

ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ТЕПЛОВАЯ МОДЕЛЬ ЭВОЛЮЦИИ ЗЕМЛИ

© 2021 г. М. Ю. Решетняк^{1,2*}

¹Институт физики Земли РАН, Москва, Россия

²Институт земного магнетизма и распространения радиоволн РАН, Москва, Россия

Поступила в редакцию 02.06.2021 г.

После доработки 18.06.2021 г.; принята к публикации 29.06.2021 г.

Рассмотрена модель совместного остывания ядра и мантии Земли на интервале времени с момента аккреции, 4.5 млрд лет назад, и до 1.5 млрд лет в будущее. Модель позволяет получить современный радиус твердого ядра, близкий к наблюдаемому тепловый поток на поверхности планеты, удовлетворить ограничениям по температуре и вязкости мантии, параметрам слоя D'' и литосферы. Исследованы сценарии эволюции Земли, при которых тепловой поток на границе ядро–мантия не претерпел значительных изменений. Приведены следствия для геодинамо.

Ключевые слова: эволюция Земли, ядро, мантия, обратная задача, геодинамо.

DOI: 10.31857/S032001082107007X

ВВЕДЕНИЕ

После завершения процесса аккреции и появления жидкого ядра (4.5 млрд лет), длившиеся ~50–100 млн лет (Дрейк, 2000; Соломатов, 2007), ядро Земли, имевшее температуру порядка $T_0 = 6000^\circ\text{K}$ (Лаброзе и др., 1997), начало остывать, отдавая свое тепло мантии. Насколько процесс остывания был монотонным, сказать сложно, поскольку конечный ответ зависит от начальных условий и точной оценки концентрации радиоактивных элементов. Тем не менее на характерных временах порядка миллиарда лет температура ядра уменьшалась, со временем появилось твердое ядро и, возможно, небольшой сферический слой вблизи границы ядро–мантия с субадиабатическим градиентом температуры.

За последние два десятилетия выработался некоторый стандарт в моделировании тепловой эволюции ядра (Лаброзе и др., 1997; Лаброзе, 2003). Основным параметром, регулирующим остывание ядра в моделях, является заданный тепловой поток на границе ядро–мантия Q_b , как правило убывающий с момента аккреции к настоящему времени на величину порядка 20%. В то же время мощность радиоактивных элементов в мантии за 4.5 млрд лет уменьшилась приблизительно в 4.5 раза, а величина теплового потока на поверхности планеты Q_s — на порядок (Шуберт и др., 2001). В этой связи возникает вопрос, насколько предположение о медленном изменении

Q_b обосновано. Важность данного вопроса обусловлена ограничениями, вносимыми геодинамо. Согласно палеомагнитным наблюдениям, нет указаний на существенное увеличение напряженности геомагнитного поля (см. обзор Решетняка, Павлова, 2016), напрямую связанное с увеличением Q_b . Для ответа на вопрос о постоянстве Q_b необходимо решить совместные уравнения теплообмена в ядре и мантии. Этот подход интересен еще и тем, что полученное решение может быть проверено на соответствие некоторым известным величинам для мантии, например, температуры, вязкости (Трубицын, Трубицын, 2020; Трубицын, 2016), потока Q_s , чисел Рэлея, которые также могут быть использованы для проверки работоспособности моделей остывания Земли. Точность определения этих величин хоть и не высока, но в ряде случаев может быть выше точности величин, связанных непосредственно с ядром.

Первые параметрические модели остывания мантии начали появляться еще в 80-е гг. (см. обзор в Шуберт и др., 2001), но в то время модели ядра были развиты значительно хуже, чем сейчас, в частности, не учитывались ограничения, связанные с генерацией геомагнитного поля (Лаброзе, 2003), только-только стали появляться скейлинговые законы, связывающие параметры модели, основанные на результатах трехмерного моделирования тепловой конвекции и динамо. Неудивительно, что с тех пор некоторые параметры, в частности входящие в зависимости вязкости от температуры, претерпели изменение. В целом же модели остывания ядра не потеряли своей актуальности, и могут

*Электронный адрес: m.reshetnyak@gmail.com

быть использованы и в настоящее время, хотя и требуют некоторого переосмысления. Их ценность связана еще и с тем, что современные трехмерные модели тепловой конвекции не могут быть использованы для описания тепловой конвекции на ранних этапах эволюции Земли, когда числа Рэлея были еще слишком велики. В этом случае использование параметрических моделей, основанных на скейлинговых зависимостях между безразмерными числами, оказывается очень удобным средством.

Ниже мы рассмотрим одну из простейших параметрических однослойных моделей остывания мантии и ядра (Стивенсон и др., 1983), которая предсказывает значения Q_b сразу после аккреции на два порядка большие, чем сейчас, и покажем, как определенным выбором параметров уменьшить Q_b в древности, удовлетворив требованиям палеомагнитологов, наблюдающих геомагнитное поле, сравнимое с современным по напряженности, 3.5 млрд лет назад (Мак-Элхيني, 1980; Тардуно и др., 2010). Модель, которая покрывает интервал 6 млрд лет (с окончания процесса дифференциации ядра и мантии 4.5 млрд лет в прошлом и на 1.5 млрд лет в будущее), позволяет проследить появление твердого ядра, эволюцию тепловых потоков на границах жидкого ядра, поверхности планеты, сделать некоторые выводы об изменении магнитного поля на геологических временах. Поскольку интервал моделирования выходит за пределы геомагнитных наблюдений (3.5 млрд лет), появляется возможность предсказания поведения магнитного поля на ранней стадии эволюции планеты. Данные подходы могут быть использованы для описания тепловой эволюции планет.

ОСТЫВАНИЕ ПЛАНЕТЫ

Рассмотрим остывание Земли радиуса r_s после окончания формирования жидкого ядра радиуса r_b (рис. 1). К этому моменту в планете произошла дифференциация вещества: ядро стало в основном железным, а мантия — силикатной. Граница ядро–мантия является переходом от одного химического состава к другому. Предполагается, что радиусы r_b и r_s уже через 50–100 млн лет после образования Земли оставались неизменными во времени. Остывание планеты происходит за счет теплового потока Q_s на r_s . Задача состоит в описании совместного процесса охлаждения Земли: ее мантии и ядра.

Охлаждение ядра

Согласно модели, первоначально ядро радиуса r_b было полностью расплавлено (Лаброзе и др., 1997; Соломатов, 2007). Далее, по мере остывания за счет теплового потока Q_b на границе ядра, в центре Земли появился зародыш твердого ядра

(рис. 1). Радиус твердого ядра c увеличивался со временем. Внутри твердого ядра $0 \leq r \leq c$ (I) распределение температуры определяется кондуктивным теплообменом и радиоактивными источниками. В жидком ядре $r \leq r_b$ (II) температура распределена по адиабате. Модель описывает эволюцию температуры, тепловых потоков в ядре и увеличение радиуса ядра c во времени t при заданном Q_b . Соответствующим подбором параметров удается получить реалистичное значение современного радиуса твердого ядра, $c = 1228$ км, и требуемую мощность для генерации магнитного поля (Решетняк, 2021). Напомним основные уравнения этой модели.

Распределения плотности $\rho(r)$, давления $P(r)$ и ускорение свободного падения $g(r)$ удовлетворяют гидростатическому балансу, задаваемому соотношениями

$$\nabla P = -\rho g, \quad (1)$$

$$g(r) = \frac{4\pi G}{r^2} \int_0^r \rho(u) u^2 du. \quad (2)$$

Здесь G — гравитационная постоянная. Замыкает систему уравнений для трех переменных (P , ρ , g) логарифмическое уравнение состояния (Пурье, Тарантола, 1998)

$$P = K_0 \frac{\rho}{\rho_0} \ln \frac{\rho}{\rho_0}, \quad (3)$$

где K_0 — модуль объемной упругости, ρ_0 — плотность при нулевом давлении.

Для учета скачка на границе ядро–мантия вводится поправка

$$\rho(r) = \begin{cases} \rho(r) + \delta\rho, & \text{если } r \leq c \\ \rho(r), & \text{если } r > c. \end{cases} \quad (4)$$

Зная распределения (P , ρ , g), можно найти адиабатическое распределение температуры

$$T_{ad}(r) = T_c(c) e^{-\int_c^r \frac{\alpha(u)g(u)}{C_p} du}. \quad (5)$$

Здесь $T_c(c)$ — температура на границе $r = c$, коэффициент объемного расширения α задан соотношением

$$\alpha(r) = \frac{\gamma C_p \rho_0}{K_0 \left(1 + \ln \frac{\rho}{\rho_0}\right)}, \quad (6)$$

где C_p — удельная теплоемкость при постоянном давлении, γ — коэффициент Грюнайзена.

Если твердое ядро еще не появилось, $c = 0$, то $T_c(c) = T_c(0) = T_0$, где T_0 — температура в центре

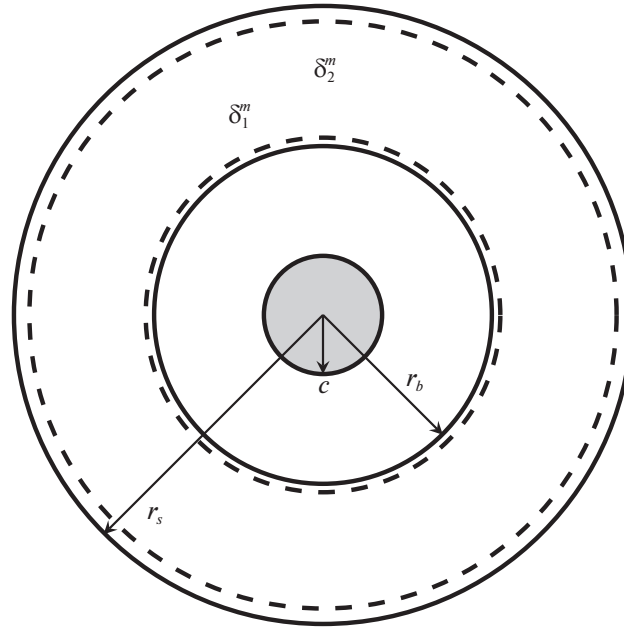


Рис. 1. Схематическое строение Земли радиуса r_s , включающее твердое ядро радиуса c и границу ядро-мантия r_b . На границах мантии возникают тепловые пограничные слои δ_1^m , δ_2^m .

Земли. Значение T_o находится из уравнения теплового баланса

$$-4\pi \int_0^{r_b} \rho C_p \frac{\partial T_{ad}}{\partial t} r^2 dr = -\frac{\partial T_o S}{\partial t} = Q_b \quad (7)$$

и

$$S = \frac{4\pi}{C_p} \int_0^{r_b} e^{-\frac{1}{C_p} \int_0^r \alpha(a)g(a) da} \rho r^2 dr. \quad (8)$$

Рост твердого ядра начинается, когда температура станет меньше температуры кристаллизации

$$T_s(r) = T_s^o \left(\frac{\rho(r)}{\rho(c)} \right)^{2(\gamma-1/3)}, \quad (9)$$

где T_s^o — температура кристаллизации в центре ядра Земли. Кристаллизация начинается в центре ядра, т.е. появление твердого ядра сводится к выполнению условия $T_c = T_o = T_s(r)$ в центре $r = c = 0$. Далее, при росте твердого ядра, $c > 0$, температура кристаллизации дает значение для адиабаты на границе твердого ядра: $T_{ad}(c) = T_c(c) = T_s(c)$.

Положение границы твердого ядра c может быть найдено из баланса энергии

$$Q_b - Q_c = Q_L + Q_G + Q_C, \quad (10)$$

где

$$Q_L = \dot{c}P_L, \quad Q_G = \dot{c}P_G, \quad Q_C = \dot{c}P_C. \quad (11)$$

С левой стороны в (10) стоит разность тепловых потоков Q_b , Q_c за единицу времени, входящих в адиабатическую область II, справа — скорость изменения энергий. Во многих работах принимается, что $Q_b = Q_b^o - \gamma t$. Коэффициент γ выбран так, чтобы обеспечить уменьшение потока за 4.5 млрд лет на 20%.

Источник, связанный с латентной теплотой в (11), равен

$$P_L(c) = 4\pi \rho(c) \delta S T_s(c), \quad (12)$$

где δS — удельная энтропия кристаллизации.

Оценка изменения гравитационной энергии при росте твердого ядра (Лопер, 1984) имеет вид

$$Q_G(c) = \frac{2\pi}{5} GM_o \delta \rho \frac{c^3}{r_b} \left[1 - \left(\frac{c}{r_b} \right)^2 \right], \quad (13)$$

где $M_o = \frac{4}{3}\pi \int_0^{r_b} \rho r^2 dr$ — масса ядра, постоянная в модели.

Дифференцируя (13) по времени, получаем

$$P_G(c) = \frac{2\pi}{5} \frac{GM_o \delta \rho c^2}{r_b} \left[3 - 5 \left(\frac{c}{r_b} \right)^2 \right]. \quad (14)$$

Изменение теплоты, связанное с адиабатическим охлаждением в (10), дает следующий вклад:

$$P_C = -C_p \int_c^{r_b} \rho \frac{\partial T_{ad}}{\partial t} r^2 dr. \quad (15)$$

Таблица 1. Параметры модели ядра

Название	Обозначение	Значение
Гравитационная постоянная	G	$6.6873 \times 10^{-11} \text{ м}^3 (\text{кг с}^2)^{-1}$
Коэффициент температуропроводности	κ	$7 \times 10^{-6} \text{ м}^2 \text{ с}^{-1}$
Параметр Грюнайзена	γ	1.5
Радиус жидкого ядра	r_b	$3.48 \times 10^6 \text{ м}$
Удельная энтропия кристаллизации	δS	118 Дж (кг К) ⁻¹
Удельная теплоемкость	C_p	860 Дж (кг К) ⁻¹
Плотность при нулевом давлении	ρ_0	7500 кг м^{-3}
Скачок плотности на границе твердого ядра	$\delta \rho$	500 кг м^{-3}
Плотность ядра	ρ	$1.2 \times 10^4 \text{ кг м}^{-3}$
Модуль объемной упругости	K_0	$4.76 \times 10^{11} \text{ Па}$
Современный радиус твердого ядра	\hat{c}	$1.22 \times 10^6 \text{ м}$

Уравнения (10)–(15) могут быть решены относительно производной по времени \dot{c} и проинтегрированы по времени¹.

Считая температуру непрерывной на границе c , получаем, что значение температуры $T_s(c)$ является граничным условием для задачи теплопроводности внутри твердого ядра $0 < r < c$ (I) с движущейся границей $c(t)$:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \Delta T, \quad (16)$$

где κ — коэффициент температуропроводности. В центре $r = 0$ имеем второе граничное условие $\frac{\partial T}{\partial r} = 0$. Совместное решение уравнений (1)–(16) дает распределение физических полей в областях I, II (см. подробнее значения параметров в табл. 1).

Охлаждение мантии

Остывание мантии происходит за счет теплового потока в околоземное пространство. В моделях обычно принимается, что температура на поверхности Земли T_s равна фиксированному значению. Насколько это упрощение, конечно же, неприменимое на ранней стадии эволюции планеты (Абе, 1993), влияет на изменение теплового режима, обсудим далее, а пока отметим, что граничные условия для задачи ядра и мантии различны. Для ядра — это условие второго рода, а для мантии —

первого. Другим важным отличием мантии от ядра является наличие ярко выраженных тепловых пограничных слоев, соответствующих слою D'' и литосфере, связанных с большими числами Рэлея и сильной зависимостью вязкости от температуры в мантии (рис. 1). Обычно тепловыми пограничными слоями в жидком ядре пренебрегают (Лаброзе и др., 1997).

Для того чтобы описать скачки температуры в пограничных слоях, используют следующий элегантный подход (Стивенсон и др., 1983; Шуберт и др., 2001), записав уравнение остывания для средней температуры T_m мантии массой M_m с теплоемкостью C_p^m :

$$C_p^m M_m \frac{\partial T_m}{\partial t} = Q_b - Q_s + H(t), \quad (17)$$

где Q_s — тепловой поток на поверхности планеты, $H = \frac{4}{3} \pi C_p^m \rho^m (r_s^3 - r_b^3) C_e^m e^{-\frac{t}{\tau_e^m}}$ — вклад радиоактивных источников в мантии, убывающих во времени, C_e^m — удельная мощность радиоизотопов, τ_e^m — характерное время распада изотопов. Температура T_m осреднена по конвективной области мантии, находящейся, согласно модели, между двумя пограничными слоями δ_1, δ_2 : $T_m = \frac{3}{r_s^3 - r_b^3} \int_{r_b + \delta_1}^{r_s - \delta_2} T(r) r^2 dr$.

В правой части (17) два неизвестных тепловых потока, которые требуется выразить через T_m . Скачки температуры удовлетворяют соотношениям $\delta T_1 = T_m - T_b$, $\delta T_2 = T_s - T_m$, $\delta T_1 + \delta T_2 = \delta T$, $\delta T = T_s - T_b$.

¹Для вычислений удобно ввести переменную $f = c^3/3$, тогда $\dot{f} = \dot{c}c^2$.

Поток Q_s и толщина пограничного слоя δ_2 выражаются через скачок температуры в мантии δT : $Q_s = S_s k^m \frac{\delta T}{r_s - r_b} \text{Nu}$, $\delta_2 = \text{Nu}^{-1} (r_s - r_b)$, где $\text{Nu} = \left(\frac{\text{Ra}}{\text{Ra}^{\text{crit}}} \right)^\beta$ — число Нуссельта, $k = \kappa \rho^m C_p^m$ — коэффициент теплопроводности, β — константа, $S_s = 4\pi r_s^2$ — площадь поверхности Земли. Число Рэлея задано в виде $\text{Ra} = \frac{g\alpha\delta T (r_s - r_b)^3}{\kappa\nu}$, где α — коэффициент объемного расширения, g — ускорение свободного падения,

$$\nu = \nu_o e^{\frac{A_o}{T_m}} \quad (18)$$

— коэффициент гидродинамической вязкости, ν_o , A_o — константы. Предполагается, что $\text{Ra} \gg \text{Ra}^{\text{crit}}$, где Ra^{crit} — критическое значение, соответствующее началу тепловой конвекции. Если $Q_b = 0$, то уравнение (17) может быть проинтегрировано по времени при заданных начальных условиях. Во многих случаях так и поступали, предполагая, что тепловым влиянием ядра на мантию можно пренебречь (Шуберт и др., 2001). Для описания же эволюции ядра знание Q_b крайне важно, и его необходимо найти.

Перейдем к вычислению Q_b . Возможны различные подходы, например, использование большого числа эмпирических закономерностей (Сотин, Лаброзе, 1999) как для верхней границы мантии, так и для нижней. Универсальность данного подхода может скрадываться недостаточной точностью самих параметров, полученных для чисел Рэлея, много меньших значений сразу после аккреции.

Другая возможность основана на гипотезе (Джарвис, 1993; Вангелов, Джарвис, 1994), согласно которой, для нижнего и верхнего пограничных слоев должно выполняться равенство локальных чисел Рэлея:

$$\text{Ra}_1 = \frac{g\alpha\delta T_1 \delta_1^3}{\kappa\nu_1}, \quad \text{Ra}_2 = \frac{g\alpha\delta T_2 \delta_2^3}{\kappa\nu_2}. \quad (19)$$

Поскольку изменение вязкости ν по глубине много больше изменений α , g , κ , последние можно считать постоянными. После чего получаем выражение

$$\delta_1 = \left(\frac{\nu_1 \delta T_2}{\nu_2 \delta T_1} \right)^{1/3} \delta_2. \quad (20)$$

Значения ν_1 , ν_2 берутся при температурах $(T_b + T_m)/2$, $(T_s + T_m)/2$ соответственно. Но, как следует из численных экспериментов, получаемые скачок температуры $\delta T_1 \ll \delta T_2$ и толщина пограничного слоя $\delta_1 < 1$ км оказываются крайне малы и не соответствуют современным представлениям

о структуре слоя D'' , для которого $\delta T_1 \sim 10^2$ К и $\delta_1 \sim 10^2$ км.

Как показывают численные эксперименты, для нахождения δ_1 удобнее использовать эмпирический прием (Стивенсон и др., 1983; Шуберт и др., 2001), основанный на физических экспериментах (Букер, Стенгел, 1978; Рихтер, 1978) по нахождению критического числа Рэлея для пограничного слоя с переменной вязкостью:

$$\text{Ra}_{\text{crb}} = \frac{g\alpha\delta T_1 \delta_1^3}{\kappa\nu_1} \approx 2 \times 10^3. \quad (21)$$

Тогда

$$\delta_1 = \left(\frac{\text{Ra}_{\text{crb}} \kappa\nu_1}{g\alpha\delta T_1} \right)^{1/3}, \quad (22)$$

$$\delta T_1 = \delta T - \delta T_2, \quad Q_b = S_b k^m \frac{\delta T_1}{\delta_1},$$

где $S_b = 4\pi r_b^2$ — площадь жидкого ядра. После этого уравнения (17)–(22) могут быть решены относительно T_m при заданном δT .

Рассмотрим совместное решение задач для ядра и мантии. При постоянном T_s скачок δT зависит только от температуры T_b , которая изменяется при остывании ядра. Условие сопряжения остывания ядра и мантии следует из непрерывности температуры на границе r_b . Пусть на начальной итерации известен поток на границе ядро–мантия Q_b . Этого (в совокупности с начальными условиями) достаточно, чтобы решить уравнения (1)–(16) для ядра и найти значение адиабатической температуры $T_{ad}(r_b)$ на внешней границе ядра. В нашем построении, основанном на пренебрежимо малом скачке температуры со стороны ядра на r_b , это и будет температура T_b , определяющая перепад температуры в мантии δT . Зная δT , можно решить (17)–(22) и найти T_m и Q_b . Итеративный процесс, включающий расчет физических полей для ядра и мантии на текущем шаге по времени, заканчивается после выполнения заданного критерия точности. Детали численной реализации задачи по охлаждению ядра и нахождению оптимальных параметров модели на многопроцессорных компьютерах, можно найти в работах (Решетняк, 2019, 2020).

РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Как следует из результатов работы (Стивенсон и др., 1983), на начальном этапе охлаждения (первые сотни миллионов лет) потоки на поверхности планеты и границе ядро–мантия превосходили современные значения на несколько порядков. Если для эволюции мантии большой поток Q_s является следствием уменьшения вязкости при больших T_m

и может быть быстро компенсирован быстрым последующим увеличением вязкости в ходе охлаждения мантии, то большие потоки тепла на границе ядро—мантия не имеют подобного компенсационного механизма, поскольку свойства металла слабо зависят от температуры. В случае появления больших потоков Q_b возникает сложность с твердым ядром, которое при возрастании Q_b может стать слишком большим (жидкое ядро может и полностью затвердеть). Как уже отмечалось, палеомагнитные наблюдения также не отмечают сильного возрастания напряженности магнитного поля B в древности, связанного с тепловым потоком $B \sim \sim Q_b^{1/3}$. Анализ показывает, что при небольшом отступлении от значений параметров, приведенных в (Стивенсон и др., 1983), легко попасть на режимы, когда Q_b действительно становится большим, и ядро начинает быстро охлаждаться. Другими словами, вероятность получить полностью твердое ядро весьма высока. В этой связи кажется интересным исследовать сценарии эволюции, когда потоки Q_b не претерпевают больших изменений. Далее мы подберем такие значения A_o, ν_o , которые, с одной стороны, дадут правдоподобные оценки вязкости в мантии, а с другой стороны, уменьшат тепловой поток Q_b на начальном этапе развития планеты. Заранее отметим, что используемые значения A_o, ν_o лежат в диапазоне значений, используемых в современных моделях (Шуберт и др., 2001).

Прежде чем перейти к обсуждению результатов моделирования, отметим, что модель содержит большое число параметров, известных с разной степенью точности (см. табл. 1, 2). Зависимость решения уравнений (1)–(22) от параметров может быть изучена как отдельно для каждого, так и путем нахождения оптимального решения, лучшим образом удовлетворяющего заданным ограничениям (Решетняк, 2020). В общем случае под ограничением понимается требование близости той или иной величины, входящей в модель (или производной от нее), к заданному значению. В силу нелинейности задачи и большого числа параметров, для поиска оптимального решения удобно использовать метод Монте-Карло, идеально подходящий для параллельных компьютеров и позволяющий подобрать параметры модели в заданном диапазоне возможных значений. Метод также позволяет сократить число параметров до минимума, выделив наиболее важные.

Ниже будет рассмотрено два варианта штрафных функций: $\Psi_a = 1 - e^{R_1}$ и $\Psi_b = 1 - e^{-\frac{1}{3}(R_1+R_2+R_3)}$, где $R_1 = \frac{|c - \hat{c}|}{\hat{c}}$, $R_2 = \frac{|Q_s - \hat{Q}_s|}{\hat{Q}_s}$ и $R_3 = \frac{\sigma_b}{M_b}$. Минимум Ψ_a соответствует набору параметров, дающих лучшее приближение для

современного радиуса твердого ядра \hat{c} . Минимум функции Ψ_b соответствует, в дополнение к предыдущему условию, еще двум требованиям: приближению по величине современного теплового потока на поверхности Земли \hat{Q}_s и минимальному среднеквадратичному отклонению σ_b потока Q_b , нормированному на его среднее значение M_b на интервале времени, начиная с $t_d = 200$ млн лет и до конца интервала моделирования. Величины R_1, R_2 вычисляются для настоящего момента времени. Значения \hat{c}, \hat{Q}_s известны из наблюдений (см. табл. 1, 2).

Начнем с простейшего условия, потребовав воспроизвести в модели современный радиус твердого ядра \hat{c} , используя для этого штрафную функцию Ψ_a и следующий набор варьируемых параметров: $T_o, T_s^o, C_e^m, \nu_o, A_o$. Первые два параметра отвечают за размер и возраст твердого ядра, C_e^m — за энергобюджет мантии, два последних — за конвективный теплообмен в мантии. Результаты моделирования представлены в табл. 3, режим 1a. Можно заключить, что с поставленной задачей модель легко справилась: $\hat{c} - c = 300$ м. Возраст твердого ядра в данном расчете $a = 4.5 - t_b = 2.36$ млрд лет. Каких-либо прямых наблюдений, связанных с оценкой возраста твердого ядра, нет. При определенных условиях в момент образования твердого ядра может появляться избыточная энергия, доступная для геодинамо. В свою очередь палеомагнитологи не наблюдают явных свидетельств повышения напряженности магнитного поля, предсказываемого теорией.

Оценим, насколько a и c чувствительны к возмущению температуры поверхности Земли T_s . Согласно работам (Абе, 1993; Дрейк, 2000; Соломатов, 2007), T_s могла быть весьма высока, достигая 1500 градусов Кельвина и выше.

Пусть $T_s = T_s^o + (T_s^{\max} - T_s^o) \exp(-t/T_s^w)$, так что $T_s \sim T_s^{\max}$ при $t \ll T_s^w$ и $T_s \sim T_s^o$ при $t > T_s^w$. Рассмотрим случай, в котором дополнительно к параметрам, варьируемым в режиме 1a, добавлены T_s^{\max} и T_s^w . Ограничение оставлено то же, что и в 1a. Расчеты показали, что начальные условия существенно не влияют на размер и возраст твердого ядра (см. табл. 3, режим 1b). Можно заключить, что характерное время тепловой памяти системы много меньше возраста Земли. Это напрямую связано с экспоненциальной зависимостью вязкости от температуры в (18): небольшое увеличение температуры приводит к быстрому уменьшению вязкости, усилению конвективного теплообмена и ускоренному остыванию, компенсирующему первоначальное увеличение температуры.

В обоих расчетах 1a и 1b наблюдается большое отклонение теплового потока на поверхности Земли Q_s от современного \hat{Q}_s . Также в начале

Таблица 2. Параметры модели мантии

Название	Обозначение	Значение
Радиус Земли	r_s	6.371×10^6 м
Плотность мантии	ρ^m	3.4×10^3 кг м ⁻³
Критическое значение числа Рэлея	Ra^{crit}	1200
Удельная теплоемкость	C_p^m	1230 Дж (кг К) ⁻¹
Ускорение свободного падения	g^m	10 м с ⁻²
Коэффициент объемного расширения	α^m	3×10^{-5} К ⁻¹
Коэффициент температуропроводности	κ^m	10^{-6} м ² с ⁻¹
Численная константа	β	0.3
Значение современного теплового потока	\dot{Q}_s	44 ТВт

Таблица 3. Модельные значения c_m , Q_s , Q_b для настоящего времени, время появления твердого ядра t_b и величина σ_b/M_b

№	Заданные параметры	c_m , км	Q_s , ТВт	Q_b , ТВт	t_b , млрд лет	σ/M
1a	$T_o = 6167$ К, $T_s^o = 5366$ К $T_s = 273$ К, $C_e^m = 3.79 \times 10^{-14}$ К с ⁻¹ $\nu_o = 1.46 \times 10^7$ м ² /с, $A_o = 7.04 \times 10^4$ К	1219.7	82.8	8.9	2.14	0.54
1b	$T_o = 6167$ К, $T_s^o = 5366$ К $T_s = 273$ К, $C_e^m = 3.79 \times 10^{-14}$ К с ⁻¹ $\nu_o = 1.46 \times 10^7$ м ² /с, $A_o = 7.04 \times 10^4$ К $T_s^{max} = 1500$ К, $T_s^w = 0.2$ млрд лет	1210.5	82.7	8.9	2.9	0.53
2	$T_o = 5637$ К, $T_s^o = 5372$ К $T_s = 273$ К, $C_e^m = 1.16 \times 10^{-14}$ К с ⁻¹ $\nu_o = 1.33 \times 10^7$ м ² /с, $A_o = 7.42 \times 10^4$ К	1180.0	54.4	6.5	1.53	0.16

эволюции Q_b превышало современное значение в 2.5 раза. В то же время максимальные значения Q_b в наших расчетах уже значительно меньше наблюдаемых в (Стивенсон и др., 1983), где отличие от современного значения составляло два порядка, но также может быть еще уменьшено. Для поиска оптимального решения была использована штрафная функция Ψ_b (см. результаты расчетов в табл. 3, режим 2). Напомним, что для данного расчета набор варьируемых параметров совпадает с набором в 1a, но дополнительно к ограничению на размер твердого ядра добавлены условия на амплитуду теплового потока на поверхности Зем-

ли и минимальную дисперсию теплового потока на границе ядро–мантия. Обратим внимание, что при сравнительно том же размере твердого ядра его возраст увеличился на четверть. Нам удалось существенно уменьшить Q_s , хотя оно все еще остается больше требуемого значения. Попытки уменьшить Q_s еще более приводят к уменьшению радиуса твердого ядра c , вплоть до его исчезновения. В то же время нам удалось уменьшить отношение σ_b/M_b более чем в три раза, уменьшив вариации Q_b практически на всем рассматриваемом интервале времени. Небольшие значения Q_b в начальный момент времени связаны с выбором однородного

распределения температуры в мантии в начальный момент времени. Далее мы рассмотрим поведение во времени ряда важных величин, продлив интервал моделирования в будущее.

Скорость роста радиуса твердого ядра s замедляется со временем и за последующие 1.5 млрд лет s увеличится лишь на 135 км (т.е. на 11%) (рис. 2а). Скорее всего подобное утоньшение жидкого ядра не отразится существенно на генерации магнитного поля. Другое изменение геометрии связано с эволюцией тепловых пограничных слоев. Для настоящего времени их толщины составляют $\delta_1 = 83$ км и $\delta_2 = 137$ км. Это близко к современным оценкам — порядка 100 км для обоих слоев (Дзевонский, Андерсон, 1981; Стейси, Лопер, 1983). Толщины слоев растут. Появление твердого ядра несколько замедлило рост δ_1 , поскольку за счет выделения дополнительной энергии в ядре процесс охлаждения мантии также замедлился, приведя к излому кривой δ_1 . На поведении δ_2 появление твердого ядра не отразилось: процессы в ядре очень сильно экранируются мантией, если не считать наблюдаемое на поверхности Земли магнитное поле. Через 1.5 млрд лет δ_1 , δ_2 достигнут значений 90 и 150 км соответственно.

Скачки температуры δT_1 , δT_2 в пограничных слоях в настоящее время в модели равны 850 и 2600 К (рис. 2в). Величина первого скачка близка к наблюдаемой в слое D'' 840 К (Дзевонский, Андерсон, 1981). Величина второго скачка включает скачок в литосфере и мантии. Вычислим температуру границы ядро–мантия $T_b = T_s + \delta T_1 + \delta T_2 = 273 + 850 + 2600 = 3723$ К, что близко к современным оценкам ~ 3800 К (Трубицын, Трубицын, 2020). Обратим внимание на разный знак производной по времени для обоих слоев: δT_1 — растет, δT_2 — уменьшается во времени. Это связано с тем, что мантия остывает быстрее, чем ядро, и T_s не зависит от времени. Скачок температуры в верхнем пограничном слое в три раза больше скачка в нижнем слое (и это при том, что площадь нижнего слоя в 4 раза меньше верхнего!). Различие скачков связано с меньшим значением вязкости на нижней границе мантии по отношению к верхней границе. Современные значения вязкости, полученные в модели, $\nu = 1.6 \times 10^{18}$ м с⁻² выше известных оценок 3×10^{17} м с⁻² (Трубицын, 2016). Это является неизбежной платой при введении средней температуры T_m по всей толщине мантии. За время эволюции вязкость изменилась более чем на 2 порядка. На порядок уменьшилась конвективная теплоотдача, см. график для числа Нуссельта (рис. 2в). Для древних эпох это число было больше 100, т.е. $Ra \sim 2 \times 10^9$, что еще достаточно сложно для трехмерных вычислений.

В заключение остановимся на поведении тепловых потоков (рис. 2г). За 4.5 млрд лет мощность радиоактивных источников сократилась в 4.5 раза, а тепловой поток Q_s — в 6.8 раза. Скорость убывания Q_s в течение первого миллиарда лет была намного выше скорости убывания H . Это было вызвано быстрым увеличением вязкости при уменьшении температуры мантии (рис. 2б, в). Далее уменьшение Q_s стало заметно слабее, чем у H .

Тепловой поток на границе ядро–мантия Q_b достиг своего максимума в течение первых 100 млн лет и к настоящему времени медленно убывает со скоростью порядка 3–5% за 1 млрд лет. Для момента времени $t = 4.5$ млрд лет $Q_b = 6.5$ ТВт, укладываемаясь в диапазон значений из работ (Накагава, Тэкли, 2012; Накагава, 2018) 6–15 ТВт. Как уже отмечалось выше, полученные значения потока на поверхности планеты Q_s несколько выше наблюдаемых. При уменьшении Q_s твердое ядро становится меньше. Для уменьшения Q_s мы несколько уменьшили вклад радиоактивного разогрева в мантии H (Стивенсон и др., 1983; Шуберт и др., 2001), характеризуемого безразмерными числами $Ur_1 = H/Q_s = 0.21$ или $Ur_2 = H/(Q_s - Q_b) = 0.25$.

Постоянство теплового потока Q_b на всем временном интервале может оказаться крайне важным, поскольку палеомагнитологи не видят существенных изменений напряженности геомагнитного поля, начиная с 3.5 млрд лет в прошлом. Этот интервал времени, скорее всего, включает и момент появления твердого ядра. Отсутствие резкого изменения в поведении Q_b в момент появления твердого ядра в рассмотренной выше модели можно расценивать как согласие с палеомагнитными наблюдениями. Оптимизм внушает и тот факт, что генерация магнитного поля до и после появления твердого ядра при заданном монотонном уменьшении Q_b во времени позволяет найти режимы генерации, когда появление твердого ядра не приводит к существенному изменению энергии, доступной для генерации магнитного поля (Решетняк, 2021).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Совместное моделирование остывания ядра и мантии — крайне интересная физическая задача. Различие физико-химических свойств ядра и мантии приводит к неожиданным явлениям. Если для моделирования остывания ядра достаточно знать начальные условия и зависимость теплового потока на границе ядро–мантия от времени, чтобы выяснить распределение температуры в произвольный момент времени, то для совместного решения уравнений остывания мантии и ядра ситуация становится намного сложнее. Как мы видели, характерное время памяти в модели мантии порядка

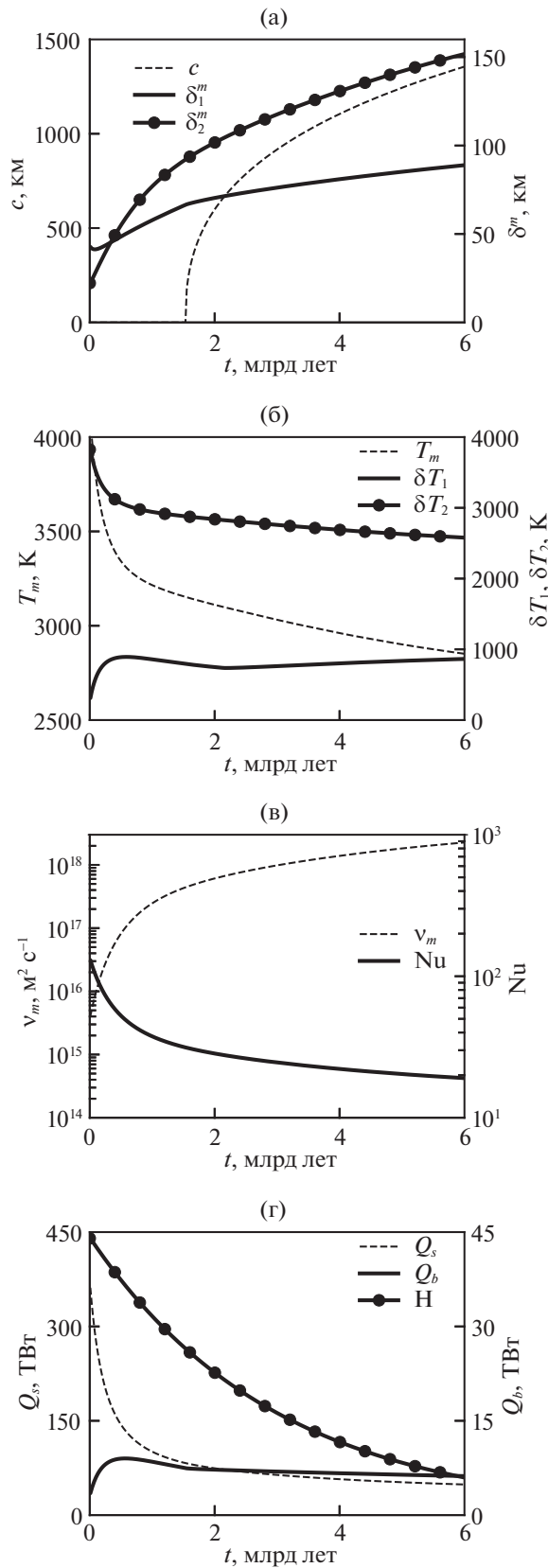


Рис. 2. Зависимость от времени (а) радиуса твердого ядра c и толщин тепловых пограничных слоев δ_1^m , δ_2^m ; (б) температуры мантии T_m и скачков температуры в пограничных слоях δT_1 , δT_2 ; (в) кинематической вязкости мантии ν_m и числа Нуссельта Nu ; (г) теплового потока на поверхности Земли Q_s , потока на границе ядро—мантия Q_b и выделения тепла радиоактивными источниками H .

миллиарда лет. На больших временах информация о начальных условиях теряется. Происходит это в первую очередь за счет экспоненциальной зависимости вязкости вещества мантии от температуры. Нахождение распределений температуры, тепловых потоков в далеком прошлом, т.е. решение обратной задачи, становится некорректным: небольшие изменения в значениях параметров и современных наблюдениях приводят к большим флуктуациям в начальных условиях, распределениях полей в далеком прошлом. Выходом является использование как можно большего числа ограничений в моделях. Так, в моделях геодинамо для нахождения близкого к земному режима генерации магнитного поля использовалось порядка десяти критериев отбора (Кристенсен и др., 2010). Нечто подобное потребуется и в модели остывания Земли. Использование методов Монте-Карло для оптимизации решения крайне полезно. С одной стороны, иногда можно очень быстро получить выразительный результат. С другой стороны, последовательное увеличение количества ограничений позволяет выявить значимые эффекты, что делает метод сравнимым по эффективности с аналитикой. Выше мы увидели, насколько незначимый, с точки зрения мантии, поток тепла на границе ядро–мантия может быть важным для выбора параметров вещества в мантии, если учесть термодинамику жидкого ядра, появление твердого ядра, генерацию магнитного поля. Используемые подходы могут быть полезны для описания процессов эволюции планет как Солнечной системы (Броуер и др., 2010), так и экзопланет (Ли, 2018). Отметим, что использование различных астрономических объектов крайне полезно и для развития самих моделей.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФ No. 19-47-04110.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абе (Y. Abe), *Lithos*. **30**, 223 (1993).
2. Броуер и др. (D. Breuer, S. Labrosse, and T. Spohn), *Space Sci. Rev.* **152**, 449 (2010).
3. Букер, Стенгел (J.R. Booker and K.C. Stengel), *J. Fluid Mech.* **86**, 289 (1978).
4. Вангелов, Джарвис (V.I. Vangelov and G.T. Jarvis), *J. Geophys. Res.* **99**, 9345 (1994).
5. Джарвис (G.T. Jarvis), *J. Geophys. Res.* **98**, 4477 (1993).
6. Дзевонский, Андерсон (A.M. Dziewonski and D.L. Anderson), *Phys. Earth Planet. Inter.* **25**, 297 (1981).
7. Дрейк (M.J. Drake), *Geochim. Cosmochim. Acta.* **64**, 2363 (2000).
8. Кристенсен и др. (U.R. Christensen, J. Aubert, and G. Hulot), *Earth Planet. Sci. Lett.* **296**, 487 (2010).
9. Лаброзе (S. Labrosse), *Phys. Earth Planet. Inter.* **140**, 127 (2003).
10. Лаброзе и др. (S. Labrosse, J.-P. Poirier, and J.-L. Le Mouél), *Phys. Earth Planet. Inter.* **99**, 1 (1997).
11. Ли (C.-H. Lee), *Galaxies*. **6**, 51 (2018).
12. Лопер (D.E. Loper), *Advanc. Geophys.* **26**, 1 (1984).
13. Мак-Элхини, Сенаяке (M. McElhinny and W. Senanayake), *J. Geophys. Res.* **85**, 3523 (1980).
14. Накагава, Тэкли (T. Nakagawa and P.J. Tackley), *Earth Planet. Sci. Lett.* **329**, 1 (2012).
15. Накагава (T. Nakagawa), *Phys. Earth. Planet. Int.* **276**, 172 (2018).
16. Пурье, Тарантола (J.-P. Poirier and A. Tarantola), *Phys. Earth Planet. Inter.* **109**, 1 (1998).
17. Решетняк (M.Yu. Reshetnyak), *Magnetohydrodynam.* **55**, 175 (2019).
18. Решетняк (M.Yu. Reshetnyak), *Russ. J. Earth Sci.* **20**, ES5007 (2020).
19. Решетняк М.Ю., Докл. РАН. Науки о Земле. **496**, 176 (2021).
20. Решетняк М.Ю., Павлов В.Э., Геомagnetизм и Аэрономия. **56**, 117 (2016).
21. Рихтер (F.M. Richter), *J. Fluid Mech.* **89**, 553 (1978).
22. Соломатов (V.S. Solomatov), *Treatise on geophysics* (Ed. G. Schubert) **9**, 91 (2007).
23. Сотин, Лаброзе (C. Sotin and S. Labrosse), *Phys. Earth Planet. Inter.* **112**, 171 (1999).
24. Стейси, Лопер (F.D. Stacey and D.E. Loper), *Phys. Earth Planet. Inter.* **33**, 45 (1983).
25. Стивенсон и др. (D.J. Stevenson, T. Spohn, and G. Schubert), *Icarus* **54**, 466 (1983).
26. Тардуно и др. (J.A. Tarduno, R.D. Cottrell, M.K. Watkeys, A. Hofmann, P.V. Doubrovine, E.E. Mamajek, D. Liu, D.G. Sibeck, L.P. Neukirch, and Y. Usui), *Science* **327**, 1238 (2010).
27. Трубицын В.П., Физика земли **5**, 3 (2016).
28. Трубицын А.П., Трубицын В.П., Докл. РАН. Науки о Земле **495**, 41 (2020).
29. Шуберт и др. (G. Schubert, D.L. Turcotte, and P. Olson), *Mantle convection in the Earth and planets* (Cambridge: Cambridge Univer. Press, 2001).