

# ПОСТРОЕНИЕ ШТЕККЕЛЕВСКОЙ МОДЕЛИ ГАЛАКТИКИ: РЕШЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ РЕАЛИСТИЧНОСТИ ВЕРТИКАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПЛОТНОСТИ

© 2021 г. А. О. Громов<sup>1\*</sup>, И. И. Никифоров<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия

Поступила в редакцию 31.01.2021 г.

После доработки 25.03.2021 г.; принята к публикации 30.03.2021 г.

Рассмотрены способы решения задачи построения штеккелевской модели путем обобщения потенциала из экваториальной плоскости на все пространство. Исходные модели потенциала в плоскости Галактики получены для трех выборок мазеров, основанных на каталогах Рида и др. (2019) и Коллаборации VERA и др. (2020), посредством оптимизации модельной кривой вращения. Показано, что штеккелевское обобщение исходных моделей приводит к нереалистичному вертикальному распределению плотности (сильно сжатое гало, недостаточно сжатый диск) независимо от используемой базы данных. Рассмотрено два способа решения проблемы. В первом, более простом, накладывались наблюдательные ограничения на закон плотности в диске и/или в гало, что привело лишь к частичному успеху для диска (приемлемое, но не произвольное сжатие). Во втором способе, более сложном, но более универсальном, для обобщения потенциала на все пространство использовался метод эквипотенциалей. Показано, что это позволяет управлять вертикальной структурой модели при штеккелевском разложении, комбинируя в модели составляющие различного заданного сжатия, в том числе сферические, а значит, решает проблему учета данных о вертикальной структуре Галактики при штеккелевском моделировании. Этим способом по мазерам и на основе кривой круговой скорости по данным о ярких красных гигантах (Айлерс и др., 2019) построен набор физически адаптированных трехкомпонентных (гало, тонкий диск, балдж/толстый диск) штеккелевских моделей Галактики при разных предположениях о вертикальной структуре ее составляющих.

*Ключевые слова:* штеккелевские модели потенциала, вертикальное распределение плотности, мазерные источники, красные гиганты, Галактика (Млечный Путь).

DOI: 10.31857/S0320010821050053

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Потенциалы, допускающие разделение переменных в уравнении Гамильтона–Якоби, а следовательно, и возможность его решения, традиционно вызывают интерес исследователей в области механики, в частности, звездной динамики. Решение этого уравнения позволяет описывать как движение отдельной звезды, так и статистические характеристики всей звездной системы, а потенциалы указанного типа дают возможность строить фазовые модели звездных систем.

Самой известной группой разделяющихся потенциалов являются потенциалы Штеккеля (1890), которые использовались им для решения механических задач, а в звездную динамику были введены Эддингтоном (1915). В эллиптических координатах

$\xi_1 \in [1, \infty)$ ,  $\xi_2 \in [-1, 1]$  таких, что

$$R = z_0 \sqrt{(\xi_1^2 - 1)(1 - \xi_2^2)}, \quad z = z_0 \xi_1 \xi_2,$$

где  $R$  и  $z$  — цилиндрические координаты, а  $z_0$  — параметр размерности длины, эти потенциалы представляются в виде

$$\Phi = \frac{\varphi_1(\xi_1) - \varphi_2(\xi_2)}{\xi_1^2 - \xi_2^2}, \quad (1)$$

где  $\varphi_1(\xi_1)$ ,  $\varphi_2(\xi_2)$  — произвольные функции.

Хори (1962) показал, что штеккелевский потенциал может быть очень хорошей аппроксимацией реального потенциала Галактики (на примере полуэмпирической модели Шмидта) с расхождениями менее 10%, а в окрестности Солнца — менее 5%. Таким образом, задачу движения в сепарабельном потенциале можно рассматривать как применение метода возмущений к реальному потенциалу.

\* Электронный адрес: granat08@yandex.ru

Условие существования штеккелевских потенциалов в эллиптических координатах имеет вид

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} [(\xi_1^2 - \xi_2^2) \Phi] = 0,$$

а в цилиндрических координатах выражается как

$$3 \left( z \frac{\partial \Phi}{\partial R} - R \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) - (R^2 + z_0^2 - z^2) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial R \partial z} + \quad (2) \\ + Rz \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial R^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right) = 0.$$

Это же условие является ограничением, накладываемым на потенциал третьим квадратичным интегралом движения Кузмина (1952)

$$I_3 = (Rv_z - zv_R)^2 + z^2 v_\theta^2 + z_0^2 (v_z^2 - 2\Phi^*),$$

где

$$z_0^2 \frac{\partial \Phi^*}{\partial R} = z^2 \frac{\partial \Phi}{\partial R} - Rz \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \\ z_0^2 \frac{\partial \Phi^*}{\partial z} = (R^2 + z_0^2) \frac{\partial \Phi}{\partial z} - Rz \frac{\partial \Phi}{\partial R}.$$

Таким образом, штеккелевские модели допускают такой интеграл. Существование третьего интеграла (помимо двух классических интегралов энергии и площадей) позволяет, например, объяснить наблюдаемую в окрестности Солнца трехосность эллипсоида скоростей.

Мы решаем задачу построения штеккелевской модели, наиболее близкой к реальному потенциалу Галактики. В основе нашего подхода лежит метод Родионова (1974), который позволяет обобщать потенциал, заданный в одно- или двумерной области, на все трехмерное пространство штеккелевским образом. Так, если потенциал задан в экваториальной плоскости, то функции  $\varphi(\xi)$  определяются как

$$\varphi(\xi) = \xi^2 \Phi \left( R = z_0 \sqrt{\xi^2 - 1}, z = 0 \right), \quad (3)$$

а если потенциал задан на оси симметрии, то

$$\varphi(\xi) = \Phi(R = 0, z = 0) - \quad (4) \\ - (1 - \xi^2) \Phi(R = 0, z = z_0 \xi).$$

Поскольку области определения координат  $\xi_1$  и  $\xi_2$  различны, имея лишь одну общую точку  $\xi_1 = \xi_2 = 1$ , здесь  $\xi_1$  и  $\xi_2$  были заменены на переменную  $\xi \in [-1, \infty)$ , которая в зависимости от принятого значения является одной из координат или представляет точку  $(\xi_1, \xi_2) = (1, 1)$ :

$$\xi = \begin{cases} \xi_1, & \xi \geq 1, \\ \xi_2, & -1 \leq \xi \leq 1. \end{cases}$$

Также здесь — в случае, когда функции  $\varphi_1(\xi_1)$  и  $\varphi_2(\xi_2)$  одинаково выражаются через свои аргументы, — для обеих функций используется общее

обозначение  $\varphi(\xi)$ . Далее в статье функция  $\varphi(\xi)$  (с индексами, соответствующими компонентам Галактики, или без) имеет тот же смысл. В работе Родионова (1974) также приводятся формулы для определения  $\varphi(\xi)$ , если потенциал задан в некотором столбце  $R = R_* = \text{const}$ , что позволяет использовать, например, данные о потенциале в окрестности Солнца.

Как отмечает Родионов (1974), лучше всего определять потенциал двумя различными функциями  $\varphi(\xi)$ , одна из которых задает поведение потенциала в экваториальной плоскости, а другая — в вертикальном направлении.

Укажем работы, в которых штеккелевские модели Галактики строились с учетом наблюдательных данных. Сато, Миямото (1976) применили метод (которого придерживаемся и мы) оценки параметров модели по азимутальным скоростям объектов, но для очень маленькой выборки; использованные в работе данные и часть предположений теперь устарели. Фамаэ, Дейонге (2003) получили несколько штеккелевских моделей Галактики, основанных на производных динамических характеристиках (плоская кривая вращения, параметры Оорта, околосолнечное значение плотности и др.), т.е. без использования исходных данных о вращении Галактики, отмечая, однако, необходимость в будущем строить модели именно по ним.

Отдельно следует отметить работы, в которых был разработан алгоритм нахождения функции распределения фазовой плотности для моделей со штеккелевскими потенциалами, основанный на вычислении переменных действие–угол (см., например, Бинни, 2012). В рамках данного подхода был предложен ряд функций фазовой плотности, аргументами которых являются переменные действия и которые дают функции распределения скоростей, согласующиеся с наблюдениями (см., например, Бинни, Мак-Милан, 2011; Пости и др., 2015). Однако используемый в работах этого направления, в целом перспективного, алгоритм вычисления функций  $\varphi(\xi)$ , названный его авторами Stäckel fudge (“штеккелевская подгонка”; Бинни, 2012; Сандерс, Бинни, 2016), является в некоторых отношениях приближенным. В этом алгоритме в предположении, что потенциал обладает свойствами штеккелевского, функция  $\varphi(\xi)$  определяется для каждой орбиты по нескольким ее точкам, что связано с численным нахождением некоторых интегралов. Значения  $z_0$  в разных точках орбиты и для разных орбит, вообще говоря, могут различаться. Однако постоянство  $z_0$  является условием сохранения интеграла  $I_3$ , поэтому возникает вопрос, какой из интегралов  $I_3$  для различных  $z_0$  является аргументом фазовой плотности. Сами функции  $\varphi(\xi)$  получаются путем дальнейшей интерполяции

по точкам орбит. Алгоритм штеккелевской подгонки был применен в работе Бинни, Вона (2017) для построения фазовой модели системы шаровых скоплений Галактики.

Используемый нами метод не требует вычисления интегралов на стадии задания функций  $\varphi(\xi)$  и позволяет получать аналитические выражения для них, а значит, определять точные значения  $\varphi(\xi)$  в любой точке рассматриваемой области пространства. Хотя численное интегрирование понадобится в дальнейшем — для вычисления действий при нахождении фазовой плотности, — определение функций  $\varphi(\xi)$  в явном виде понижает роль численных методов в данной задаче и повышает точность результатов. Кроме того, наш подход предполагает постоянное значение параметра  $z_0$  во всей рассматриваемой области, а значит,  $I_z$  имеет одинаковый вид в каждой ее точке. Метод Родионова и “штеккелевская подгонка” являются, по сути, альтернативными подходами к решению одной и той же задачи; сейчас трудно сказать, какой из них окажется в итоге более удачным.

Применение метода Родионова к данным о вращении Галактики для моделей разного компонентного состава (Громов и др., 2015, 2016; Громов, Никифоров, 2021) привело к построению штеккелевских моделей, согласующихся с оценками ряда галактических характеристик. Например, получены близкие к наблюдаемому значения пространственной плотности в окрестности Солнца. Кроме того, в моделях удалось избежать отрицательных значений плотностей, которые появлялись на начальных этапах наших исследований. Вместе с тем эти модели имеют существенный недостаток — нефизичное сжатие модели в целом и отдельных компонент. В частности, наиболее реалистичная по компонентному составу (балдж, диск и гало) модель приводит к сильно сжатому гало и избыточно сжатому балджу, а также к неправдоподобному вертикальному распределению пространственной плотности диска (Громов, Никифоров, 2021). Однако следует заметить, что вертикальная структура моделей получалась нефизичной и в других работах данного направления: так, эквиденситы (кривые равной плотности) для дисковых компонент модели, построенные Фамаэ, Дейонге (2003) и Бинни, Воном (2017), в общем случае также неправдоподобны.

В настоящей работе метод штеккелевского обобщения потенциала применяется к исходной трехкомпонентной модели, которая строится для галактической плоскости по новым данным о мазерах с тригонометрическими параллаксами. Ни обновление данных, ни некоторая модификация исходного потенциала не привели к повышению реалистичности модельного вертикального распределения плотности. Поэтому далее в работе мы

рассматриваем два возможных способа решения этой проблемы. Один из способов приводит к очевидному успеху, фактически давая средства управления вертикальной структурой итоговой штеккелевской модели.

## 2. МОДЕЛЬ В ЭКВАТОРИАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ И ЕЕ ШТЕККЕЛЕВСКОЕ ОБОБЩЕНИЕ

Компоненты Галактики в исходном потенциале были заданы соответствующими потенциалами в экваториальной (галактической) плоскости. Мы использовали полностью аналитическую модель исходного потенциала, чтобы получить аналитическую штеккелевскую модель, и те выражения для компонент, которые не создавали особенностей при обобщении. Гало представлялось квази-изотермическим потенциалом Кузмина и др. (1986)

$$\Phi_1(R, 0) = \Phi_{0,1} \ln \left( 1 + \frac{\beta}{w(R)} \right), \quad (5)$$

где функция  $w(R)$  определяется как

$$w^2(R) = 1 + \kappa_1^2 \frac{R^2}{R_0^2}. \quad (6)$$

Здесь  $R_0$  — произвольный масштабный параметр, приравненный к принятому в работе расстоянию от Солнца до центра Галактики 8.15 кпк (Рид и др., 2019). Диск описывался обобщенно-изохронным потенциалом (Кузмин, Маласидзе, 1969)

$$\Phi_2(R, 0) = \Phi_{0,2} \frac{\alpha}{(\alpha - 1) + \sqrt{1 + \kappa_2^2 R^2}}. \quad (7)$$

Для представления центральной компоненты (условный “балдж”) выбран потенциал Миямото–Нагая (1975)

$$\Phi_3(R, 0) = \Phi_{0,3} \frac{1}{\sqrt{R^2 + \kappa_3^2}}. \quad (8)$$

Тогда штеккелевское обобщение потенциала из экваториальной плоскости на трехмерное пространство, согласно (3), приводит к следующим функциям  $\varphi(\xi)$  для этих компонент:

$$\varphi_h(\xi) = \xi^2 \Phi_{0,1} \ln \left[ 1 + \frac{\beta}{\sqrt{1 + \kappa_1^2 z_0^2 (\xi^2 - 1)}} \right], \quad (9)$$

$$\varphi_d(\xi) = \xi^2 \Phi_{0,2} \frac{\alpha}{(\alpha - 1) + \sqrt{1 + \kappa_2^2 z_0^2 (\xi^2 - 1)}}, \quad (10)$$

$$\varphi_b(\xi) = \xi^2 \Phi_{0,3} \frac{1}{\sqrt{z_0^2 (\xi^2 - 1) + \kappa_3^2}}. \quad (11)$$

Для всей Галактики  $\varphi(\xi) = \varphi_h(\xi) + \varphi_d(\xi) + \varphi_b(\xi)$ .

Таким образом, при данном подходе функция  $\varphi(\xi)$ , необходимая для получения штеккелевского потенциала согласно (1), задается в явном виде: она основана на выражении для потенциала в экваториальной плоскости и аналитическим образом продолжена во все пространство.

При описании “балджа” мы отказались от потенциала Хернквиста (1990), использованного в наших предыдущих работах, в силу того, что при штеккелевском обобщении функции  $\varphi(\xi)$  для него получаются особенности при  $\xi = 1$ . Выражение для потенциала, предложенное Миямото, Нагаем (1975), не имеет этого недостатка. Как повлияет подобное изменение вида исходного потенциала на вертикальное распределение в штеккелевской модели, представляет отдельный интерес.

Оценка параметров потенциала в экваториальной плоскости для принятого его общего вида (5)–(8) проводилась путем оптимизации модельной кривой вращения по отношению к азимутальным скоростям  $\theta_i$ . Величины последних находились по измерениям тригонометрических параллаксов, собственных движений и лучевых скоростей мазеров с использованием процедуры, описанной в статье Громова и др. (2016), для значений расстояния от Солнца до центра Галактики  $R_0 = 8.15$  кпк, компонент пекулярной скорости Солнца  $u_\odot = 10.7$  км/с,  $w_\odot = 7.7$  км/с и линейной скорости вращения Солнца вокруг центра Галактики  $\theta_\odot = 247$  км/с (Рид и др., 2019). Решение искалось методом наименьших квадратов: минимизировалась целевая функция

$$L^2 = \sum_{i=1}^N p_i [\theta_i - \theta_C(R_i)]^2, \quad (12)$$

где  $\theta_i$  — точечная оценка азимутальной скорости  $i$ -го объекта по данным наблюдений,  $\theta_C(R_i) = -R \frac{d\Phi}{dR} \Big|_{R=R_i}$  — модельная (формально круговая) скорость на галактоосевом расстоянии  $i$ -го объекта как функция параметров потенциала,  $p_i = (\sigma_i^2 + \sigma_0^2)^{-1}$  — весовые коэффициенты,  $\sigma_i$  — средняя ошибка измерения  $\theta_i$ ,  $\sigma_0^2$  — природная (не вызванная погрешностями измерений) дисперсия азимутальных скоростей объектов,  $N$  — число объектов в выборке.

В качестве основных источников данных об объектах, содержащих мазеры, использовались каталоги Рида и др. (2019) и Коллаборации VERA и др. (2020) (далее каталог VERA). Были рассмотрены три выборки разной степени однородности по типу объектов. Первая, наиболее однородная, выборка состояла только из областей образования массивных звезд (далее HMSFRs):

все объекты из каталога Рида и др. (2019), два HMSFRs (G125.51+02.03 и IRAS21379+5106) из каталога VERA и один (G305.20+0.208) из каталога в работе Расторгуева и др. (2017). Две другие основывались на каталоге VERA, менее однородном. Одна из этих выборок содержала только области образования звезд (различных масс, далее SFRs). Другая включала объекты каталога VERA всех типов: SFRs, звезды поздних типов (преимущественно на асимптотической ветви гигантов, AGB), красные сверхгиганты (RSGs); далее выборка VERA. Степень однородности выборок существенна для процедуры обработки данных, так как разные типы объектов, содержащих мазеры, могут иметь кратно различные дисперсии скоростей (Громов, Никифоров, 2021). Для учета кинематической неоднородности выборки VERA находились одновременно два значения природной дисперсии — для SFRs ( $\sigma_{0,1}^2$ ) и для всех остальных объектов ( $\sigma_{0,2}^2$ ). Выборки HMSFRs и SFRs рассматривались как однородные. Использование каталогов Рида и др. (2019) и VERA, созданных разными исследовательскими группами, позволяет оценить зависимость результатов от типа мазерных источников и от набора данных.

Определение для каждой выборки параметров потенциала и одного или двух значений природной дисперсии, а также исключение объектов с выбросами в данных проводилось по тому же итеративному алгоритму, что и в работе Громова, Никифорова (2021).

Выборки SFRs и VERA содержат всего один объект (Sgr B2) в центральной части Галактики, что делает фактически невозможным оценку по ним параметров центральной компоненты. Поэтому при обработке этих выборок значения  $\Phi_{0,3}$  и  $\kappa_3$  фиксировались равными тем, которые были получены в результате анализа выборки HMSFRs. При этом объект Sgr B2 был исключен из выборок SFRs и VERA.

В табл. 1 приведены финальные оценки параметров потенциала в галактической плоскости и характеристики решения по рассмотренным выборкам. Так как в некоторых вариантах расчетов в настоящей работе значение параметра  $\beta$  получается предельным ( $\beta \rightarrow \infty$ ), вместо него оценивался связанный с ним параметр  $q = \frac{\beta}{\beta + 1} \in [0; 1]$ .

Значения стандарта  $\sigma_0$  природной дисперсии для мазеров HMSFRs (фактически каталога Рида и др., 2019) получились в 3–4 раза меньше, чем у выборок на основе каталога VERA, что говорит о существенной, по крайней мере, кинематической неоднородности последнего даже в рамках класса SFRs. Для почти всех параметров потенциала оценки по разным выборкам согласуются друг с

**Таблица 1.** Результаты моделирования потенциала в плоскости Галактики по выборкам мазеров HMSFRs, SFRs и VERA

Характеристика	HMSFRs	SFRs	VERA
$N$	202 → 198	64 → 62	95(64 + 31) → 92(62 + 30)
$\sigma_0$ или $\sigma_{0,1}$ , км/с	$7.64 \pm 0.55 \rightarrow$ $\rightarrow 6.11 \pm 0.44$	$23.7 \pm 3.2 \rightarrow$ $\rightarrow 19.9 \pm 2.7$	$23.4 \pm 2.5 \rightarrow$ $\rightarrow 19.6 \pm 2.2$
$\sigma_{0,2}$ , км/с			$26.0 \pm 2.8 \rightarrow 22.8 \pm 2.5$
$q$	$1_{-0.046}$	$0.86 \pm 0.15$	$1_{-0.19}$
$\kappa_1$	$0.0429 \pm 0.0010$	$0.0379 \pm 0.0041$	$0.0309 \pm 0.0032$
$\Phi_{0,1}$ , км <sup>2</sup> /с <sup>2</sup>	$263.5 \pm 12.5$	$285 \pm 55$	$274 \pm 54$
$\alpha$	$0.1826 \pm 0.0069$	$0.205 \pm 0.038$	$0.209 \pm 0.030$
$\kappa_2$ , кпк <sup>-1</sup>	$0.1093 \pm 0.0026$	$0.1049 \pm 0.0093$	$0.1043 \pm 0.0069$
$\Phi_{0,2}$ , км <sup>2</sup> /с <sup>2</sup>	$304.8 \pm 2.3$	$315.5 \pm 11.7$	$328.6 \pm 11.3$
$\Phi_{0,3}$ , км <sup>2</sup> /с <sup>2</sup>	$226.9 \pm 8.8$	(226.9)	(226.9)
$\kappa_3$ , кпк	$2.01 \pm 0.29$	(2.01)	(2.01)

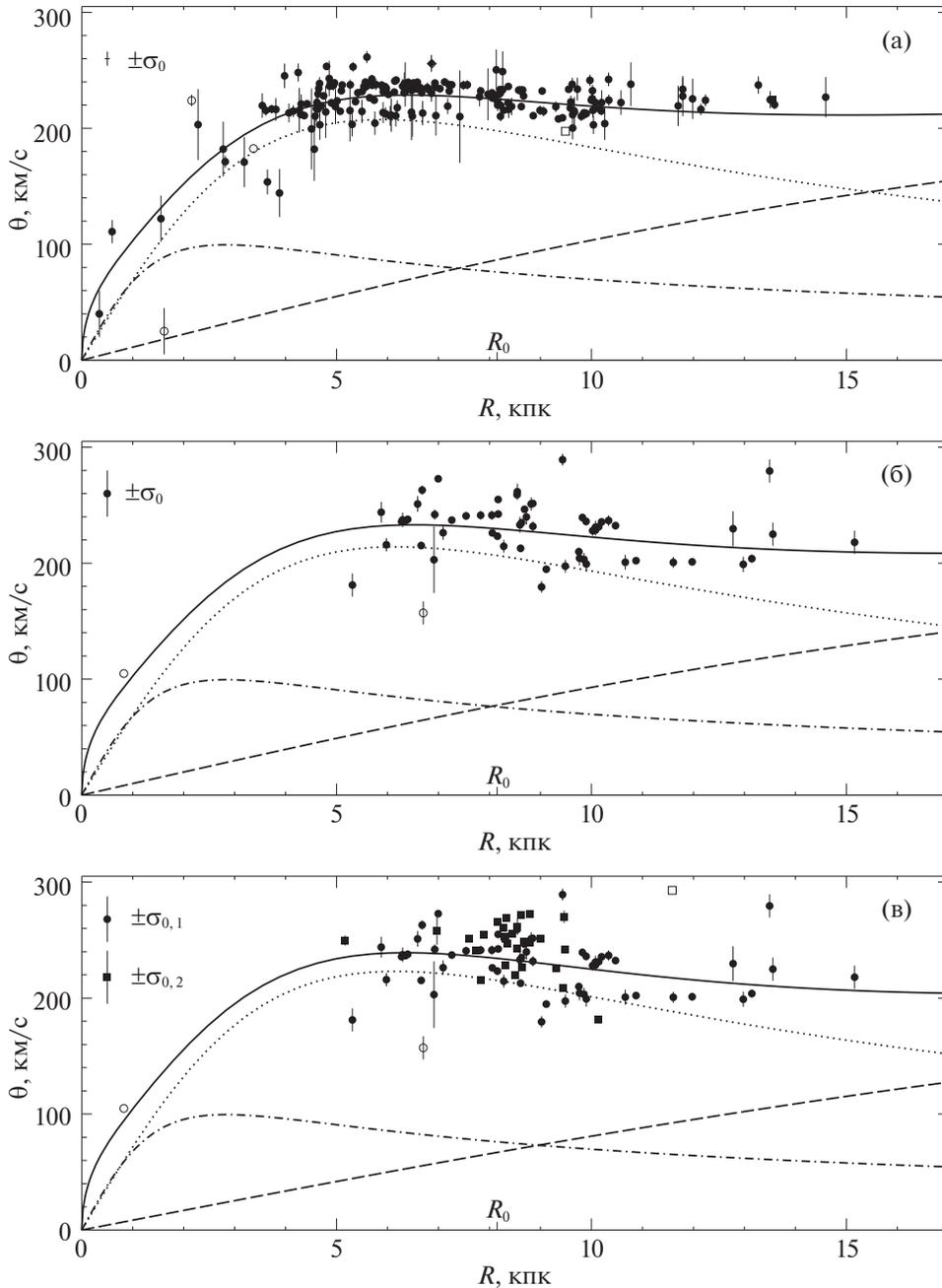
**Примечание.** В строке “ $N$ ” указаны начальный и конечный (после исключения выбросов) объемы каждой выборки, разделенные знаком “→”, при этом для выборки VERA в скобках дано количество объектов SFRs (первое число) и суммарно AGB и RSGs (второе число) в выборке. Для природных дисперсий азимутальных скоростей ( $\sigma_0$  или  $\sigma_{0,1}$ ,  $\sigma_{0,2}$ ) также представлены значения до и после исключения выбросов. Оценки параметров потенциала приведены для конечных выборок.

другом с учетом статистической неопределенности. Исключение составляет масштабный фактор гало  $\kappa_1$ , который по выборке VERA получился значимо ( $3.6\sigma$ ) меньше (в  $\simeq 1.4$  раза), чем по HMSFRs, что может отражать динамическую неоднородность каталога VERA из-за включения в него объектов более поздних классов (например, AGB); на динамическую выделенность AGB указывают и сами авторы каталога (Коллаборация VERA и др., 2020). На рис. 1 кривые вращения для полученных моделей потенциала представлены в сопоставлении с наблюдательными данными.

Из-за ненулевой дисперсии скоростей мазеров модельные кривые на рис. 1 описывают зависимость от  $R$ , строго говоря, не круговой скорости, а средней азимутальной. Для трех выборок мазеров был оценен асимметричный сдвиг  $\Delta\theta_{\text{ad}} = v_{\odot} - [\theta_{\odot} - \theta_C(R_0)]$  при пекулярной скорости Солнца в направлении вращения Галактики  $v_{\odot} = 11.0 \pm 2$  км/с (Блэнд-Хоторн, Герхард, 2016),  $\theta_{\odot} = 247 \pm 4$  км/с (Рид и др., 2019); здесь величина  $\theta_C(R_0)$  для полученной модели рассматривается как средняя скорость вращения мазеров на солнечном круге. Найдены величины  $\Delta\theta_{\text{ad}} = -7.1 \pm 0.6$ ,  $-2.6 \pm 2.9$  и  $-0.1 \pm 3.2$  км/с (ошибки — статистические) для выборок HMSFRs, SFRs и VERA соответственно. Хотя только первая из

оценок оказалась значимой в рамках принятых предположений<sup>1</sup>, данные каждой из выборок были скорректированы одинаковым образом на полученный для нее асимметричный сдвиг:  $\theta_{i,\text{corr}} = \theta_i - \Delta\theta_{\text{ad}}$ . Здесь мы предполагаем постоянство  $\Delta\theta_{\text{ad}}$  с галактоосевым расстоянием, как это фактически сделано Ридом и др. (2019) при построении кривой вращения по мазерам. Параметры потенциала в галактической плоскости, заново найденные для  $\theta_{i,\text{corr}}$  при прежних значениях  $\sigma_0$  (см. табл. 1), приведены в табл. 2. Для новых результатов сделанные ранее выводы о степени зависимости параметров от выборки в основном сохраняются. Новые оценки  $\kappa_1$  и по SFRs, и по VERA маргинально значимо (на уровнях  $2.4\sigma$  и  $2.8\sigma$  соответственно) отличаются от оценки по HMSFRs. Эти модели, скорректированные за  $\Delta\theta_{\text{ad}}$ , и будут использованы в качестве исходных при дальнейшей работе, за исключением случаев применения условной оптимизации. Кривые круговой скорости в сравнении с кривыми средней скорости вращения, полученными на предыдущем этапе, представлены на рис. 2а–в. В результате коррекции за асимметричный сдвиг кривые круговой скорости по трем выборкам прак-

<sup>1</sup> Систематическая ошибка, равная для всех оценок, —  $\pm 4.5$  км/с.



**Рис. 1.** Кривые вращения Галактики для моделей потенциала, аппроксимирующих данные о мазерных источниках. (а) — Решение по выборке HMSFRs; кружки — объекты каталога Рида и др. (2019), квадраты — два объекта из каталога Коллаборации VERA и др. (2020), ромб — объект из каталога Расторгуева и др. (2017) (см. текст). (б) — Решение для выборки SFRs. (в) — Решение для выборки VERA; кружки — SFRs, квадраты — другие типы объектов. Кривые круговой скорости: сплошная линия — трехкомпонентная модель, штриховая линия — гало; пунктирная линия — диск; штрихпунктирная линия — центральная компонента. Светлые символы обозначают исключенные объекты. Бары соответствуют измерительным ошибкам азимутальных скоростей мазеров; в некоторых случаях бар меньше размера символа, обозначающего объект. Бары в левом верхнем углу отображают в масштабе вертикальной оси найденные величины природных дисперсий.

тически совпали друг с другом на  $R \lesssim 12$  кпк, лишь вне этой области кривые по SFRs и VERA проходят ниже кривой по HMSFRs на несколько километров в секунду (рис. 2г).

Заметим, что отсутствие увеличения по модулю

асимметричного сдвига с ростом природной дисперсии скоростей может объясняться тем, что повышенная дисперсия скоростей для выборок SFRs и VERA преимущественно не носит динамического характера, а обусловлена большими скоростями

**Таблица 2.** Параметры моделей потенциала в плоскости Галактики, скорректированных за асимметричный сдвиг  $\Delta\theta_{\text{ад}}$ 

Характеристика	HMSFRs	SFRs	VERA
$\Delta\theta_{\text{ад}}$ , км/с	(−7.1)	(−2.6)	(−0.1)
$q$	$1_{-0.042}$	$1_{-0.15}$	$1_{-0.17}$
$\kappa_1$	$0.0432 \pm 0.0010$	$0.0352 \pm 0.0032$	$0.0333 \pm 0.0034$
$\Phi_{0,1}$ , км <sup>2</sup> /с <sup>2</sup>	$266.3 \pm 11.6$	$284.3 \pm 46$	$262.0 \pm 49$
$\alpha$	$0.1925 \pm 0.0062$	$0.204 \pm 0.035$	$0.208 \pm 0.031$
$\kappa_2$ , кпк <sup>−1</sup>	$0.1020 \pm 0.0029$	$0.1030 \pm 0.0094$	$0.1011 \pm 0.0069$
$\Phi_{0,2}$ , км <sup>2</sup> /с <sup>2</sup>	$313.2 \pm 1.9$	$318.0 \pm 10.4$	$326.0 \pm 8.3$
$\Phi_{0,3}$ , км <sup>2</sup> /с <sup>2</sup>	$231.0 \pm 7.4$	(231.0)	(231.0)
$\kappa_3$ , кпк	$1.40 \pm 0.26$	(1.40)	(1.40)

мазерных пятен и деталей относительно их центральных звезд (см. Коллаборация VERA и др., 2020).

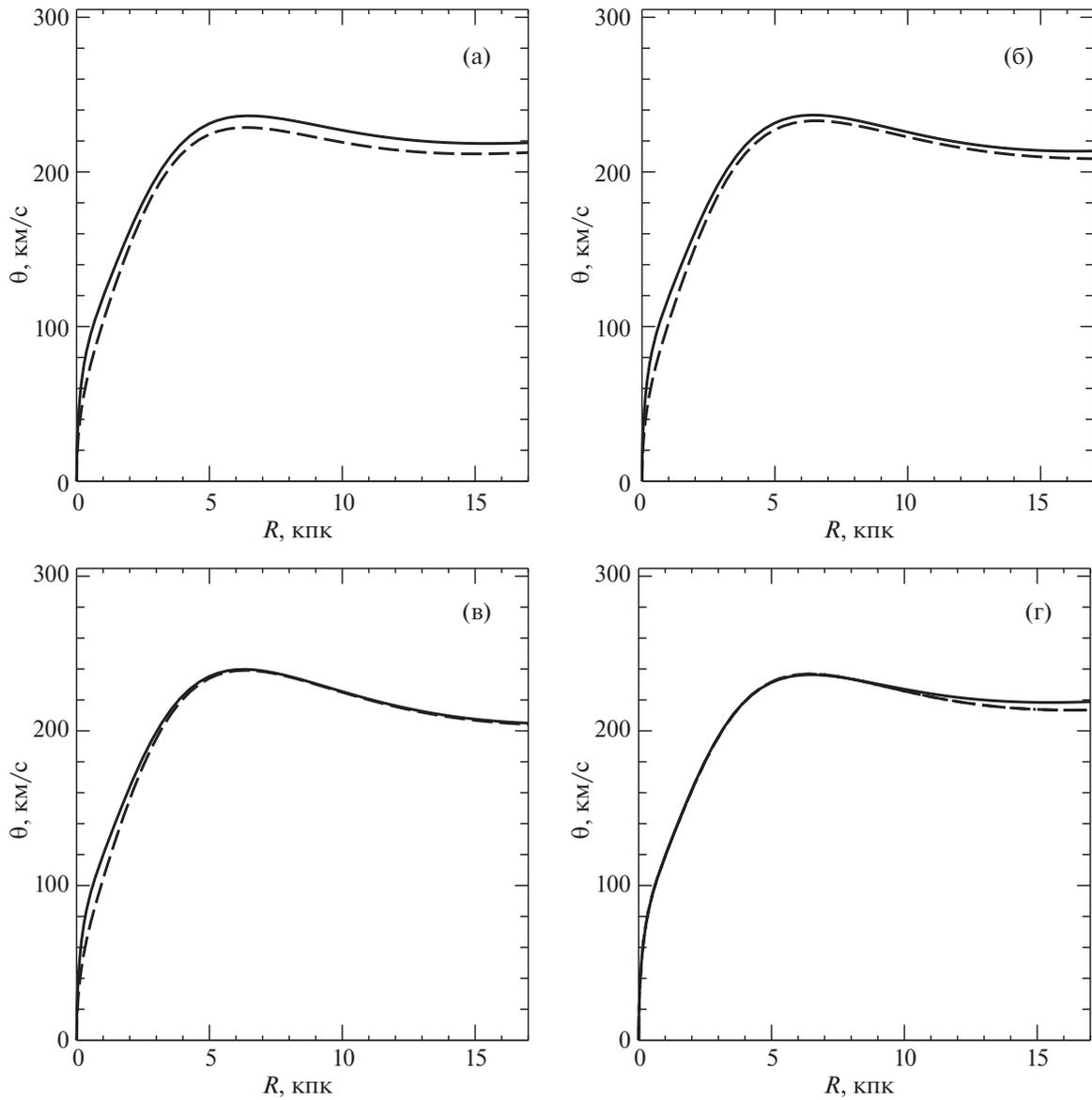
Параметр  $z_0$ , необходимый для построения штеккелевского потенциала, определялся из соотношения

$$z_0^2(R) = \frac{3 \frac{\partial \Phi(R, 0)}{\partial R} + R \left( \frac{\partial^2 \Phi(R, 0)}{\partial R^2} - 4 \frac{\partial^2 \Phi(R, 0)}{\partial z^2} \right)}{\frac{\partial^3 \Phi(R, 0)}{\partial z^2 \partial R}} - R^2, \quad (13)$$

которое является следствием выражения (2). Здесь требуется потенциал  $\Phi(R, z)$ , учитывающий в отличие от построенных моделей потенциала в плоскости Галактики, данные о вертикальном распределении. В качестве такового использовался потенциал Гарднера и др. (2011). При построении функции (13)  $I_3$  рассматривается как квази-интеграл, значение которого приблизительно постоянно в пределах большой области, и параметр  $z_0$  которого может несущественно варьироваться с изменением  $R$ . Потенциал Гарднера и др. (2011) привел к наименьшим колебаниям  $z_0$  по сравнению с другими рассмотренными потенциалами (см., например, Фелльхауэр и др., 2006; Иргэнг и др., 2013). Подобные функции для  $z_0$  строились Эйнасто, Рюммелем (1970) и Осипковым (1975). Здесь принято значение  $z_0 = 5.3$  кпк, полученное для потенциала Гарднера и др. (2011) в окрестности Солнца  $R = R_0 = 8.15$  кпк (Громов и др., 2016), которое используется далее как постоянное во всей рассматриваемой области. Это значение согласуется с ранними оценками  $z_0 = 2.2\text{--}7$  кпк (Кузмин, 1953, 1956; Маласидзе, 1973). Параметр  $z_0$  характеризует степень концентрации массы к

центру системы, определяя в том числе крупномасштабную структуру модели (Родионов, 1985).

На рис. 3 приведены эквиденситы, полученные путем подстановки штеккелевского потенциала в уравнение Пуассона, при плотности  $\rho = 0.1 M_{\odot}/\text{пк}^3$  для всей модели и отдельных ее компонент для каждой выборки. Параметры исходных потенциалов принимались равными указанным в табл. 2. Эквиденситы показывают, что модели плохо согласуются с данными о вертикальном распределении плотности. Модельный диск получился более толстым по сравнению с вертикальным масштабом тонкого диска Галактики  $300 \pm 50$  пк (Блэнд-Хоторн, Герхард, 2016). По звездным подсчетам сжатие внутреннего гало Галактики составляет  $0.65 \pm 0.05$ , внешнего —  $0.8 \pm 0.1$  (Блэнд-Хоторн, Герхард, 2016); в моделях гало часто принимается сферическим. Сжатие модельного гало 0.24 на рис. 3 противоречит этим данным. Центральную компоненту также иногда полагают сферической (классический балдж), хотя отношение ее осей, если ею представлять галактический бар, должно быть  $\sim 0.35$  (Блэнд-Хоторн,



**Рис. 2.** (а)–(в) — Сравнение кривой круговой скорости (сплошная линия), полученной после коррекции за асимметричный сдвиг, с кривой средней скорости вращения (пунктирная линия) для выборок HMSFRs (а), SFRs (б) и VERA (в) соответственно. (г) — Сравнение трех кривых круговой скорости для выборок HMSFRs (сплошная линия), SFRs (пунктирная линия) и VERA (штрихпунктирная линия). Последние две кривые практически совпадают.

Герхард, 2016). Таким образом, “балджи” моделей с отношением осей 0.27 на рис. 3 являются избыточно сжатыми. Замена выражения для центральной компоненты исходного потенциала в настоящей работе практически не изменила сжатие “балджа” в штеккелевском потенциале (ср. рис. 4 в статье Громова, Никифорова, 2021). При смене выборки объектов указанные недостатки штеккелевской модели сохраняются (рис. 3). Несомненно, для решения проблемы нужна разработка специальных способов учета сведений о вертикальном

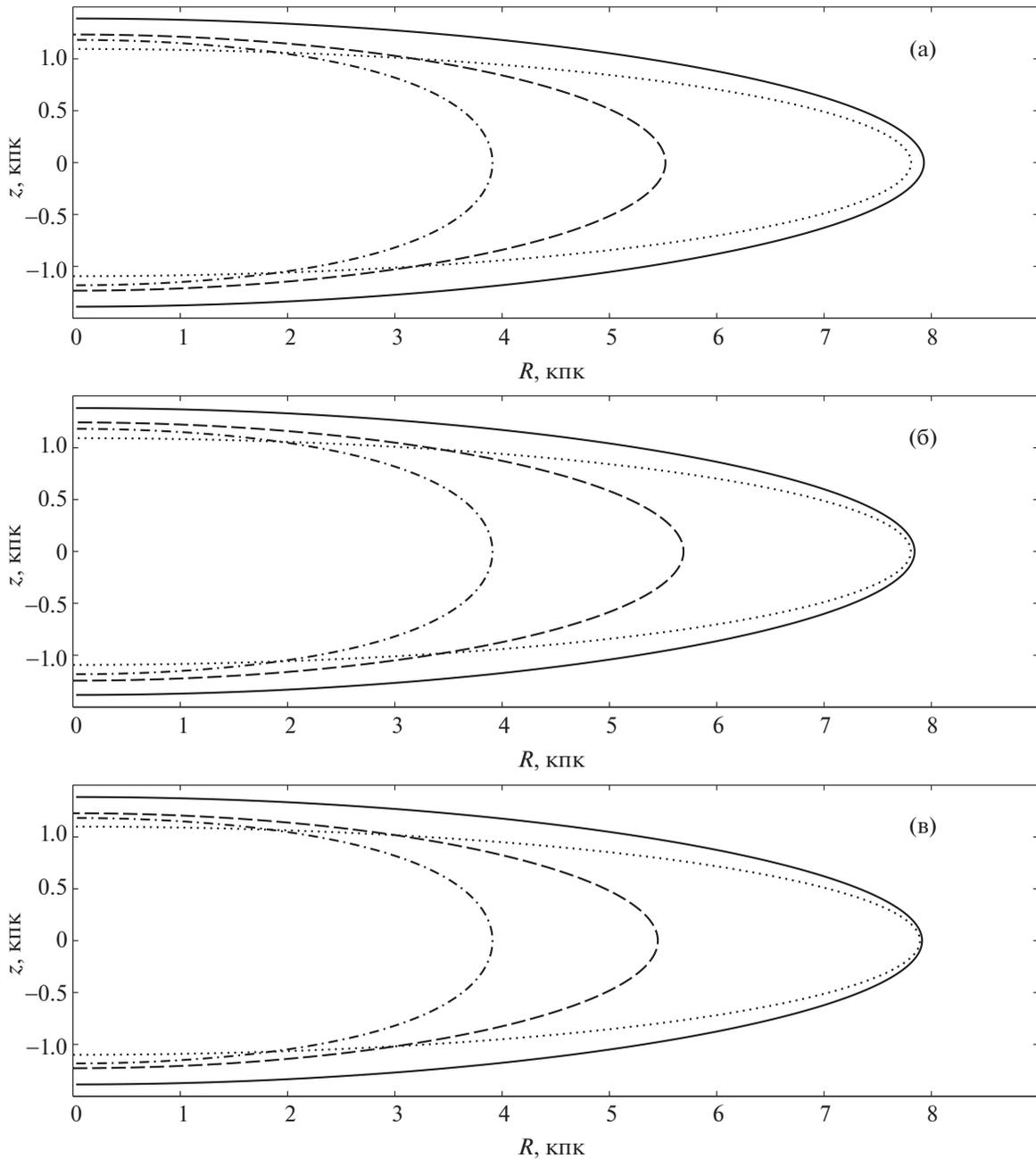
распределении при штеккелевском моделировании. Два таких способа рассматриваются ниже.

### 3. УЧЕТ ДАННЫХ О ВЕРТИКАЛЬНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ ПРИ ПОСТРОЕНИИ ШТЕККЕЛЕВСКОЙ МОДЕЛИ

#### *Условная оптимизация*

Для большинства дисковых галактик, видимых с ребра, изменение звездной плотности с  $z$ -координатой описывается барометрическим законом, предложенным Паренаго (1940),

$$\rho(z) = \rho_0 \exp(-|z|/h_z), \quad (14)$$



**Рис. 3.** Эквиденситы (кривые равной плотности)  $\rho = 0.1 M_{\odot}/\text{пк}^3$  для моделей, полученных штеккелевским обобщением исходных потенциалов в экваториальной плоскости (табл. 2) по выборкам HMSFRs (а), SFRs (б) и VERA (в). Сплошная линия — трехкомпонентная модель, штриховая линия — гало; пунктирная линия — диск; штрихпунктирная линия — центральная компонента (“балдж”).

где  $\rho_0$  — значение плотности в плоскости диска,  $h_z$  — параметр полутолщины (см., например, Локтин, Марсаков, 2009). А–В-звезды III–V классов светимости образуют слой полутолщиной примерно 200 пк; F III — F V-звезды и G- и K-гиганты простираются до  $|z| = 400$  пк (Локтин, Марсаков, 2009). Согласно обзору Блэнда-Хоторна, Герхарда (2016),  $h_z = 300 \pm 50$  пк для тонкого и  $900 \pm 180$  пк для толстого дисков Галактики. Для внеш-

них галактик, видимых с ребра, параметр полутолщины лежит в пределах 200–600 пк (Фридман, Хоперсков, 2011). При этом у галактик поздних морфологических типов вертикальная шкала не сильно изменяется с удалением от центра; подобное поведение  $h_z$ , по-видимому, имеет место и в нашей Галактике (Фридман, Хоперсков, 2011). Поэтому будем считать значение  $h_z$  в (14) пост-

**Таблица 3.** Результаты моделирования потенциала в плоскости Галактики в предположении барометрического закона для диска при  $h_z = 900$  пк с учетом асимметричного сдвига  $\Delta\theta_{ad}$

Характеристика	HMSFRs	SFRs	VERA
$N$	202 $\rightarrow$ 198	64 $\rightarrow$ 63	95(64 + 31) $\rightarrow$ 92(62 + 30)
$\sigma_0$ или $\sigma_{0,1}$ , км/с	8.16 $\pm$ 0.60 $\rightarrow$ $\rightarrow$ 7.07 $\pm$ 0.52	23.9 $\pm$ 3.2 $\rightarrow$ $\rightarrow$ 24.2 $\pm$ 3.3	23.7 $\pm$ 2.5 $\rightarrow$ $\rightarrow$ 20.1 $\pm$ 2.2
$\sigma_{0,2}$ , км/с			26.1 $\pm$ 2.8 $\rightarrow$ 23.2 $\pm$ 2.5
$\Delta\theta_{ad}$ , км/с	(-7.5)	(-4.0)	(-0.5)
$q$	0.5072 $\pm$ 0.0091	0.501 $\pm$ 0.040	0.509 $\pm$ 0.064
$\kappa_1$	0.1021 $\pm$ 0.0028	0.101 $\pm$ 0.014	0.0669 $\pm$ 0.0086
$\Phi_{0,1}$ , км <sup>2</sup> /с <sup>2</sup>	295.5 $\pm$ 6.4	299 $\pm$ 28	246 $\pm$ 35
$\alpha$	1.568 $\pm$ 0.080	1.56 $\pm$ 0.31	1.57 $\pm$ 0.18
$\kappa_2$ , кпк <sup>-1</sup>	0.435 $\pm$ 0.014	0.436 $\pm$ 0.071	0.433 $\pm$ 0.037
$\Phi_{0,2}$ , км <sup>2</sup> /с <sup>2</sup>	354.1 $\pm$ 2.8	352.2 $\pm$ 15.9	395.3 $\pm$ 9.6
$\Phi_{0,3}$ , км <sup>2</sup> /с <sup>2</sup>	173.2 $\pm$ 13.9	(173.2)	(173.2)
$\kappa_3$ , кпк	2.06 $\pm$ 0.51	(2.06)	(2.06)

**Примечание.** Обозначения те же, что и в табл. 1.

янным, тогда  $\rho_0$  — значение плотности в центре модели.

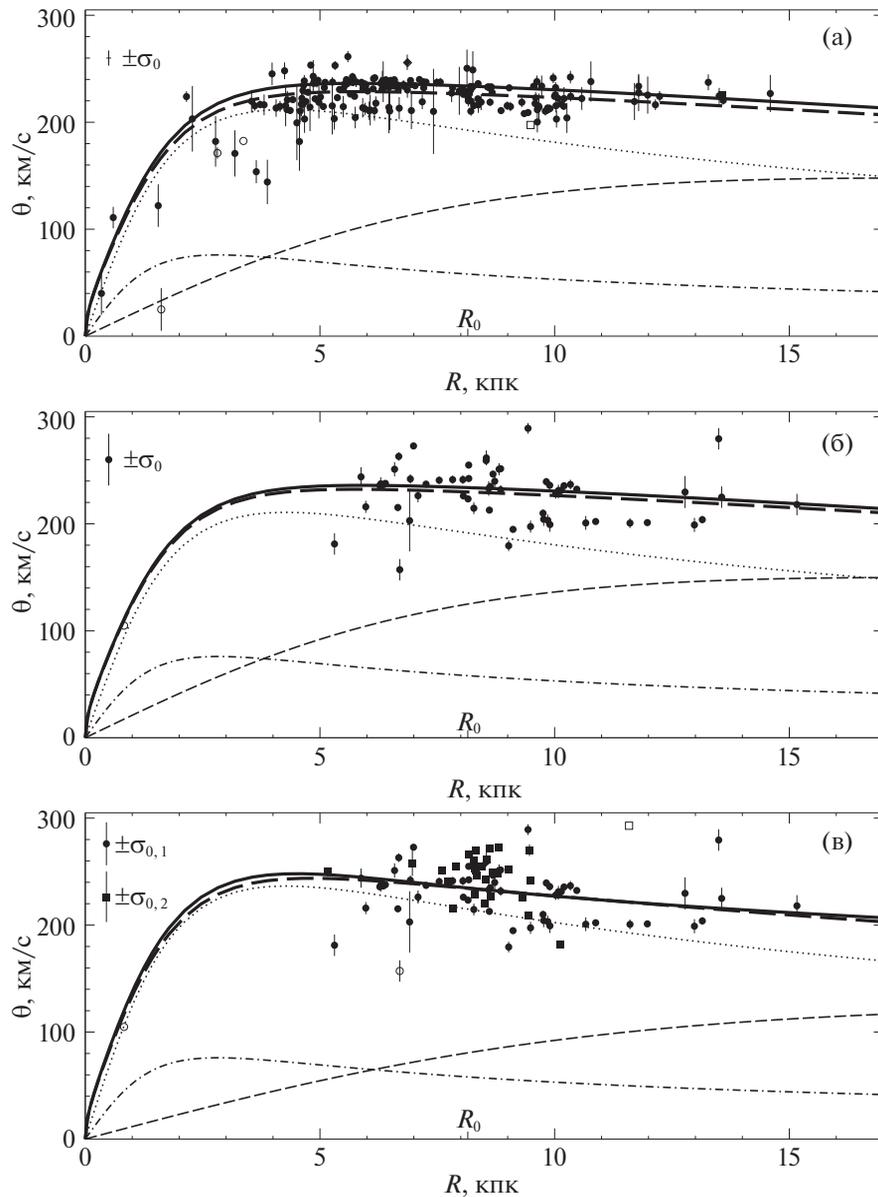
Мы непосредственно учли барометрический закон при построении штеккелевской модели в целях повышения ее реалистичности. Для этого задача решалась методом наименьших квадратов, как и в разделе 2, но на значения параметров диска накладывалось условие (14), в котором использовалось аналитическое выражение для пространственной плотности диска, найденное подстановкой штеккелевского потенциала в уравнение Пуассона. В результате получалось дополнительное уравнение для параметров  $\alpha$  и  $\kappa_2$  (параметр  $\Phi_{0,2}$  сокращался), которому они должны удовлетворять при минимизации функции (12). Полученные при  $h_z = 900$  пк решения с учетом асимметричного сдвига представлены в табл. 3, соответствующие им кривые вращения — на рис. 4. Как и следовало ожидать, согласие с данными о кинематике мазеров ухудшилось, о чем говорят возросшие значения природной дисперсии (ср.  $\sigma_0$  в табл. 3 и табл. 1). Эквиденситы  $\rho = 0.1 M_\odot/\text{пк}^3$  (рис. 5) показывают, что удалось достичь полутолщины диска  $\approx 600$  пк, близкой к значениям, характерным для толстого диска. Попытки сжать диск до вертикального масштаба тонкого диска Галактики (при  $h_z = 300$  пк) не увенчались успехом, так как давали нефизичные эквиденситы.

Предложенный здесь способ условной оптимизации позволил отчасти решить проблему вертикального распределения для одной из компонент. Однако сплюснутость гало осталась неудовлетворительной. Это означает необходимость наложения дополнительных условий уже на параметры потенциала (5). В качестве такого условия мы рассмотрели факт примерного постоянства центральной поверхностной плотности темного гало

$$\mu_{0D} \equiv r_0 \rho_0 \approx \text{const}, \quad (15)$$

имеющий место для внешних галактик независимо от их типа и светимости (Донато и др., 2009); здесь  $r_0$  — радиус ядра профиля плотности темной материи,  $\rho_0$  — центральная плотность. По оценке Донато и др. (2009),  $\log \mu_{0D} = 2.15 \pm 0.2$ . Де Вега, Санчес (2011), указывая, что закон (15) имеет схожую природу с известным для молекулярных облаков в нашей Галактике соотношением Ларсона, приводят значение  $\mu_{0D} = 140 M_\odot/\text{пк}^2$  для  $0.3 \text{ кпк} < r_0 < 30 \text{ кпк}$ . Ларсон (1981) получил значение  $\mu_{0D} = 162 M_\odot/\text{пк}^2$ . Однако наши попытки учета соотношения (15) с соответствующей условной оптимизацией не привели к приемлемому сжатию гало.

Рассмотренный метод условной оптимизации не лишен некоторого элемента случайности. Так,



**Рис. 4.** То же, что на рис. 1, но при условной оптимизации — в предположении барометрического закона для диска при  $h_z = 900$  пк. Жирная сплошная линия — кривая круговой скорости после коррекции за асимметричный сдвиг, жирная пунктирная линия — кривая средней скорости вращения (модельная кривая до коррекции). Кривые для отдельных компонент даны с учетом асимметричного сдвига.

при условной оптимизации параметр  $\alpha$  оказался больше 1, а при обычной он был меньше 1. Это существенно изменило вид потенциала, благодаря чему диск и получился сжатым. Удалось бы это сделать при других видах исходного потенциала — не очевидно. Кроме того, эквиденситы меняются лишь за счет изменения исходного потенциала, а не внесения нужной зависимости от  $z$ -координаты в потенциал штеккелевский, что не гарантирует нужный результат. Поскольку условная оптимизация все же смогла решить частную задачу построения распределения типа “толстый диск”, метод, возможно, применим для каких-то специальных

классов моделей. Однако он явно не может претендовать на универсальность. Поэтому другой метод, описанный ниже, представляется более удачным.

#### Метод эквипотенциалей

Для решения проблемы вертикального распределения было решено отказаться от штеккелевского обобщения, определяющего единственную функцию  $\varphi(\xi)$ , чтобы иметь возможность использовать две *различные* функции  $\varphi(\xi)$  в формуле (1). При этом для продолжения потенциала из экваториальной плоскости на все пространство мы

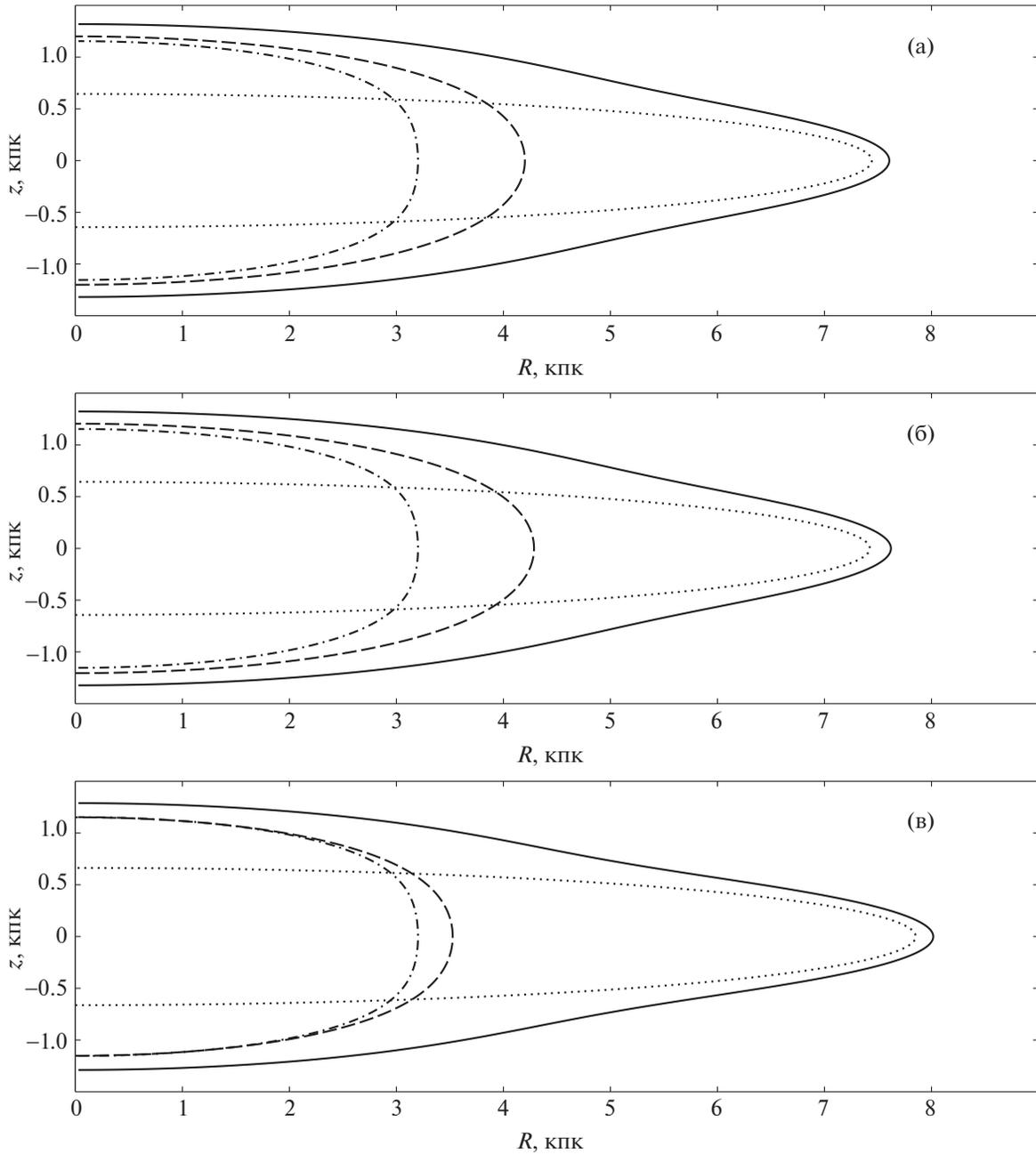


Рис. 5. То же, что на рис. 3, но при условной оптимизации — в предположении барометрического закона с  $h_z = 900$  пк (параметры исходных потенциалов из табл. 3).

воспользовались методом эквипотенциалей, разработанным Кутузовым, Осипковым (1981). Суть его состоит в том, что в результате замены переменной вида  $r^2 = f(R, z)$ , где  $r$  — галактоцентрическое расстояние, заданный в экваториальной плоскости потенциал  $\Phi(r) = \Phi(R, 0)$  (формулы (5) — (8)), обобщается на все пространство потенциалом  $\Phi(f(R, z))$ , который зависит от обеих цилиндрических координат  $R$  и  $z$ .

Мы рассмотрели следующие варианты функции  $f(R, z)$ :

$$[A.] f(R, z) = R^2 + z^2 + 2\sqrt{\varepsilon^2 \mu^2 R^2 + \mu^2 z^2 + \varepsilon^2}.$$

$$[Б.] f(R, z) = R^2 + z^2 + 2(1 - \varepsilon)\sqrt{\mu^2 z^2 + \varepsilon^2}.$$

$$[В.] f(R, z) = R^2 + z^2 + 2\mu\sqrt{(1 - \varepsilon)z^2 + \varepsilon^2}.$$

$$[Г.] f(R, z) = R^2 + nz^2.$$

$$[Д.] f(R, z) = R^2 + n\sqrt{z^2 + b^2}.$$

Первые три были предложены Осипковым (1997), последние два добавлены нами как более простые функциональные формы. Кроме того, для гало и центральной компоненты дополнительно

**Таблица 4.** Значения  $z_0$  и параметров эквиденсит при сферических и сжатых гало и центральной компоненте

Гало	$z_0$ , кпк	Центральная компонента		Диск, вариант Б ( $h_z = 300$ пк)
		Сферическая ( $Q = 1$ )	Сжатая ( $Q = 0.35$ )	
Сферическое ( $Q = 1$ )	2.5	$\mu_3 = 10$	$\mu_3 = 1.2$	$\mu_2 = 20$
		$\varepsilon_3 = 10$	$\varepsilon_3 = 0.47$	$\varepsilon_2 = 0.2$
Сжатое ( $Q = 0.65$ )	4.3	$\mu_3 = 80$	$\mu_3 = 2.6$	$\mu_2 = 750$
		$\varepsilon_3 = 45$	$\varepsilon_3 = 0.49$	$\varepsilon_2 = 0.41$

рассматривалось стандартное сферическое обобщение  $f(R, z) = R^2 + z^2$ .

Обобщив таким образом потенциал на все пространство, мы можем получить в качестве его аппроксимации штеккелевский потенциал (1) с двумя различными  $\varphi(\xi)$ . Для потенциалов каждой компоненты (гало, диск, “балдж”) определяются функции  $\varphi_1(\xi_1)$  по формуле (3), которая отвечает за радиальное распределение, и  $\varphi_2(\xi_2)$  по формуле (4), характеризующей вертикальное распределение. Как уже указывалось выше, использование двух различных функций  $\varphi(\xi)$  дает более точные модели звездных систем (Родионов, 1974). Преимущество рассматриваемого метода заключается в том, что он вводит явные параметры, отвечающие за вертикальное распределение, меняя которые, можно менять значения сжатия отдельных компонент в зависимости от требований задачи.

Использование метода эквипотенциалей и последующее построение штеккелевского потенциала возможны только после нахождения параметров исходного потенциала (в галактической плоскости); далее за оптимальные принимались те значения последних, которые были указаны в табл. 2.

Были рассмотрены варианты сферических и сжатых гало и центральной компоненты, для которых целевые значения коэффициента сжатия  $Q$  (отношения вертикального и горизонтального размеров эквиденситы  $\rho = 0.1 M_\odot/\text{пк}^3$  штеккелевской модели) выбирались заранее. Для гало рассматривались  $Q = 1, 0.65$ , для центральной компоненты —  $Q = 1, 0.35$  (Блэнд-Хоторн, Герхард, 2016). Целевая полутолщина диска (половина вертикального размера эквиденситы  $\rho = 0.1 M_\odot/\text{пк}^3$ ) выбрана равной  $h_z = 300$  пк (Блэнд-Хоторн, Герхард, 2016). Далее итеративно определялись величина  $z_0$  и параметры эквиденсит, при которых значения  $Q$  и полутолщины диска получались равными целевым. В качестве функции  $f(R, z)$  для гало использовалось сферическое обобщение  $f(R, z) = R^2 + z^2$ , для “балджа” —  $f(R, z) = R^2 + z^2 + 2\mu\sqrt{(1-\varepsilon)z^2 + \varepsilon^2}$  (вариант В). Отметим, что при таком обобщении гало в выражение для его

потенциала не вводится новых параметров, кроме  $z_0$ , которые могли бы влиять на вертикальную структуру. Это дает возможность определять  $z_0$  для заданного сжатия как еще один параметр модели, а не принимать, как раньше, значение  $z_0$  виде дополнительного предположения с использованием формулы (13). Следует отметить, что получаемые при таком подходе величины  $z_0$  остаются в интервале 2.2–7 кпк, упомянутом в разделе 2. Значения  $z_0$ , найденные для гало, принимались и для потенциалов центральной компоненты и диска. Применение данного метода к компоненте диска для двух различных  $z_0$ , соответствующих сферическому и сжатому гало, привело к удовлетворительным результатам при использовании эквипотенциалей вида Б; вариант Г не дал решения при сжатом гало. Величины  $z_0$  и параметров эквиденсит, полученные для рассмотренных вариантов целевых характеристик вертикальной структуры, представлены в табл. 4.

Выпишем явные выражения функций  $\varphi(\xi)$ , в итоге использованных для построения штеккелевских моделей. Для гало (5) со сферическим обобщением  $f(R, z) = R^2 + z^2$ :

$$\varphi_1(\xi_1) = \tag{16}$$

$$= \Phi_{0,1} \xi_1^2 \ln \left[ 1 + \frac{\beta}{\sqrt{1 + \kappa_1^2 z_0^2 (\xi_1^2 - 1)}} \right],$$

$$\varphi_2(\xi_2) = \Phi_{0,1} \ln(1 + \beta) - \tag{17}$$

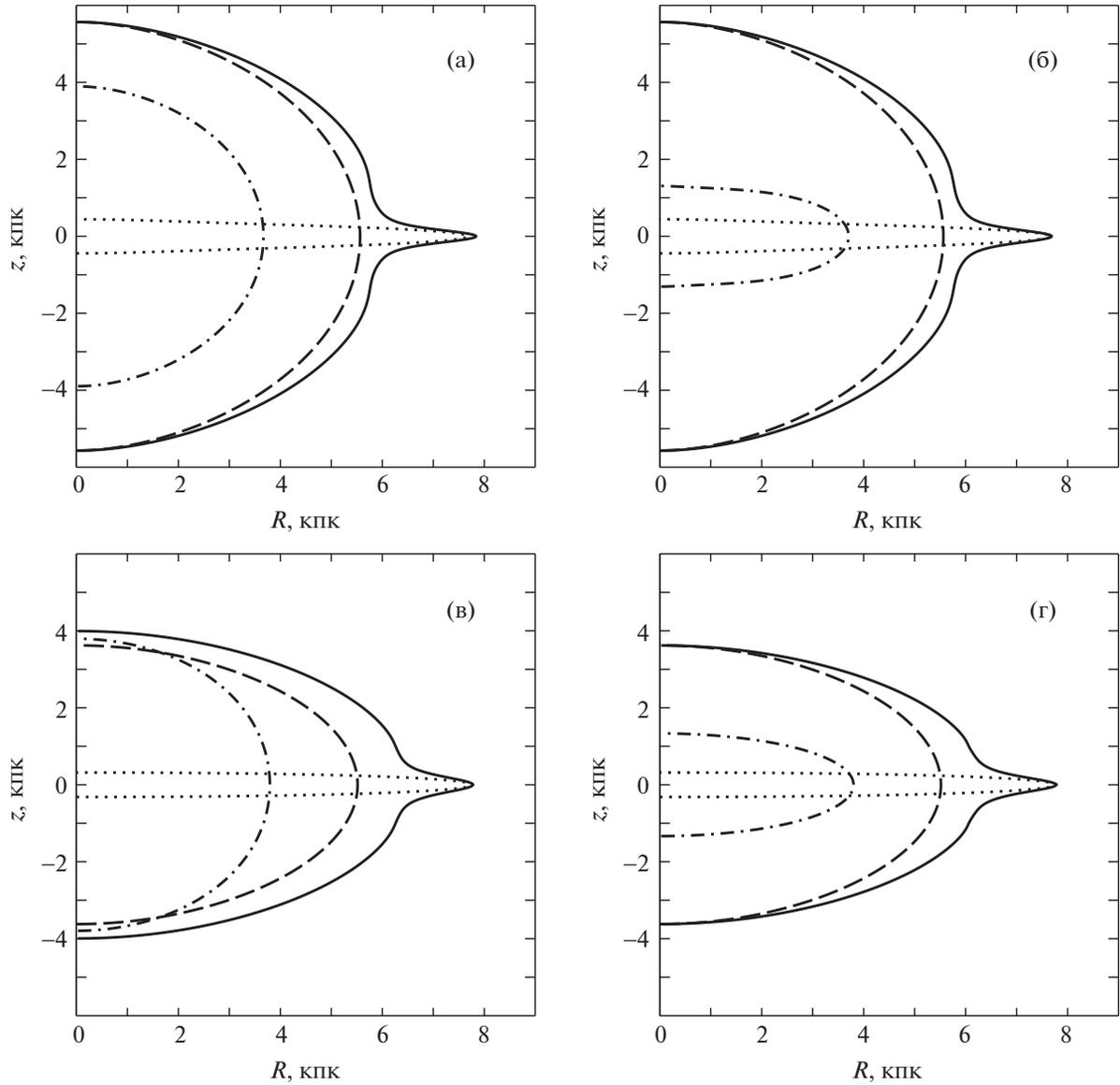
$$- \Phi_{0,1} (1 - \xi_2^2) \ln \left( 1 + \frac{\beta}{\sqrt{1 + \kappa_1^2 z_0^2 \xi_2^2}} \right).$$

Для центральной компоненты (8) при  $f(R, z) = R^2 + z^2 + 2\mu\sqrt{(1-\varepsilon)z^2 + \varepsilon^2}$ :

$$\varphi_1(\xi_1) = \xi_1^2 \Phi_{0,3} \frac{1}{\sqrt{z_0^2 (\xi_1^2 - 1) + 2\mu\varepsilon + \kappa_3^2}}, \tag{18}$$

$$\varphi_2(\xi_2) = \Phi_{0,3} \frac{1}{\sqrt{2\mu\varepsilon + \kappa_3^2}} - (1 - \xi_2^2) \times \tag{19}$$

$$\times \Phi_{0,3} \frac{1}{\sqrt{z_0^2 \xi_2^2 + 2\mu\sqrt{(1-\varepsilon)z_0^2 \xi_2^2 + \varepsilon^2} + \kappa_3^2}}.$$

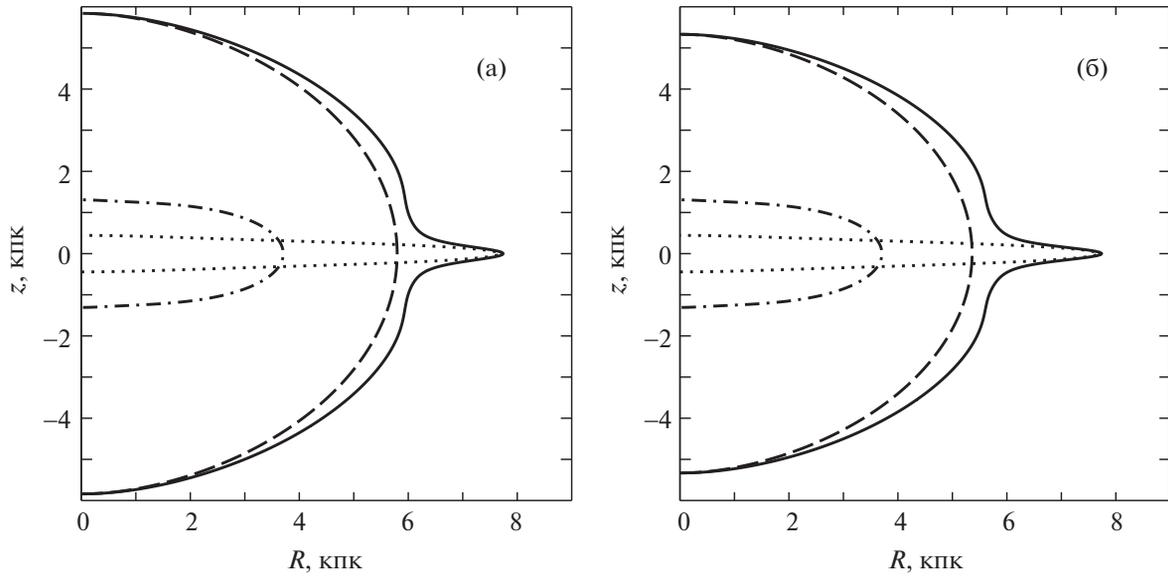


**Рис. 6.** Эквиденситы  $\rho = 0.1 M_{\odot}/\text{пк}^3$  для штеккелевских моделей, построенных с использованием метода экvipотенциалей по выборке HMSFRs: сферические гало и центральная компонента (а), сферическое гало и сжатая центральная компонента (б), сжатое гало и сферическая центральная компонента (в), сжатые гало и центральная компонента (г). Диск везде для целевой полутолщины  $h_z = 300$  пк. Обозначения те же, что на рис. 3.

Для диска (7) при  $f(R, z) = R^2 + z^2 + 2(1 - \varepsilon)\sqrt{(\mu^2 z^2 + \varepsilon^2)}$ :

$$\varphi_1(\xi_1) = \Phi_{0,2} \xi_1^2 \frac{\alpha}{(\alpha - 1) + \sqrt{1 + \kappa_2^2 [z_0^2 (\xi_1^2 - 1) + 2(1 - \varepsilon)\varepsilon]}}}, \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \varphi_2(\xi_2) = & \Phi_{0,2} \frac{\alpha}{(\alpha - 1) + \sqrt{1 + 2(1 - \varepsilon)\varepsilon\kappa_2^2}} - \\ & - \Phi_{0,2} (1 - \xi_2^2) \frac{\alpha}{(\alpha - 1) + \sqrt{1 + \kappa_2^2 [z_0^2 \xi_2^2 + 2(1 - \varepsilon)\sqrt{\mu^2 z_0^2 \xi_2^2 + \varepsilon^2}]}}, \end{aligned} \quad (21)$$



**Рис. 7.** То же, что на рис. 6, но для выборки SFRs (а) и выборки VERA (б) в случае модели со сферическим гало и сжатой центральной компонентой.

Функции  $\varphi_1(\xi_1)$  при сферическом обобщении совпадают с функциями, задаваемыми штеккелевским обобщением, при несферическом обобщении первые отличаются от вторых только включением дополнительной комбинации постоянных параметров (ср. (16) с (9) в первом случае, (18) с (11) и (20) с (10) во втором).

На рис. 6 представлены эквиденситы для рассмотренных комбинаций сферических и сжатых гало и центральной компоненты с параметрами эквипотенциалей из табл. 4 при модели потенциала в плоскости Галактики, полученной по выборке HMSFRs (табл. 2). Для моделей по двум другим выборкам получились схожие эквиденситы (см. примеры на рис. 7 для комбинации “сферическое гало—сжатая центральная компонента”). Модель с такой комбинацией по выборке HMSFRs представляется наиболее реалистичной и надежной из построенных по мазерам.

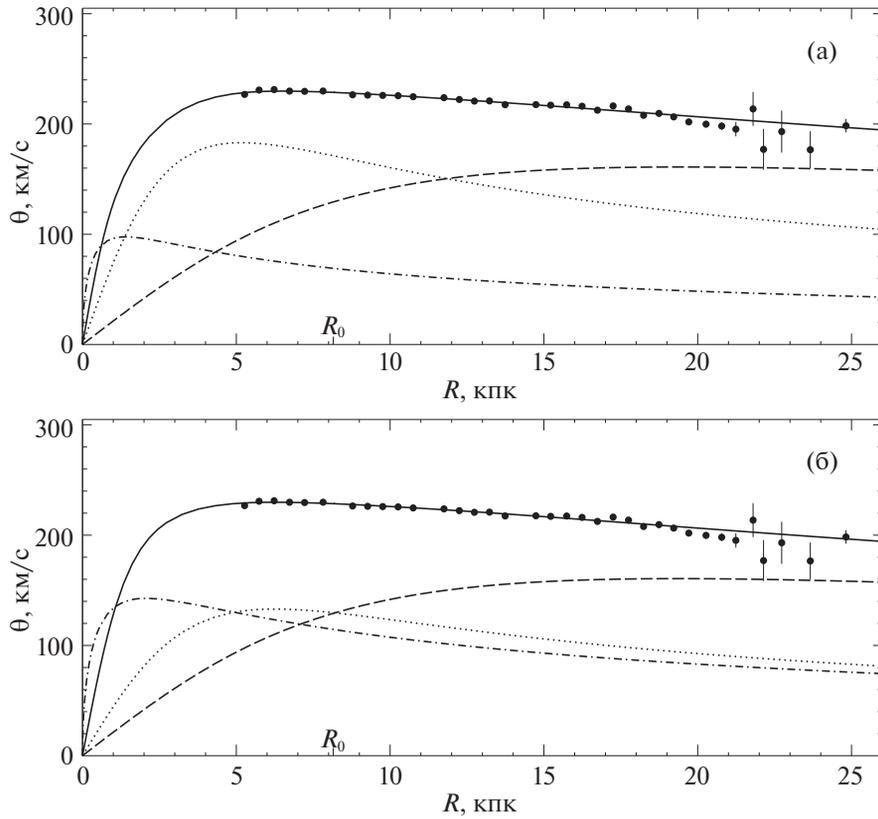
В зависимости от сжатия  $Q$  центральная компонента потенциалов допускает разные интерпретации. В случае  $Q = 1$  она соответствует классическому балджу. Однако существование такого балджа в Галактике не подтверждается данными, можно лишь указать верхний предел его возможного вклада в центральную компоненту (например, Блэнд-Хоторн, Герхард, 2016; Дебаттиста и др., 2017). Сжатый “балдж” ( $Q = 0.35$ , рис. 6б,г и 7) по своим характеристикам получился близким к компоненте толстого диска, который по современным данным имеет полутолщину  $\sim 1$  кпк, примерно вдвое меньший, чем у тонкого диска, радиальный масштаб (более сильную концентрацию к центру) и

низкую плотность в окрестностях Солнца (см., например, Снэйт и др., 2015). Поэтому центральную компоненту в этих и подобных моделях более правильно рассматривать как представление толстого диска, основная масса которого сосредоточена внутри солнечного круга.

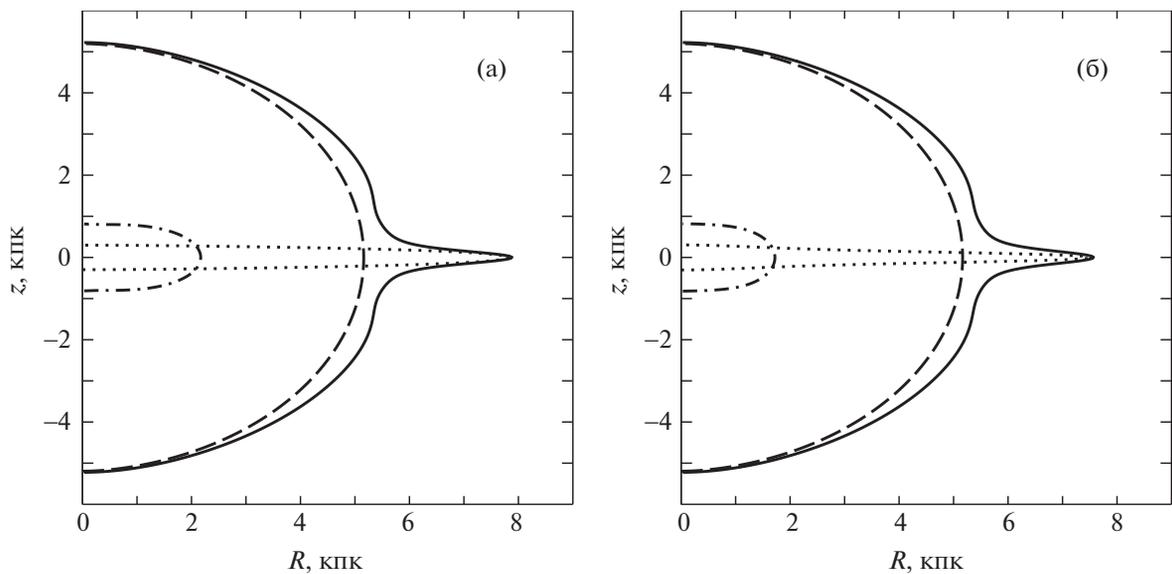
Итак, метод эквипотенциалей путем выбора обобщающих функций  $f(R, z)$  и значений параметров этих функций фактически позволяет задавать для каждой компоненты эквиденситы требуемого сжатия. Формулы (3)–(4) дают способ нахождения функций  $\varphi(\xi)$  для различных  $f(R, z)$ . Таким образом, предложенный нами способ управления вертикальной структурой компонент штеккелевской модели в целом решает задачу, вынесенную в заголовок статьи.

#### 4. ШТЕККЕЛЕВСКИЕ МОДЕЛИ ПО КРАСНЫМ ГИГАНТАМ

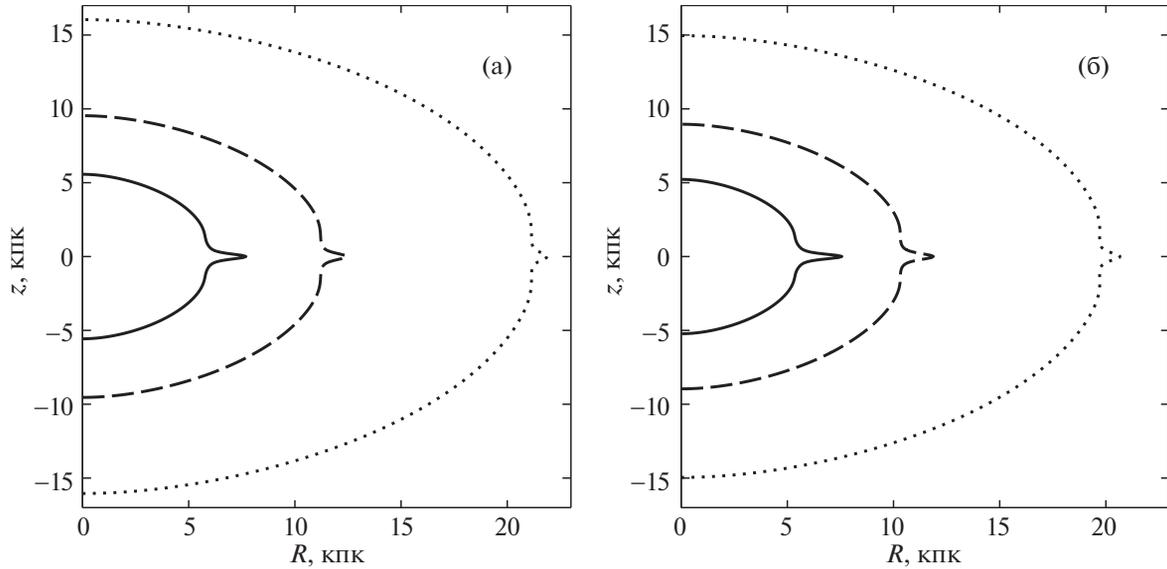
Разработанный алгоритм построения штеккелевских моделей был применен также к кривой круговой скорости, полученной Айлерс и др. (2019) по данным о  $\gtrsim 23\,000$  ярких красных гигантов (ЯКГ). Хотя для этих объектов использовались спектрофотометрические расстояния, откалиброванные по астрометрическим параллаксам Gaia, но все же не абсолютные расстояния, как для мазеров, полученная по ЯКГ кривая круговой скорости охватывает больший промежуток галактоцентрических расстояний ( $5 \lesssim R \lesssim 25$  кпк), чем кривая вращения по мазерам. В качестве исходных данных мы использовали приведенные Айлерс и др. (2019)



**Рис. 8.** Кривые круговой скорости для моделей потенциала Галактики, аппроксимирующих данные Айлерс и др. (2019) о средних круговых скоростях ярких красных гигантов (кружки): сплошная линия — трехкомпонентная модель, штриховая линия — гало; пунктирная линия — тонкий диск; штрихпунктирная линия — толстый диск. (а) — Решение для легкого толстого диска (с параметрами, полученными по мазерам). (б) — Решение в предположении равенства масс тонкого и толстого дисков.



**Рис. 9.** Эквиденситы  $\rho = 0.1 M_{\odot}/\text{пк}^3$  для штеккелевских моделей, построенных на основе метода экvipотенциалей по данным о ярких красных гигантах. (а) — Решение для легкого толстого диска. (б) — Решение в предположении равенства масс тонкого и толстого дисков. Сплошная линия — трехкомпонентная модель, штриховая линия — гало; пунктирная линия — тонкий диск; штрихпунктирная линия — толстый диск.



**Рис. 10.** Эквиденситы для полных штеккелевских моделей “сферическое гало — тонкий диск — толстый диск”, построенных с использованием метода эквипотенциалей по данным о мазерах HMSFRs (а) и ярких красных гигантах (б). Сплошная линия —  $\rho = 0.1 M_{\odot}/\text{пк}^3$ , штриховая линия —  $\rho = 0.01 M_{\odot}/\text{пк}^3$ , пунктирная линия —  $\rho = 0.001 M_{\odot}/\text{пк}^3$ .

средние значения круговой скорости и их доверительные интервалы для 38 значений  $R$ .

По этим данным был построен исходный потенциал в составе гало (5), тонкого диска (7) и толстого диска (8). Так как Айлерс и др. (2019) исключили объекты центральной области ( $R < 5$  кпк), то для значений параметров потенциала (8) принимались оценки из табл. 2. Сопоставление модельной кривой круговой скорости с измерениями по ЯКГ представлено на рис. 8а. Далее применялся метод эквипотенциалей: для штеккелевского потенциала с функциями  $\varphi_1(\xi_1)$  и  $\varphi_2(\xi_2)$ , определяемыми выражениями (16)–(21), заново оценивались параметры  $z_0$ ,  $\mu_2$ ,  $\mu_3$ ,  $\varepsilon_2$  и  $\varepsilon_3$  для сферического гало и целевых значений полутолщины тонкого и толстого дисков — 300 пк и 900 пк соответственно (Блэнд-Хоторн, Герхард, 2016). Полученные оценки всех параметров приведены в табл. 5 (столбец “Легкий толстый диск”). Соответствующие эквиденситы (рис. 9а) показывают, что удалось добиться целевых характеристик гало и обоих дисков.

Масса тонкого диска в построенной модели получилась почти в 5 раз больше массы толстого. Вместе с тем ряд данных говорит в пользу того, что масса толстого диска может составлять  $\sim 50\%$  массы всего диска Галактики (см., например, Снэйт и др., 2015; Дебаттиста и др., 2017). Поэтому по данным о ЯКГ была также построена штеккелевская модель при условии равенства масс двух дисковых компонент (решение дает  $M_{\text{thin}} = M_{\text{thick}} = 3.5 \times 10^{10} M_{\odot}$ ) в тех же остальных предположениях. Полученные параметры представлены в по-

следнем столбце табл. 5, сопоставление модельной кривой круговой скорости с данными — на рис. 8б, эквиденситы  $\rho = 0.1 M_{\odot}/\text{пк}^3$  — на рис. 9б. Оценка параметра  $\kappa_3 = 2.06 \pm 0.09$  близка к значению 2.25, приведенному Пулясисом и др. (2017) для модели с близкими по массе тонким и толстым дисками (в их терминах  $a_{\text{thick}} + b_{\text{thick}} = \kappa_3$  при  $z = 0$ ). Эквиденситы при разных плотностях для штеккелевских моделей данного состава, построенных по мазерам HMSFRs и ЯКГ, сопоставлены на рис. 10.

Комбинация метода эквипотенциалей и формул (3), (4) позволила построить штеккелевскую модель “гало—тонкий диск—толстый диск” с заданными характеристиками двух дисков, в том числе с учетом внешнего предположения о равенстве их масс. Таким образом, предложенный алгоритм представляет универсальным способом решения проблемы вертикального распределения плотности в штеккелевских моделях.

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Применительно к Галактике рассмотрена задача построения штеккелевской модели с реалистичной вертикальной структурой путем обобщения исходного потенциала из экваториальной плоскости звездной системы на все пространство.

Исходные модели потенциала в плоскости Галактики получены для трех разной степени однородности выборок мазеров, основанных на каталогах Рида и др. (2019) и Коллаборации VERA и др. (2020). Модельные параметры оценивались

**Таблица 5.** Оценки параметров потенциала, эквипотенциалей и величины  $z_0$  при штеккелевском моделировании Галактики по данным о ярких красных гигантах

Характеристика	Легкий толстый диск	Тонкий и толстый диски равных масс
$q$	$0.6592 \pm 0.0018$	$0.6561 \pm 0.0018$
$\kappa_1$	$0.10387 \pm 0.00063$	$0.10940 \pm 0.00061$
$\Phi_{0,1}, \text{км}^2/\text{с}^2$	$264.2 \pm 1.1$	$264.58 \pm 0.95$
$\alpha$	$0.7698 \pm 0.0067$	$0.6467 \pm 0.012$
$\kappa_2, \text{кпк}^{-1}$	$0.2359 \pm 0.0022$	$0.1777 \pm 0.0032$
$\Phi_{0,2}, \text{км}^2/\text{с}^2$	$289.4 \pm 1.0$	$207.8 \pm 1.2$
$\Phi_{0,3}, \text{км}^2/\text{с}^2$	(231.0)	$409.6 \pm 2.2$
$\kappa_3, \text{кпк}$	(1.4)	$2.062 \pm 0.087$
$z_0, \text{кпк}$	2.2	2.2
$\mu_2$	30	14
$\varepsilon_2$	0.2	0.09
$\mu_3$	0.57	2
$\varepsilon_3$	0.27	0.5

посредством оптимизации модельной кривой вращения с учетом природной дисперсии скоростей по данным о тригонометрических параллаксах и пространственных скоростях мазеров. Модели для трех выборок почти по всем параметрам значимо не отличаются друг от друга и после коррекции за асимметричный сдвиг дают кривые круговой скорости, практически совпадающие в области  $R \lesssim 12$  кпк.

С другой стороны, мазеры в областях образования звезд различных масс (SFRs) имеют стандарт природной дисперсии азимутальных скоростей в  $\approx 3$  раза больше, чем мазеры в областях образования массивных звезд (HMSFRs):  $20 \pm 3$  км/с против  $6.1 \pm 0.4$  км/с. Это говорит о значительной кинематической неоднородности выборки SFRs (хотя она примерно наполовину состоит из мазеров HMSFRs), что необходимо учитывать при обработке этих данных. Однако, судя по отсутствию признаков увеличения асимметричного сдвига с ростом природной дисперсии, ее высокое значение для SFRs и в целом для выборки VERA, по-видимому, объясняется главным

образом большими отличиями скоростей мазерных деталей от системной скорости целевого объекта, если он не принадлежит к классу HMSFRs.

Проведенное штеккелевское обобщение исходных моделей приводит к хорошему согласию с наблюдениями по ряду характеристик (пространственная плотность в окрестности Солнца, модельная кривая вращения и другие). Кроме того, использованный при этом метод Родионова для определения (единственной) функции  $\varphi(\xi)$  штеккелевского потенциала прост, что могло бы значительно облегчить решение производных задач. Однако метод не дает возможности влиять на вертикальную структуру и, как показывают полученные результаты, приводит к нереалистичному вертикальному распределению плотности в штеккелевской модели (сильно сжатое гало, недостаточно сжатый диск). Причем этот эффект устойчив по отношению к используемой базе данных и к модификации выражения для исходного потенциала.

В работе предложены и реализованы два способа решения этой проблемы. В первом, основанном на условной оптимизации, накладывались ограничения на диск (барометрическое вертикальное распределение) и на гало (фиксированная центральная поверхностная плотность). Этот способ также является простым, не требуя дополнительных вычислений. Однако в его рамках удалось добиться только частичного успеха для диска (приемлемое, но не произвольное сжатие), а для гало не удалось. Это означает, что первый способ нельзя рассматривать как универсальный; он может быть применим лишь к потенциалам определенного вида.

Другой способ, основанный на методе эквипотенциалей, представляется более универсальным. Во-первых, введение функций эквипотенциалей  $f(R, z)$  дает возможность получить новые параметры, изменение которых напрямую влияет на вертикальную структуру модели. Благодаря этому можно комбинировать в модели составляющие различного заданного сжатия, в том числе сферические. Во-вторых, сам выбор функций  $f(R, z)$  довольно широк. Можно вводить различные функции для разных подсистем Галактики, а также описывать иные звездные системы, базируясь на потенциале в экваториальной плоскости. Следует заметить, что некоторые функции  $f(R, z)$  давали для избранных видов исходных потенциалов физически неправдоподобные эквиденситы, в том числе отрицательные значения плотности, поэтому при введении функций  $f(R, z)$  для других потенциалов нужно проверять их "совместимость". Отметим, что метод эквипотенциалей применялся для обобщения потенциала из экваториальной плоскости на все пространство также и для нештеккелевских систем (Кутузов, Осипков, 1981; Осипков, 1997), а

значит, подобным образом могут решаться проблемы реалистичности вертикального распределения в широком спектре задач.

Представленный метод применим не только к нашей Галактике. Поскольку реальность третьего интеграла движения обсуждается и для внешних галактик (Бинни, Дэвис, 1990; Меррифилд, 1991), было бы интересно построить штеккелевскую модель для некоторой внешней звездной системы с целью проверки возможности более широкого применения данного метода.

Таким образом, вопрос о возможности управления вертикальным распределением в штеккелевских моделях решен положительно. Предложено два способа, один из которых представляется нам универсальным и может быть использован при построении штеккелевских моделей различной структуры. Этим способом нам удалось построить для нашей Галактики набор штеккелевских моделей, которые согласуются с наблюдательными данными о вращении подсистем объектов — мазеров или ярких красных гигантов — и обладают физически правдоподобными вертикальными распределениями. Это означает, что штеккелевские модели присутствуют в динамическом моделировании не только в теоретическом, но и практическом плане и могут использоваться для решения различных задач звездной динамики, например, для построения фазовых функций распределения.

Авторы благодарны анонимным рецензентам за полезные замечания. Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта 19-32-90144.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Айлерс и др. (A.-C. Eilers, D.W. Hogg, H.-W. Rix, and M.K. Ness), *Astrophys. J.* **871**, 120 (2019).
2. Бинни (J. Binney), *MNRAS* **426**, 1324 (2012).
3. Бинни, Вон (J. Binney and L.K. Wong), *MNRAS*, **467**, 2446 (2017).
4. Бинни, Дэвис (J. Binney and R. Davies), *Astrophys. J.* **361**, 78 (1990).
5. Бинни, Мак-Миллан (J. Binney and P. McMillan), *MNRAS* **413**, 1889 (2011).
6. Блэнд-Хоторн, Герхард (J. Bland-Hawthorn and O. Gerhard), *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* **54**, 529 (2016).
7. де Вега, Санчес (H.J. de Vega and N.G. Sanchez), *Inter. J. of Modern Phys.* **26**, 1057 (2011).
8. Гарднер и др. (E. Gardner, P. Nurmi, and C. Flynn), *MNRAS* **411**, 947 (2011).
9. Громов А.О., Никифоров И.И., *Астрофиз. бюлл.* **76**, 187 (2021).
10. Громов и др. (A.O. Gromov, I.I. Nikiforov, and L.P. Osipkov), *Baltic Astron.* **24**, 150 (2015).
11. Громов и др. (A.O. Gromov, I.I. Nikiforov, and L.P. Osipkov), *Baltic Astron.* **25**, 53 (2016).
12. Дебаттиста и др. (V.P. Debattista, M. Ness, O.A. Gonzalez, K. Freeman, M. Zoccali, and D. Minniti), *MNRAS* **469**, 1587 (2017).
13. Донато и др. (F. Donato, G. Gentile, P. Salucci, C. Frigerio Martins, M.I. Wilkinson, G. Gilmore, E.K. Grebel, A. Koch, et al.), *MNRAS* **397**, 1169 (2009).
14. Иргэнг и др. (A. Irgang, B. Wilcox, E. Tucker, and L. Schiefelbein), *Astron. Astrophys.* **549**, 137 (2013).
15. Коллаборация VERA и др. (VERA collaboration, T. Hirota, T. Nagayama, M. Honma, Yu. Adachi, R.A. Burns, J.O. Chibueze, Yo.K. Choi, et al.), *Publ. Astron. Soc. Pacific* **72**, 50 (2020).
16. Кузмин Г.Г., *Публ. Тарт. обсерв.* **32**, 332 (1952).
17. Кузмин Г.Г., *Изв. АН ЭССР* **2**, 3 (1953).
18. Кузмин Г.Г., *Астрон. журн.* **33**, 27 (1956).
19. Кузмин Г.Г., Велтманн Ю.-И.К., Теньес П.Л., *Публ. Тарт. обсерв.* **51**, 232 (1986).
20. Кузмин Г.Г., Маласидзе Г.А., *Сообщ. АН ГрузССР* **54**, 565 (1969).
21. Кутузов С.А., Осипков Л.П., *Вест. Ленингр. ун-та. Сер. 1*, 99 (1981).
22. Ларсон (R.V. Larson), *MNRAS* **194**, 809 (1981).
23. Локтин А.В., Марсаков В.А., *Лекции по звездной астрономии* (Ростов-на-Дону: Южный фед. ун-т, 2009); <http://www.astronet.ru/db/msg/1245721/index.html>.
24. Маласидзе Г.А., *Материалы Всесоюзного совещания, состоявшегося в Алма-Ате 23–26 октября 1972 г.* (Алма-Ата, 1973), с. 93.
25. Меррифилд (M. Merrifield), *Astron. J.* **102**, 1335 (1991).
26. Миямото, Нагай (M. Miyamoto and R. Nagai), *Publ. Astron. Soc. Japan* **27**, 533 (1975).
27. Осипков Л.П., *Вест. Ленингр. ун-та* **7**, 151 (1975).
28. Осипков Л.П., *Письма в Астрон. журн.* **23**, 443 (1997) [L.P. Osipkov, *Astron. Lett.* **23**, 385 (1997)].
29. Паренаго П.П., *Тр. ГАИШ* **13**, 59 (1940).
30. Пости и др. (L. Posti, J. Binney, C. Nipoti, and L. Ciotti), *MNRAS* **447**, 3060 (2015).
31. Пулясис и др. (E. Pouliaxis, P. Di Matteo, and M. Haywood), *Astron. Astrophys.* **598**, A66 (2017).
32. Расторгуев А.С., Уткин Н.Д., Заболотских М.В., Дамбис А.К., Байкова А.Т., Бобылев В.В., *Астрофиз. бюлл.* **72**, 134 (2017) [A.S. Rastorguev, N.D. Utkin, M.V. Zabolotskikh, A.K. Dambis, A.T. Bajkova, and V.V. Bobylev, *Astrophys. Bull.* **72**, 122 (2017)].
33. Рид и др. (M.J. Reid, K.M. Menten, A. Brunthaler, X.W. Zheng, T.M. Dame, Y. Xu, J. Li, N. Sakai, et al.), *Astrophys. J.* **885**, 131 (2019).
34. Родионов В.И., *Вест. Ленингр. ун-та* **13**, 142 (1974).

35. Родионов В.И., Докл. АН УзССР **3**, 28 (1985).
36. Сандерс, Бинни (J.L. Sanders and J. Binney), MNRAS **457**, 2107 (2016).
37. Сато, Миямото (S. Satoh and M. Miyamoto), Publ. Astron. Soc. Japan **28**, 599 (1976).
38. Снэйт и др. (O. Snath, M. Haywood, P. Di Matteo, M. D. Lehnert, F. Combes, D. Katz, and A. Gómez), Astron. Astrophys. **578**, A87 (2015).
39. Фамаэ, Дейонге (B. Famaey and H. Dejonghe), MNRAS **340**, 752 (2003).
40. Фелльхауэр и др. (M. Fellhauer, V. Belokurov, N.W. Evans, M.I. Wilkinson, D.B. Zucker, G. Gilmore, M.J. Irwin, D.M. Bramich, et al.), Astrophys. J. **651**, 167 (2006).
41. Фридман А.М., Хоперсков А.В., *Физика галактических дисков* (М.: Физматлит, 2011).
42. Хернквист (L. Hernquist), Astrophys. J. **356**, 359 (1990).
43. Хори (G. Hori), Publ. Astron. Soc. Japan **14**, 353 (1962).
44. Штеккель (P. Stäckel), Math. Ann. **35**, 91 (1890).
45. Эддингтон (A.S. Eddington), MNRAS **76**, 37 (1915).
46. Эйнасто Я., Рюммель У., *Астрофизика* **6**, 241 (1970) [J. Einasto and U. Rummel, Astrophysics **6**, 120 (1970)].