов Е.П., *Теория движения искусственных спутников Земли* (М.: Наука, 1977), с. 360.
- Аксенов Е.П., Астрон. журн. **56**, 419 (1979а) [E.P. Aksekov, Sov. Astron. **23**, 236 (1979a)].
- Аксенов Е.П., Астрон. журн. **56**, 623 (1979б) [E.P. Aksekov, Sov. Astron. **23**, 351 (1979b)].
- Александров, Тихонов (А.Yu. Aleksandrov and A.A. Tikhonov), Aerospace Science and Technology **104** (2020).
- Амелькин Н.И., Докл. РАН **489**, 570 (2019) [N.I. Amel'kin, Doklady Physics **489**, 570 (2020)].
- Брайант (R.W. Bryant), Astron. J. **66**, 430 (1961).
- Вашковьяк М.А., Космич. исслед. **19**, 5 (1981).
- Вашковьяк С.Н., Вест. Моск. ун-та, Сер. 3. Физ. Астрон. **5**, 584 (1974).
- Вашковьяк С.Н., Астрон. журн. **53**, 1085 (1976) [S.N. Vashkov'yak, Sov. Astron. **20**, 615 (1976)].
- Гамильтон, Кривов (D.P. Hamilton and A.V. Krivov), Icarus **123**, 503 (1996).
- Градштейн И.С., Рыжик И.М., *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений* (М.: Физматгиз, 1963), с. 1100.
- Доброславский А.В., Красильников П.С., Письма в Астрон. журн. **44**, 618 (2018) [A.V. Dobroslavskiy and P.S. Krasilnikov, Astron. Lett. **44**, 567 (2018)].
- Доброславский А.В., Красильников П.С., Прикладная матем. и мех. **84**, 26 (2020) [A.V. Dobroslavskiy and P.S. Krasilnikov, Mechanics of Solids **55**, 999 (2020)].
- Доброславский (A.V. Dobroslavskiy), Cosmic Res. **58**, 501 (2020).
- Дубошин Г.Н., *Теория притяжения* (М.: Физматгиз, 1961), с. 288.
- Дубошин Г.Н., *Небесная механика. Основные задачи и методы* (М.: Наука, 1964), с. 800.
- Зиглин С.Л., *Исследование предельных случаев осредненной задачи трех тел*, (Диссертация на соискание степени кандидата физико-математических наук 01.02.01. Москва, 1976), с. 122.
- Козаи (Y. Kozai), Smithsonian Astrophys. Obs. Special Rept. **56**, 25 (1961).
- Козаи (Y. Kozai), Astron. J. **67**, 591 (1962).
- Кривов и др. (A.V. Krivov, L.L. Sokolov, and V.V. Dikarev), Celest. Mech. Dyn. Astron. **63**, 313 (1996).
- Лидов М.Л., Искусственные спутники Земли **8**, 5 (1961).
- Лидов (M.L. Lidov), Planet. Space Sci. **9**, 719 (1962).
- Моисеев Н.Д., Тр. ГАИШ **XV**, 100 (1945).
- Мюзен (P. Musen), J. Geophys. Res. **65**, 1391 (1960).
- Паркинсон и др. (R.W. Parkinson, H.M. Jones, and I.I. Shapiro), Science **131**, 920 (1960).
- Сабо (A. Szabo), Nat. Astron. **2**, 829 (2018).
- Сидоренко (V.V. Sidorenko), Celest. Mech. Dyn. Astron. **130**, 2 (2018).
- Тихонов и др. (A.A. Tikhonov, K.A. Antipov, D.G. Korytnikov, and D.Yu. Nikitin), Acta Astronautica **141**, 219 (2017).
- Феррас-Мелло (S. Ferraz-Mello), Comptes rendus de l'Académie des Sciences. Paris. **258**, 463 (1964).
- фон Цейпель (H. von Zeipel), Astronomische Nachrichten **183**, 345 (1910).