ПИСЬМА В АСТРОНОМИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2021, том 47, № 8, с. 606–610

К ВОПРОСУ О ХОЛЛОВСКОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ В ПРОТОЗВЕЗДНЫХ ДИСКАХ

© 2021 г. В. Ю. Захаров[1]*, Т. Г. Чернова[1]

[1]*Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 05.04.2021 г.
После доработки 07.07.2021 г.; принята к публикации 05.08.2021 г.

В рамках холловской магнитной гидродинамики рассмотрены малые возмущения протозвездного диска, имеющего вертикальную и азимутальную компоненты магнитного поля. Аналитически исследовано дисперсионное уравнение. Получены достаточное условие устойчивости однородного состояния и диапазоны для скоростей линейных волн трех типов. Показано, что неустойчивыми могут быть только волны с большими фазовыми скоростями. Исследовано влияние на неустойчивость параметров невозмущенного состояния и угла распространения линейной волны.

Ключевые слова: магнитная гидродинамика, магнитное поле, дисперсионное уравнение, холловская неустойчивость.

DOI: 10.31857/S0320010821080040

ВВЕДЕНИЕ

Проблема магнитогидродинамических (МГД) неустойчивостей дифференциально вращающегося газа в различных постановках рассматривалась в ряде работ (см., например, Бальбус и др., 1991, 2001; Уордл, 1999; Пандей и др., 2008; Песса и др., 2005). В (Бальбус и др., 1991) изучалась магниторотационная неустойчивость, необходимым условием которой являлось уменьшение частоты вращения диска с увеличением радиальной координаты. В работах (Уордл, 1999; Бальбус и др., 2001; Пандей и др., 2008) рассматривались неустойчивости альфвеновских возмущений, причем в случае слабоионизованной плазмы протозвездных дисков была выяснена важная роль эффектов холловского тока, связанного с различием в движении ионов и электронов вследствие отличия в частотах их столкновений с частицами нейтрального газа. В (Песса и др., 2005) было показано, что наличие в диске достаточно сильного азимутального магнитного поля может приводить к развитию двух новых неустойчивостей магнитозвуковой волны. В работах (Бонанно и др., 2006, 2007, 2008а,б) изучалась неустойчивость сжимаемых МГД-волн, проявляющаяся в дисках, имеющих одновременно азимутальную и радиальную компоненты магнитного поля. В (Штемлер и др., 2007; Ливертс и др., 2007) была предсказана возможность существования еще одного вида неустойчивости магнитозвуковых волн, названной авторами холловской. Неустойчивость возникает в протозвездных и протопланетных дисках, имеющих неоднородности радиального распределения магнитного поля и плотности. В (Ливертс и др., 2007) было показано, что если магнитное поле перпендикулярно плоскости диска, то неаксисимметричные возмущения, распространяющиеся вдоль азимута, оказываются неустойчивыми. Механизм неустойчивости связан с появлением в среде холловской волны, вызывающей конвективный перенос магнитного поля. В работе Прудских (2012) в рамках холловской магнитогидродинамики рассматривались возмущения протозвездного диска при отсутствии неоднородностей в распределении плотности вещества. Предполагалось, что магнитное поле содержит азимутальную и вертикальную компоненты, а волновой вектор флуктуаций содержит только азимутальную компоненту. Электронная проводимость вдоль силовых линий предполагается высокой, а движение нейтрального газа и ионов совместным. Такое приближение справедливо во внешних хорошо проводящих областях дисков с плотностью нейтральных частиц $n_n \sim 10^{12}$–10^{14} см$^{-3}$ (Прудских, 2012). Было получено дисперсионное уравнение, и на основе его численного анализа показана возможность неустойчивости линейных волн, изучена зависимость инкремента неустойчивости от параметров невозмущенного состояния.

В настоящей работе аналитически изучено дисперсионное уравнение из работы Прудских (2012),

*Электронный адрес: vladiyuz@mail.ru

получено достаточное условие устойчивости однородного состояния, изучено влияние параметра холла и других параметров на устойчивость.

ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ДИСПЕРСИОННОЕ УРАВНЕНИЕ

В работе Прудских (2012) рассматривалась задача об устойчивости протозвездного диска, частота вращения которого $\Omega = \Omega\,(\mathrm{r})$ зависит только от расстояния до оси вращения и в состоянии равновесия азимутальная невозмущенная скорость среды равна $\mathbf{V}_\theta = \mathbf{e}_\theta \Omega \mathrm{r}$. Система МГД-уравнений имеет вид (Прудских, 2012)

$$\rho \frac{\mathbf{dV}}{\mathbf{dt}} = \frac{1}{\mathrm{c}}\,[\mathbf{J} \times \mathbf{B}] - \nabla P + \rho \mathbf{g}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathrm{rot}\,[\mathbf{V} \times \mathbf{B}] - \mathrm{rot}\frac{\mathbf{J} \times \mathbf{B}}{e n_e}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\,(\rho \mathbf{V}) = \mathbf{0}, \tag{3}$$

$$\mathrm{J} = \frac{\mathrm{c}}{4\pi}\mathrm{rot}\,\mathbf{B}, \tag{4}$$

где ρ, $\mathbf{V}$ и P — плотность, скорость и давление плазмы, $\mathbf{g} = (-\mathrm{g}, 0, 0)$ — вектор напряженности гравитационного поля. Второе слагаемое справа в уравнении (2) описывает холловский ток. Предполагается, что невозмущенное магнитное поле $\mathbf{B}_0 = (0, B_{\theta 0}, B_{z0})$ содержит азимутальную и аксиальную компоненты, а распределение плотности и магнитное поле $\mathbf{B}_0$ в диске считаются постоянными и не зависящими от радиальной координаты.

В работе Прудских (2012) в рамках системы (1)–(4) рассматривались малые возмущения однородного состояния. Предполагалось, что возмущение любой из переменных системы в цилиндрической системе координат имеет вид

$$A\,(\theta, t) = A_0 \exp i(m\theta - \omega t). \tag{5}$$

Получено дисперсионное уравнение для безразмерной частоты W линейных волн, которое для удобства можно записать в виде

$$W^6 - A_4 W^4 + A_2 W^2 - A_0 = 0, \tag{6}$$

$$A_4 = 1 + \left(1 + \beta + \sin^2\theta\right) K^2 + {}$$
$$+ K^4 H^2 \sin^2\theta \cos^2\theta,$$

$$A_2 = \Bigg\{1 + (1 + 2\beta)\,K^2 + {}$$

$$+ \left[\frac{5}{2} + \left(1 + \beta K^2\right) H\right] H K^2 \cos^2\theta \Bigg\} K^2 \sin^2\theta,$$

$$A_0 = \beta K^6 \sin^4\theta,$$

где $W = \dfrac{\omega - m\Omega}{\Omega}$ — безразмерная частота, $K = \dfrac{kV_A}{\Omega}$ — безразмерный волновой вектор, $k = \dfrac{m}{r}$ — азимутальный волновой вектор, $V_A = B_0/\sqrt{4\pi\rho_0}$ — альфвеновская скорость, $\beta = \dfrac{c_S^2}{V_A^2}$, c_S — скорость звука, θ — угол между нормалью к диску и направлением невозмущенного магнитного поля ($B_{\theta 0} = B_0 \sin\theta$ и $B_{z0} = B_0 \cos\theta$), $\omega_{ciz} = \dfrac{eB_{Z0}}{m_i c}$ — ионная циклотронная частота в поле B_{z0}, $\omega_{cz} = \omega_{ciz}\left(\dfrac{\rho_i}{\rho}\right)$, параметр $H = \dfrac{\Omega}{\omega_{cz}}$ учитывает эффект холловского тока, ρ_i — массовая ионная плотность.

АНАЛИЗ ДИСПЕРСИОННОГО УРАВНЕНИЯ

Уравнение (6) является бикубическим многопараметрическим уравнением. Наличие у уравнения (6) трех положительных корней будет гарантировать наличие трех симметричных отрицательных корней и устойчивость однородного состояния. Изменение параметров K, β, H, θ влияет на величину и количество действительных корней уравнения (6).

Перепишем уравнение (6) в виде

$$f\,(W) = g\,(W)\,, \tag{7}$$

где

$$f\,(W) = \left(W^2 - K^2 \sin^2\theta\right) \times$$
$$\times \left[W^4 - W^2\left(1 + (1 + \beta)\,K^2\right) + \beta K^4 \sin^2\theta\right],$$
$$g\,(W) = H K^4 \sin^2\theta \cos^2\theta W^2 \times$$
$$\times \left[H W^2 - \frac{5}{2} - \left(1 + \beta K^2\right) H\right].$$

Представление дисперсионного уравнения в виде (7) уже использовалось авторами для удобства его аналитического исследования, исходя из геометрических свойств функций $f\,(W)$ и $g\,(W)$ (Захаров и др., 2015). По количеству общих точек этих функций можно судить о количестве действительных корней дисперсионного уравнения (6). В частных случаях: $\sin\theta = 0$, $\cos\theta = 0$, $H = 0$, уравнение (7) всегда имеет шесть действительных корней с учетом их кратности.

Выясним взаимное расположение графиков четных функций $f\,(W)$ и $g\,(W)$ в общем случае: $\sin\theta \neq 0$, $\cos\theta \neq 0$, $H \neq 0$, при положительных значениях W. Видно, что функция $f\,(W)$ всегда имеет три положительных корня $W_1 < W_2 < W_3$ $(W_2^2 = K^2 \sin^2\theta)$.

Корни W_1 и W_3 определяются биквадратным множителем в квадратных скобках функции $f(W)$ и могут быть выписаны в явном виде. С учетом неравенства $f(0) < 0$ можно схематично изобразить график $f(W)$ для положительных значений W (рис. 1). Помимо корней у функции $f(W)$ есть еще характерная точка W_* $\left(W_*^2 = 1 + \beta K^2\right)$, которая всегда расположена между W_1 и W_3. Поэтому имеет место тройное неравенство

$$W_1^2 < \min\left\{W_2^2, W_*^2\right\} < \max\left\{W_2^2, W_*^2\right\} < W_3^2.$$

Взаимное расположение значений W_* и W_2 определяется знаком выражения

$$W_*^2 - W_2^2 = 1 + K^2\left(\beta - \sin^2\theta\right).$$

Случай $W_*^2 \leqslant W_2^2$ реализуется при

$$1 + \beta K^2 \leqslant K^2 \sin^2\theta, \tag{8}$$

что может выполняться при $\beta < 1$ и достаточно больших значениях K^2 и углах θ таких, что $\sin^2\theta > \beta$.

Случай $W_*^2 > W_2^2$ реализуется при

$$1 + \beta K^2 > K^2 \sin^2\theta, \tag{9}$$

что всегда выполняется при $\beta \geqslant 1$ и любых значениях K и углов.

Функция $g(W)$ всегда имеет нулевой корень второй кратности и положительный корень W_{**}:

$$W_{**}^2 = 1 + \beta K^2 + \frac{5}{2H} > W_*^2.$$

На рис. 1а,б изображены графики функций $f(W)$ и $g(W)$ для случая $W_*^2 \leqslant W_2^2$ (рис. 1а) и $W_*^2 > W_2^2$ (рис. 1б).

На рис. 1а,б изображены случаи устойчивости, когда $g(W_3) \geqslant 0$ или

$$W_{**}^2 \leqslant W_3^2. \tag{10}$$

В этом случае графики $f(W)$ и $g(W)$ всегда имеют три общих точки на положительной полуоси W (степень функции $g(W)$ меньше степени $f(W)$, поэтому общая точка с большим значением W всегда будет существовать). При этом из рисунка нетрудно увидеть диапазоны для значений корней дисперсионного уравнения (7). Если обозначить положительные корни (7) $\tilde{W}_1 < \tilde{W}_2 < \tilde{W}_3$ в порядке возрастания, то для меньшего корня $\tilde{W}_1$ $\tilde{W}_1^2 < W_1^2$, причем с увеличением параметра Холла значение $\tilde{W}_1$ растет. Для второго по величине корня $\tilde{W}_2$ уравнения (7) $\min\left\{W_2^2, W_*^2\right\} < \tilde{W}_2^2 < W_{**}^2$.

Для наибольшего по величине корня $\tilde{W}_3$ уравнения (7) всегда имеет место неравенство $\tilde{W}_3^2 > W_3^2$. При стремлении параметра Холла к нулю значения корней $\tilde{W}_1$, $\tilde{W}_2$, $\tilde{W}_3$ дисперсионного уравнения (7) стремятся к W_1, W_2, W_3 соответственно.

При нарушении неравенства (10):

$$W_{**}^2 > W_3^2\,(g(W_3) < 0) \tag{11}$$

возможны как случай устойчивости, так и неустойчивости. На рис. 1в изображен случай устойчивости. Он реализуется при небольших значениях параметра Холла, которые гарантируют прижимание графика функции $g(W)$ к оси W и наличие двух общих точек графиков $f(W)$ и $g(W)$ на интервале (W_2, W_3). Увеличение значения H может привести к тому, что графики $f(W)$ и $g(W)$ не будут иметь общих точек на интервале (W_2, W_3) (рис. 1г). Однако с дальнейшим ростом H корень

$$W_{**} = \sqrt{1 + \beta K^2 + \frac{5}{2H}} \to W_* = \sqrt{1 + \beta K^2}$$

и случай (11) превратится в случай устойчивости (10).

Таким образом, неравенство (10) является достаточным условием устойчивости. Условие (10) нетрудно переписать в виде

$$\left(\frac{5}{2H}\right)^2 + \frac{5}{2H}\left(1 + \beta K^2 - K^2\right) - \\ - K^2\left(1 + \beta K^2 \cos^2\theta\right) \leqslant 0 \tag{12.1}$$

или

$$\left(\frac{5}{2H} - K^2\right)\left(\frac{5}{2H} + 1 + \beta K^2\right) + \\ + \beta K^4 \sin^2\theta \leqslant 0. \tag{12.2}$$

Из (12.1) следует, что при достаточно больших значениях параметра Холла два первых слагаемых будут стремиться к нулю, и левая часть станет отрицательной. Также неравенство (12.2) будет выполняться, начиная с некоторого достаточного большого значения K.

В работе Прудских (2012) численный анализ дисперсионного уравнения проводился для характерных значений протозвездных дисков $H \sim 1 - 10$, $\beta \sim 0.5 - 2$, характерное значение частоты вращения на расстоянии 1 а.е. от центра вращения составляет $\Omega \sim 10^{-7}$ Гц, а величина магнитного поля $B_0 \sim 0.1$ Гс. Также была проведена оценка инкремента неустойчивости $\operatorname{Im} W$ и показано, что его максимальное значение не превосходит 0.06.

Из неравенств (12) можно получать оценки одного из входящих в них параметров через заданные

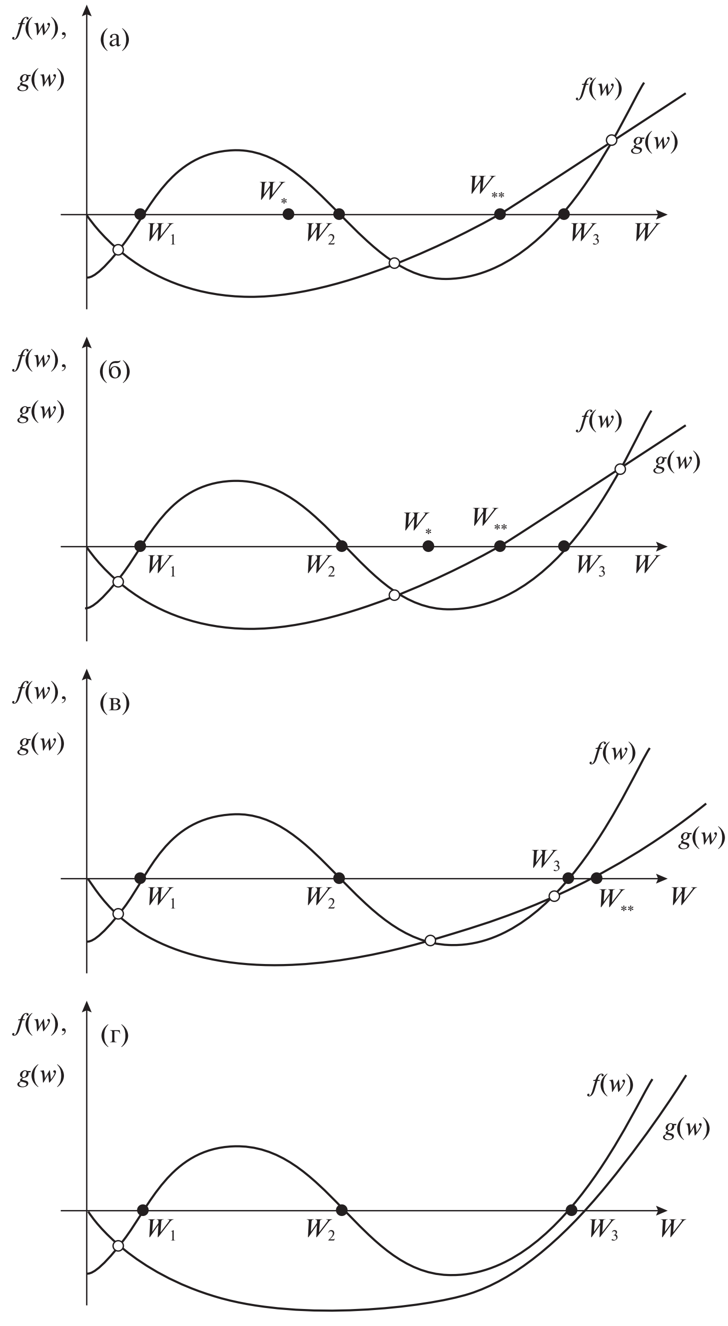

Рис. 1. Взаимное расположение функций $f\,(W)$ и $g\,(W)$. Графики (а), (б), (в) соответствуют случаям устойчивости, график (г) — случаю неустойчивости.

другие. Например, для характерных значений $H = 5$, $\beta = 1$, $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ получим, что неустойчивость возможна только при $K < 0.76$. Поскольку $K = \dfrac{kV_A}{\Omega}$ и $k = \dfrac{m}{r}$, то при характерных значениях на расстоянии $r = 1$ а.е. $V_A \approx 10^4$ см/с, $\Omega \sim 10^{-7}$ Гц можно получить оценку азимутального числа неустойчивого возмущения $m \leqslant 110$, совпадающую с оценкой $m \approx 30{-}100$ (Прудских, 2012).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Анализ рис. 1а−г и неравенств (12.1), (12.2) позволяет сделать следующие выводы относительно возможности неустойчивости однородного состояния плазмы:

1) неустойчивость может появляться только при нарушении неравенства (12.1), которое является достаточным условием устойчивости;

2) на рис. 1 видны интервалы, в которых изменяются фазовые скорости линейных волн. Волна

с меньшей скоростью всегда устойчива. Неустойчивыми могут быть только две волны с большими фазовыми скоростями;

3) при нарушении неравенств (12.1), (12.2) среди значений параметра Холла может существовать ограниченный слева и справа промежуток, в котором возможна неустойчивость в зависимости от значений других параметров K, β, θ;

4) из вида функции $g(W)$ следует, что если при $\theta = 45^\circ$ будет устойчивость (коэффициент $\cos^2\theta \sin^2\theta$ максимален и равен 0.5), то и при остальных значениях угла θ также будет устойчивость. Таким образом, неустойчивость наиболее эффективно развивается при $\theta \approx 45^\circ$;

5) так как параметр β в уравнение (8) входит в виде произведения βK^2, то уменьшение плазменного β приводит к увеличению интервала неустойчивости длин волн.

Выводы 3)–5) согласуются с выводами Прудских (2012), сделанными на основе численного анализа дисперсионного уравнения и построения диаграмм областей неустойчивости при некоторых фиксированных значениях параметров.

Согласно работе Прудских (2012), обнаруженная холловская неустойчивость отличается от рассмотренных в (Штемлер и др., 2007; Ливертс и др., 2007) и может проявляться в астрофизических дисках, не содержащих градиенты плотности и магнитного поля нулевого порядка. В протопланетных дисках рассмотренная неустойчивость может приводить к дроблению кольцевого элемента на отдельные фрагменты и образованию планетезималей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бальбус и др. (S.A. Balbus and J.F. Hawley), Astrophys. J. **376**, 214 (1991).
2. Бальбус и др. (S.A. Balbus and C. Terquem), Astrophys. J. **552**, 235 (2001).
3. Бонанно и др. (A. Bonano and V. Urpin), Phys. Rev. E **73**, 066301 (2006).
4. Бонанно и др. (A. Bonano and V. Urpin), Astrophys. J. **662**, 851 (2007).
5. Бонанно и др. (A. Bonano and V. Urpin), Astron. Astrophys. **480**, 27 (2008a).
6. Бонанно и др. (A. Bonano and V. Urpin), Astron. Astrophys. **488**, 1 (2008б).
7. Захаров В.Ю., Чернова Т.Г., Степанов С.Е., Физика плазмы **41**, 386 (2015).
8. Ливертс и др. (E. Liverts, M. Mond and A.D. Chernin), Astrophys. J. **666**, 1226 (2007).
9. Пандей и др. (B.P. Pandey and M. Wardle), MNRAS **385**, 2269 (2008).
10. Песса и др. (M.E. Pessah and D. Psaltis), Astrophys. J. **628**, 879 (2005).
11. Прудских В.В., Астрон. журн. **89**, 545 (2012).
12. Уордл (M. Wardle), MNRAS **307**, 849 (1999).
13. Штемлер и др. (Yu.M. Shtemler, E. Liverts, and M. Mond), Astrophys. J. **665**, 1371 (2007).