

СТРУКТУРА РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЗВЕЗД, СОСТОЯЩИХ ИЗ НЕСЖИМАЕМОГО ВЕЩЕСТВА, В ОТСУТСТВИЕ СТРОГОЙ ЭЛЕКТРОНЕЙТРАЛЬНОСТИ

© 2021 г. Н. И. Крамарев^{1,2*}, А. В. Юдин²

¹Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

²НИИ “Курчатовский Институт” — ИТЭФ, Москва, Россия

Поступила в редакцию 13.07.2021 г.

После доработки 05.08.2021 г.; принята к публикации 05.08.2021 г.

В рамках ОТО рассмотрена структура звезды, состоящей из локально неэлектронейтрального несжимаемого трехкомпонентного вещества. Для термодинамических величин типа давления решение представимо в виде ряда по малому параметру $1/\Lambda_G \sim 10^{-36}$, где первое приближение — хорошо известное электронейтральное решение. Но уравнения равновесия для химических потенциалов компонент вещества, как оказывается, даже в нулевом порядке содержат конечные вклады, возникающие из-за учета эффектов неэлектронейтральности. Для всех рассматриваемых параметров задачи получены аналитические решения, которые иллюстрируются численными примерами.

Ключевые слова: нейтронные звезды, общая относительность, структура звезд, электронейтральность вещества

DOI: 10.31857/S0320010821090060

ВВЕДЕНИЕ

При расчете параметров звездной плазмы обычно применяется приближение локальной электронейтральности (ЛЭН), т.е. предполагается, что концентрации положительных и отрицательных зарядов строго равны в каждой точке. Объясняется это чрезвычайной слабостью гравитации по сравнению другими силами: так, отношение силы электростатического отталкивания двух протонов к силе их гравитационного притяжения характеризуется параметром

$$\Lambda_G = \frac{e^2}{Gm_p^2} \approx 1.25 \times 10^{36}. \quad (1)$$

Между тем, как впервые показал Росселанд (1924), внутри обычных звезд плазма поляризуется в их гравитационном поле. Возникает постоянный локальный дисбаланс заряда, характеризуемый малым параметром $1/\Lambda_G$:

$$\frac{|\Delta n|}{n} \sim 10^{-36}, \quad (2)$$

где n — локальная концентрация вещества, Δn — разность концентраций положительных и отрицательных зарядов. Вследствие этого возникает крупномасштабное поле поляризации, и, фактически, каждый ион (или положительно заряженное ядро) находится в равновесии двух сил: поля тяготения и электростатического поля поляризации. Применительно к белым карликам проблема поляризации рассматривалась, например, в книге Шацмана (1958). В силу своей слабости это поле практически никак не влияет на структуру звезды и учитывается разве что при расчете процессов диффузии (см., например, Безногов, Яковлев, 2013; Горшков, Батурин, 2008) в звездах. Таким образом, ЛЭН вещества — отличное приближение для расчета структуры и свойств звезд.

Структура звезд в отсутствие ЛЭН рассматривалась в целом ряде работ (см., например, Балли, Харрисон, 1978; Неслушан, 2001; Иосилевский, 2009). Криворученко и др. (2018) исследовали рассматриваемую тему в ньютоновском приближении, используя двухкомпонентные политропные модели звезд. Оказалось, что полное решение, определяющее структуру звезды, состоит из двух частей: регулярной части, которая представима в виде ряда по малому параметру $1/\Lambda_G$ с ЛЭН-решением в качестве нулевого приближения, и нерегулярной

*Электронный адрес: kramarev-nikita@mail.ru

части, которая экспоненциально мала везде, за исключением конечного числа зон, обычно расположенных на границе области интегрирования (так называемый пограничный слой). Это связано с тем, что уравнения равновесия звезды в отсутствие ЛЭН относятся к так называемым сингулярно возмущенным задачам (см., например, О’Мэлли, 1991), т.е. случаю, когда малый параметр стоит при старшей производной дифференциального уравнения. Но даже в полученном полном решении отклонения от ЛЭН малы, ЛЭН сильно нарушается только в тонком поверхностном слое (так называемой “электросфере”), поле поляризации везде мало, а полный заряд звезды может меняться лишь в узких пределах $-0.1 \lesssim Q \lesssim 150 K$.

Однако все вышесказанное касается обычных, невырожденных звезд или белых карликов. В относительно недавних работах Ротондо и др. (2011), Бельведере и др. (2012), Бельведере и др. (2015) рассматривались эффекты отклонения от ЛЭН в нейтронных звездах (НЗ). Авторы утверждают, что ими получено решение, в котором концентрация протонов на границе ядра НЗ значительно превосходит концентрацию электронов и достигает там максимума. Это приводит к росту электрического поля поляризации, достигающего значения нескольких тысяч швингеровских критических полей! Над этим ядром находится электросфера электронов, компенсирующая большой положительный заряд ядра, а на ней покоится кора, представляющая собой решетку из нейтронно-избыточных ядер в Ферми–море электронов (авторы использовали здесь уравнение состояния Бейма и др., 1971). Отсутствие протяженной области перехода ядро–кора, от однородного ядерного вещества к нейтронно-избыточным ядрам (см. рис. 17 из работы Бельведере и др., 2012), приводит к отличиям, в частности, таких наблюдаемых макроскопических параметров, как массы и радиусы НЗ, от значений, предсказываемых классическим ЛЭН решением (относительно последнего см., например, Хензель и др., 2007; Пирсон и др., 2018). В связи с такими расхождениями была осознана необходимость дальнейшего исследования вопроса эффектов отклонения от ЛЭН в вырожденных звездах.

Данная работа является первым шагом в этом направлении. Используя предыдущий опыт (Криворученко и др., 2018), а также фундаментальные работы Олсона и Бэйлина (1975, 1978), получивших уравнения равновесия вещества в рамках Общей Теории Относительности (ОТО) в отсутствие ЛЭН, нам удалось обобщить прошлые выкладки на случай многокомпонентной жидкости в ОТО. При этом мы ограничились пока рассмотрением несжимаемого ядерного вещества (политропа $n = 0$). Упомянутые выше проблемы, связанные с

корой НЗ, нами здесь также не рассматривались. Несмотря на известную искусственность, эта простая модель (toy model) позволяет не только “почувствовать физику” задачи в рамках ОТО, но и получать важные результаты. Например, в рамках этого приближения в свое время было выведено ограничение на массу M и радиус R НЗ: $GM/Rc^2 < 4/9$, которое остается справедливым и в общем случае (Вайнберг, 2000). Важно также, что политропа $n = 0$ не имеет нерегулярной компоненты решения (см. Приложение в Криворученко и др., 2018), что значительно его упрощает. В данной работе нам даже удалось получить *аналитическое* решение для исследуемой модели в рамках ОТО.

Статья организована следующим образом: сначала мы записываем основные уравнения задачи в общем виде. Затем, используя приближение несжимаемого вещества, упрощаем уравнения и приводим их к безразмерному виду. Полученные решения затем иллюстрируются на нескольких примерах. Далее в работе приводятся краткое обсуждение электросфер в данном приближении и Заключение.

ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Запишем уравнения задачи в виде, приведенном в работе Олсона и Бэйлина (1978):

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \left[\rho + \frac{Q^2}{8\pi c^2 r^4} \right], \quad (3)$$

$$\frac{dQ}{dr} = 4\pi r^2 e^{\lambda/2} \sum q_i n_i, \quad (4)$$

$$\frac{d\mu_k}{dr} = e^{\lambda/2} \frac{q_k Q}{r^2} - e^{\lambda} \frac{G\mu_k}{r^2 c^2} \left[m - \frac{Q^2}{2c^2 r} + \frac{4\pi r^3}{c^2} \left(\sum n_i \mu_i - \rho c^2 \right) \right]. \quad (5)$$

Здесь уравнение (3) есть уравнение непрерывности, r — радиальная координата, m — массовая, ρ — плотность массы-энергии. Величиной Q обозначен полный заряд внутри сферы радиусом r , определяемый уравнением (4), где сумма в правой части идет по всем составляющим вещества с зарядами q_i , в нашем случае $i = p, e$. Метрическая функция λ определяется стандартным образом:

$$e^{\lambda} = -g_{11} = \left[1 - \frac{2Gm}{rc^2} \right]^{-1}, \quad (6)$$

где g_{11} — соответствующая компонента метрики Шварцшильда (см., например, Ландау, Лифшиц, 2012). Уравнение (5) является уравнением равновесия для химпотенциалов μ_k компонент вещества. Воспользуемся термодинамическими соотношениями (в предположении, что температура $T = 0$)

$$\Phi \equiv \sum \mu_i n_i = \rho c^2 + P, \quad (7)$$

$$dP = \sum n_i d\mu_i, \quad (8)$$

где P — давление вещества. Домножив каждое из уравнений (5) на n_k и просуммировав, получим уравнение равновесия вещества звезды (Олсон, Бэйлин, 1975):

$$\frac{dP}{dr} = \frac{Q}{r^2} \frac{\sum q_i n_i}{\sqrt{1 - \frac{2Gm}{rc^2}}} - \frac{G(\rho + \frac{P}{c^2})}{r(r - \frac{2Gm}{c^2})} \left(m + \frac{4\pi r^3}{c^2} P - \frac{Q^2}{2rc^2} \right), \quad (9)$$

которое в случае строгой электронейтральности ($Q = 0$) превращается в уравнение Толмана–Опенгеймера–Волкова (ТОВ).

ПОЛИТРОПА $n = 0$

В дальнейшем мы ограничимся абсолютно жестким уравнением состояния, при котором концентрации компонент вещества n_k постоянны. Оно соответствует политропе $n = 0$ в нерелятивистском случае. Поскольку внутренняя энергия ϵ вещества политропы связана с давлением соотношением $\epsilon = nP/\rho$, то полная плотность энергии–массы ρ равна просто $\rho = \sum n_i m_i$. Из формулы (7) тогда видно, что в рассматриваемом случае термодинамический потенциал Φ отличается от давления P на постоянную. Воспользуемся этим и перепишем уравнение равновесия (9) в виде

$$\frac{d\Phi}{dr} = \frac{1}{8\pi r^4} \left(\frac{dQ^2}{dr} \right) + e^\lambda \frac{G\Phi}{c^2} \left[\frac{d}{dr} \left(\frac{m}{r} \right) - \frac{4\pi r}{c^2} \Phi \right], \quad (10)$$

где мы также воспользовались уравнениями (3) и (4). Уравнение (10) можно записать в эквивалентной, более удобной форме:

$$\frac{d}{dr} \left(\Phi e^{-\lambda/2} \right) = \frac{e^{-\lambda/2}}{8\pi r^4} \left(\frac{dQ^2}{dr} \right) - \frac{4\pi Gr}{c^4} \Phi^2 e^{\lambda/2}. \quad (11)$$

Решение однородного уравнения (11) есть

$$\Phi e^{-\lambda/2} = \left[C + \int \frac{4\pi Gr}{c^4} e^{3\lambda/2} dr \right]^{-1}, \quad (12)$$

где C — некоторая константа. Решение полного уравнения (11) ищем методом вариации постоянных. Тогда для $C = C(r)$ получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{dC(r)}{dr} = -\frac{e^{-\lambda/2}}{8\pi r^4} \left(\frac{dQ^2}{dr} \right) \times \left[C(r) + \int \frac{4\pi Gr}{c^4} e^{3\lambda/2} dr \right]^2. \quad (13)$$

Вернемся теперь к уравнениям равновесия (5). Их можно переписать в виде

$$\frac{d\mu_k}{dr} = \frac{q_k Q}{r^2} e^{\lambda/2} + e^\lambda \frac{G\mu_k}{c^2} \left[\frac{d}{dr} \left(\frac{m}{r} \right) - \frac{4\pi r}{c^2} \Phi \right]. \quad (14)$$

Решение этих уравнений можно записать в виде

$$\mu_k(r) e^{-\lambda(r)/2} = e^{-\Pi(r)} \left[\mu_k(0) + \int_0^r \frac{q_k Q(r')}{r'^2} e^{\Pi(r')} dr' \right], \quad (15)$$

где мы ввели обозначение

$$\Pi(r) \equiv \int_0^r \frac{4\pi Gr'}{c^4} e^{\lambda(r')} \Phi(r') dr'. \quad (16)$$

Безразмерный вид уравнений

Прежде чем приступить к решению полученных уравнений, сделаем несколько упрощающих предположений. Во-первых, будем считать, что вещество находится в состоянии бета-равновесия, т.е. $\mu_n = \mu_p + \mu_e$. Как видно из уравнения (15), если это условие выполняется хотя бы в одной точке звезды, то оно выполняется везде (поскольку $q_n = 0$, а $q_p = -q_e$). Во-вторых, будем искать решение, в котором и полное, и парциальные давления компонент обращаются в нуль в одной точке. В этой точке химпотенциалы компонент равны $\mu_k = m_k c^2$. Здесь возникает некоторое противоречие с условием бета-равновесия, поскольку $m_n \neq m_p + m_e$. Чтобы добиться согласованности, будем считать, что $m_e = 0$, а $m_n = m_p = m_u$, где m_u — атомная единица массы. Подобное приближение вполне соответствует модельному характеру решаемой задачи, в частности условию абсолютной жесткости вещества и следующему из него постоянству концентраций компонент. В реальности условие бета-равновесия будет нарушаться во внешних областях звезды при падении плотности, и уж заведомо оно нарушается в электросфере звезды (см. ниже, а также в Криворученко и др., 2018).

С учетом сделанных предположений плотность вещества есть $\rho = \rho_b = m_u n_b$, где $n_b = n_n + n_p$ — концентрация барионов. Теперь можно ввести естественную для данной задачи единицу длины:

$$r_0 = \frac{c}{\sqrt{4\pi G \rho_b}} \approx \frac{32.7}{\sqrt{\rho_{14}}} \text{ км}, \quad (17)$$

где $\rho_{14} \equiv \rho(\text{г/см}^3) \times 10^{-14}$. Введем пространственную координату x согласно $r = r_0 x$. Тогда массовая координата m выражается через безразмерную переменную η как $m(r) = 4\pi r_0^3 \rho_b \eta(x)$. Введем также безразмерный заряд θ согласно $Q(r) = 4\pi r_0^3 e(n_p - n_e)\theta(x)$, где e — единица электрического заряда. Тогда уравнения равновесия звезды (3), (4) запишутся следующим образом:

$$\frac{d\eta}{dx} = x^2 + \Lambda_q \frac{\theta^2}{x^2}, \quad (18)$$

$$\frac{d\theta}{dx} = x^2 e^{\lambda/2}, \quad (19)$$

где, как и прежде, $e^{-\lambda} = 1 - 2\eta/x$, а параметр Λ_q равен

$$\Lambda_q = \frac{1}{2} \Lambda_G \left(\frac{n_p - n_e}{n_b} \right)^2. \quad (20)$$

Напомним, что величина $\Lambda_G \sim 10^{36}$, стоящая в этой формуле, представляет собой основной и при этом гигантский параметр задачи.

Введя для термодинамического потенциала Φ безразмерную переменную ϕ согласно $\Phi(r) = m_u c^2 n_b \phi(x)$, перепишем соотношение (12) в виде

$$\phi(x) e^{-\lambda/2} = \left[\mathbf{c}(x) + \int e^{3\lambda/2} x dx \right]^{-1}. \quad (21)$$

Уравнение (13) запишется в безразмерном виде следующим образом:

$$\frac{d\mathbf{c}}{dx} = -\Lambda_q \frac{e^{-\lambda/2}}{x^4} \left(\frac{d\theta^2}{dx} \right) \times \left[\mathbf{c}(x) + \int e^{3\lambda/2} x dx \right]^2. \quad (22)$$

Теперь осталось только записать уравнения равновесия для хипотенциалов (15) с помощью безразмерных переменных $\psi_k(x) \equiv \frac{\mu_k(r)}{m_u c^2}$:

$$\psi_k e^{-\lambda/2} = e^{-\Pi(x)} \left[\psi_k(0) + \Lambda_G \left(\frac{n_p - n_e}{n_b} \right) \int_0^x \frac{\tilde{q}_k \theta(x')}{x'^2} e^{\Pi(x')} dx' \right], \quad (23)$$

где $\tilde{q}_k = 0, \pm 1$ — нормированный безразмерный заряд нейтрона, протона или электрона, а $\Pi(x)$, определяемый формулой (16), есть

$$\Pi(x) \equiv \int_0^x e^{\lambda(x')} \phi(x') x' dx'. \quad (24)$$

Важно отметить, что перед интегральным членом в (23) стоит гигантский множитель $\Lambda_G \sim 10^{36}$, умноженный на относительное отклонение концентраций вещества от электронейтральных значений. Это означает, что получить решение с безразмерными хипотенциалами, имеющими порядок $O(1)$, можно, только если

$$\frac{n_p - n_e}{n_b} = \frac{\alpha_e}{\Lambda_G}, \quad (25)$$

где $\alpha_e = O(1)$ — численный параметр задачи. Тогда

$$\Lambda_q = \frac{\alpha_e^2}{2\Lambda_G} \sim 10^{-36} \quad (26)$$

оказывается малым параметром. В уравнения (18) и (22) члены с полем поляризации входят с этим экстремально малым множителем. Исключением являются уравнения равновесия (23), где гигантский множитель Λ_G компенсируется соответственно малым значением отклонения вещества от электронейтральности. Это полностью отвечает рассмотренному ранее (Криворученко и др., 2018; Хунд, Кисслинг, 2021а) случаю ньютоновской гравитации: при расчете структуры звезды поле поляризации можно не учитывать, но сила, с которой это поле действует на отдельную заряженную частицу вещества, сравнима с соответствующей гравитационной силой. Действительно, уравнение равновесия звезды (9), записанное в безразмерных переменных ($p \equiv P/\rho c^2$), имеет вид

$$\frac{dp}{dx} = 2\Lambda_q e^{\lambda/2} \frac{\theta}{x^2} - e^{\lambda} \frac{1+p}{x^2} \left(\eta + x^3 p - \Lambda_q \frac{\theta^2}{x} \right), \quad (27)$$

и все поправки к стандартному уравнению ТОВ (члены с Λ_q) оказываются пренебрежимо малы.

Решение уравнений

Учитывая экстремально малость параметра Λ_q , решение можно искать в виде ряда по нему. Обратимся сперва к уравнениям (18) и (19). Будем решать их методом последовательных приближений. Нулевое приближение для (18) дает $\eta = x^3/3$. Тогда $e^{-\lambda} = 1 - 2x^2/3$. Подставив это

в (19), получим выражение для заряда звезды в первом приближении:

$$\theta(x) = \frac{3}{4} \left[\sqrt{\frac{3}{2}} \arcsin \sqrt{\frac{2}{3}} x - x \sqrt{1 - \frac{2x^2}{3}} \right]. \quad (28)$$

Подставив полученное выражение (28) в уравнение (18) и проинтегрировав последнее, можно получить следующий член в разложении для $\eta(x)$ и так далее.

Обратимся теперь к функции $\phi(x) = \sum \psi_i(x) Y_i$, где мы использовали стандартное обозначение $Y_i \equiv n_i/n_b$. На границе звезды $\phi = 1$, а в центре (см. уравнение (21)) $\phi(0) \equiv \phi_0 = 1/c(0) > 1$. Учитывая, что, согласно (22), c — постоянная величина с точностью до $O(\Lambda_q)$, уравнение (21) с той же точностью может быть проинтегрировано как

$$\phi^{-1}(x) = \frac{3}{2} - \left[\frac{3}{2} - \frac{1}{\phi_0} \right] \sqrt{1 - \frac{2x^2}{3}}. \quad (29)$$

Оно соответствует известному решению (см., например, Синг, 1963) для давления внутри однородной несжимаемой жидкости в ОТО (напомним, что в безразмерных единицах $p = \phi - 1$):

$$p(x) = \frac{(1 + 3p_0) \sqrt{1 - \frac{2x^2}{3}} - (1 + p_0)}{3(1 + p_0) - (1 + 3p_0) \sqrt{1 - \frac{2x^2}{3}}}, \quad (30)$$

где $p_0 = p(0)$. Для вычисления поправки порядка $O(\Lambda_q)$ достаточно проинтегрировать уравнение (22), положив в правой части $c(x) = c(0)$ и используя выражение (28) для $\theta(x)$. В первом приближении также легко найти компоненту $e^\nu = g_{00}$ метрики. Для нашего случая $\rho = \text{const}$ она просто связана с давлением (Вайнберг, 2000):

$$e^{\nu(x)} = \left[\frac{1 + p_0}{1 + p(x)} \right]^2. \quad (31)$$

Распределения величин λ и θ , а также ν для $p_0 = 5$ внутри звезды проиллюстрированы на рис. 1, демонстрирующем, в частности, важность эффектов ОТО в рассматриваемой задаче.

Координата границы звезды x_b находится из условия $\phi(x_b) = 1$, что, согласно (29), с точностью до $O(\Lambda_q)$ дает

$$x_b = \frac{\sqrt{6(\phi_0 - 1)(2\phi_0 - 1)}}{3\phi_0 - 2}. \quad (32)$$

Очевидно, что $0 \leq x_b \leq 2/\sqrt{3}$. Зависимости величин x_b и $\theta(x_b)$ приведены на рис. 2 как функции от ϕ_0 . Максимальные значения $\theta(x_b) \approx 0.84$ и $x_b \approx 1.15$ достигаются при $\phi_0 \rightarrow \infty$.

Перейдем теперь к уравнениям равновесия компонент вещества. Уравнение (24) для $\Pi(x)$ может быть явно проинтегрировано:

$$\Pi(x) = \ln \left[\frac{3\phi_0 - (3\phi_0 - 2) \sqrt{1 - \frac{2x^2}{3}}}{2 \sqrt{1 - \frac{2x^2}{3}}} \right]. \quad (33)$$

Запишем выражение (23) для химпотенциала нейтронов (с учетом того, что $\tilde{q}_n = 0$):

$$\begin{aligned} \psi_n(x) &= e^{\lambda(x)/2 - \Pi(x)} \psi_n(0) = \\ &= \frac{2\psi_n(0)}{3\phi_0 - (3\phi_0 - 2) \sqrt{1 - \frac{2x^2}{3}}}. \end{aligned} \quad (34)$$

Рассмотрим теперь величину $\phi(x)$:

$$\phi(x) = \sum_i \psi_i Y_i \approx \quad (35)$$

$$\approx \psi_n Y_n + (\psi_p + \psi_e) Y_p = \psi_n(x),$$

где мы сперва использовали условие локальной электронейтральности (примерное, с точностью до $O(\Lambda_q)$), а затем — условие бета-равновесия. Тогда выражение (34) для ψ_n можно с той же точностью переписать в виде

$$\psi_n(x) = \frac{2\phi_0}{3\phi_0 - (3\phi_0 - 2) \sqrt{1 - \frac{2x^2}{3}}}. \quad (36)$$

Это выражение тождественно удовлетворяется при $x = 0$ (с учетом (35)), а при $x = x_b$, определяемом равенством (32), приводит к пределу $\psi_n(x_b) = 1$, как и должно быть.

Перейдем теперь к случаю заряженных частиц. Нам необходимо вычислить входящий в (23) интеграл от поля поляризации. Он равен

$$\begin{aligned} I_E(x) &\equiv \int_0^x \frac{\theta(x')}{x'^2} e^{\Pi(x')} dx' = \\ &= \frac{3}{8} \left[\left(3\phi_0 - 2 - 3\phi_0 \sqrt{1 - \frac{2x^2}{3}} \right) \times \right. \\ &\quad \times \frac{1}{x} \sqrt{\frac{3}{2}} \arcsin \sqrt{\frac{2}{3}} x - \\ &\quad \left. - 3\phi_0 + 4 + (3\phi_0 - 2) \sqrt{1 - \frac{2x^2}{3}} \right]. \end{aligned} \quad (37)$$

Тогда химпотенциалы заряженных компонент вещества есть

$$\psi_{p,e}(x) = \frac{\psi_{p,e}(0) \pm \alpha_e I_E(x)}{\frac{3}{2}\phi_0 - \left(\frac{3}{2}\phi_0 - 1\right) \sqrt{1 - \frac{2x^2}{3}}}, \quad (38)$$

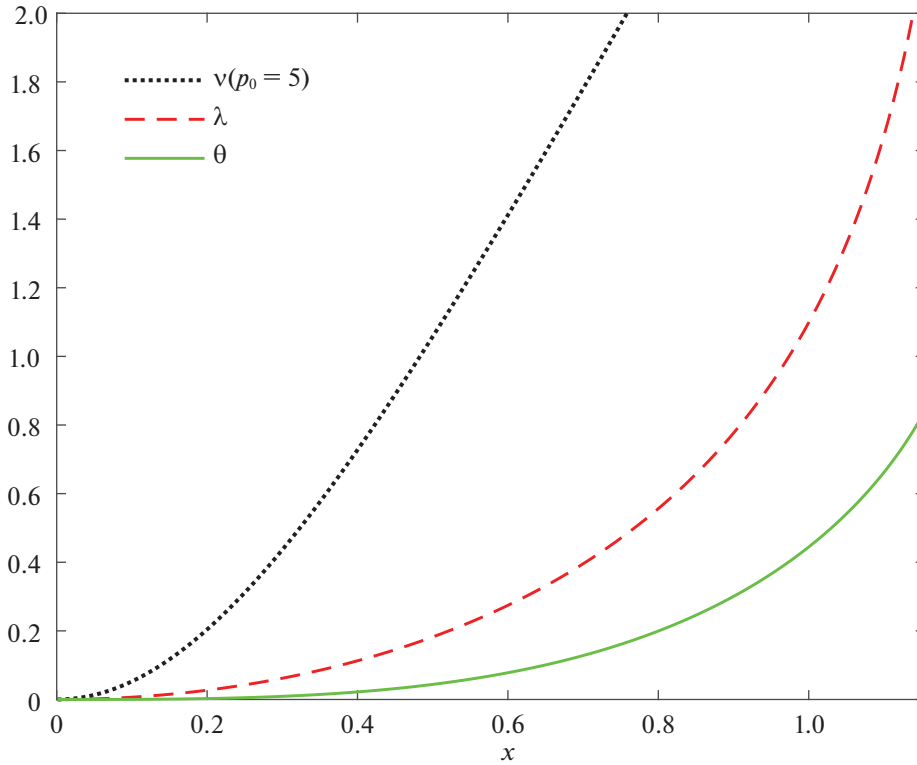


Рис. 1. Распределение метрических функций λ и ν при $p_0=5$, а также безразмерного заряда θ внутри звезды в пределах $0 \leq x \leq 2/\sqrt{3}$.

где верхний знак относится к протонам, нижний — к электронам. До сих пор параметр α_e оставался неопределенным. Воспользовавшись (38) и граничным условием для электронов $\psi_e(x_b) = 0$, получим

$$\alpha_e = \frac{\psi_e(0)}{I_E(x_b)}. \quad (39)$$

Входящая сюда величина интеграла $I_E(x_b)$ пред-

ставляет собой функцию от $\phi_0 \approx \psi_n(0) \equiv \psi_{n0}$:

$$I_E(x_b) = \frac{3}{8} \left[\frac{3\phi_0^2 - 6\phi_0 + 2}{\sqrt{(\phi_0 - 1)(2\phi_0 - 1)}} \times \right. \quad (40) \\ \left. \times \arcsin \left(\frac{2\sqrt{(\phi_0 - 1)(2\phi_0 - 1)}}{3\phi_0 - 2} \right) - 2(\phi_0 - 2) \right].$$

Ее поведение приведено на рис. 3, где также показаны следующие асимптотики:

$$I_E(x_b) = \begin{cases} \phi_0 - 1, & \phi_0 \rightarrow 1, \\ \frac{3}{4} \left[\frac{3}{2\sqrt{2}} \arcsin \left(\frac{2\sqrt{2}}{3} \right) - 1 \right] \phi_0 \approx 0.23\phi_0, & \phi_0 \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (41)$$

В нерелятивистском пределе $\phi_0 - 1 = \psi_{n0} - 1$ есть не что иное, как энергия Ферми нейтронов $E_{Fe}^n(0)$, которая, в силу условий бета-равновесия, $E_{Fe}^n = E_{Fe}^p + E_{Fe}^e$. Учтя также, что для электронов $\psi_{e0} = E_{Fe}^e(0)$, получим в нерелятивистском случае

формулу (39) в виде

$$\alpha_e = \frac{E_{Fe}^e(0)}{E_{Fe}^e(0) + E_{Fe}^p(0)}, \quad (42)$$

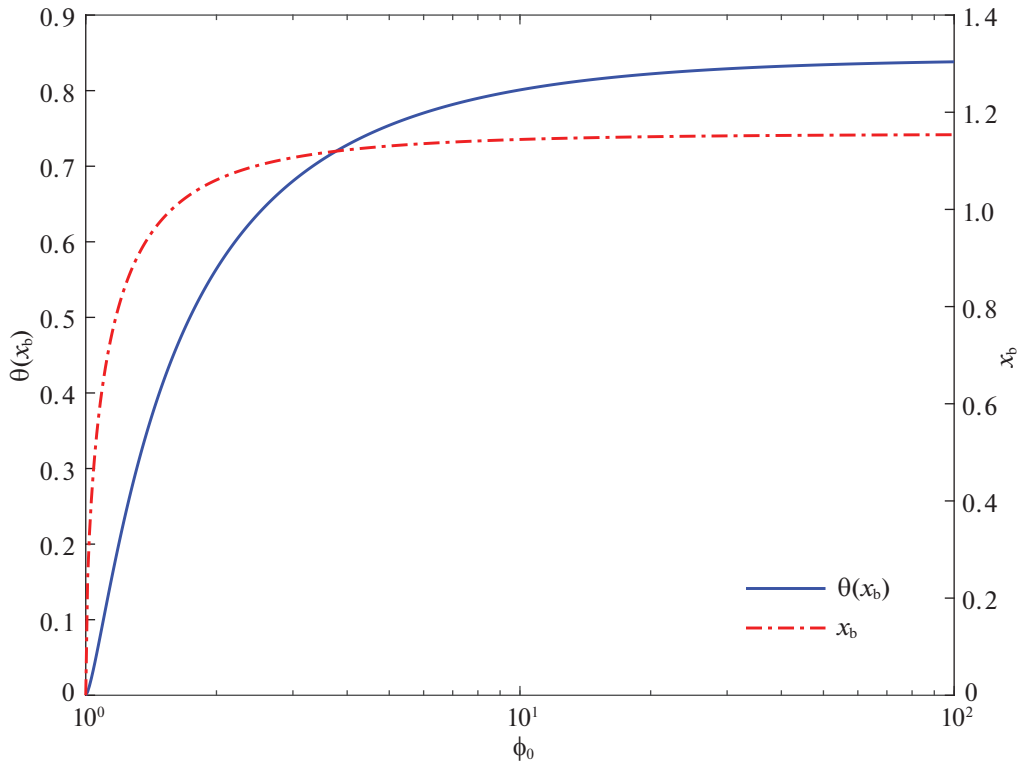


Рис. 2. Полный безразмерный заряд звезды $\theta(x_b)$ и координата границы звезды x_b как функции параметра $\phi_0 \approx \psi_{n0}$.

т.е. старый результат для политроп (см. формулу (II.22) в Криворученко и др., 2018).

ЧИСЛЕННЫЕ ПРИМЕРЫ

Чтобы проиллюстрировать полученные результаты, необходимо разобраться со смыслом параметра α_e . Для этого запишем выражение для полного заряда звезды Q внутри сферы радиусом r в виде

$$Q(r) = 4\pi r_0^3 n_b e \frac{\alpha_e}{\Lambda_G} \theta(x). \quad (43)$$

Число барионов внутри той же сферы есть

$$N(r) = 4\pi r_0^3 n_b \times \int e^{\lambda(x)/2} x^2 dx = 4\pi r_0^3 n_b \theta(x). \quad (44)$$

Тогда нескомпенсированный заряд на барион в звезде дается выражением (см. также Хунд, Кислинг, 2021a,b)

$$\frac{Q(r)}{N(r)} = e \frac{\alpha_e}{\Lambda_G}. \quad (45)$$

В частности, полный заряд звезды на барион равен значению выражения (45) при $x = x_b$.

При характерном числе барионов в звезде $N_b \sim 10^{57}$, значении элементарного заряда $e \approx 1.6 \times 10^{-19}$ К и величине параметра $\Lambda_G \sim 10^{36}$, получаем типичный полный заряд звезды $Q_s \sim 100\alpha_e$ К (см. также Криворученко и др., 2018). Таким образом, параметр $\alpha_e \sim O(1)$ определяет полный заряд звезды. Как видно из выражения (39), он связан с химпотенциалом электронов в нуле. В обычной НЗ в предположении ЛЭН (и, как следствие, равного нулю ее полного заряда) задание одного параметра (например, плотности в центре) однозначно определяет все свойства конфигурации, в частности, ее массу. В нашем случае, помимо параметра $\phi_0 \approx \psi_{n0}$, нужно задать ψ_{e0} (ψ_{p0} определяется из условий бета-равновесия), тем самым задав как полную массу звезды, так и ее заряд.

Несколько примеров полученных распределений химпотенциалов нейтронной, протонной и электронной компонент для различных начальных условий приведены на рис. 4. По мере уменьшения α_e химпотенциал электронов также падает (см. формулу (39)), а ψ_p приближается к ψ_n (можно сравнить формулы (36) и (38) и учесть условие бета-равновесия).

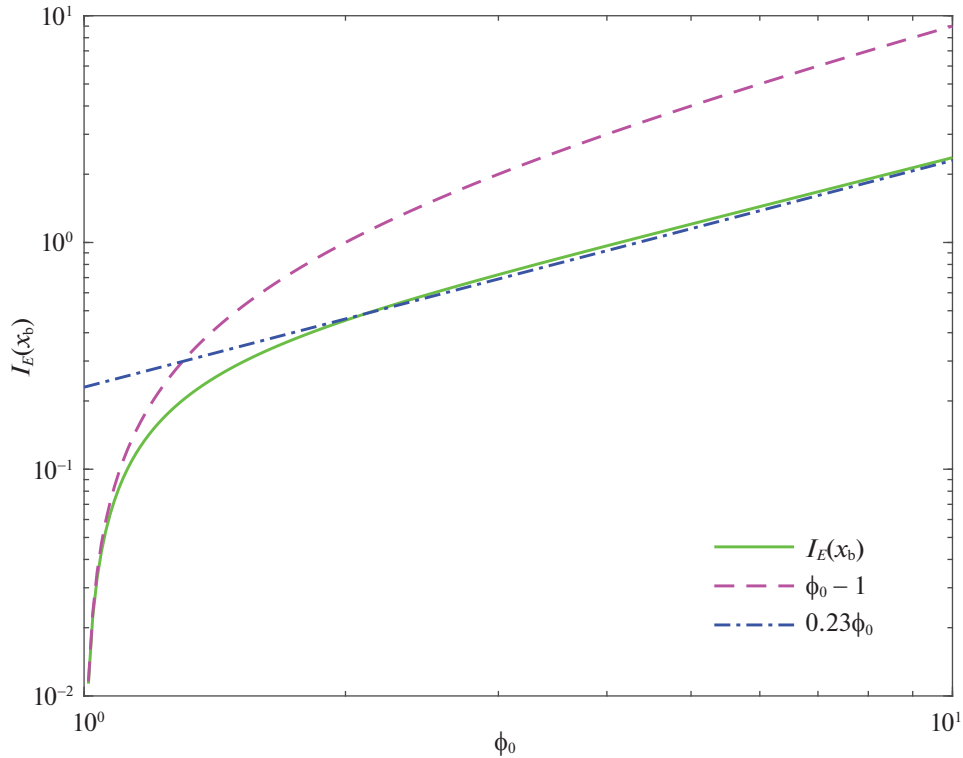


Рис. 3. Интеграл $I_E(x_b)$ и его асимптотики при $\phi_0 \rightarrow 1$ и $\phi_0 \rightarrow \infty$.

Насколько велик может быть параметр α_e , а значит, и заряд звезды? Оказывается, что α_e , сильно превышающее единицу, приводит к неверному решению, что демонстрируется на рис. 5. На верхней панели рисунка показано поведение хипотенциала протонов в окрестности $\psi_p \sim 1$ для нескольких значений α_e и фиксированном значении $\phi_0 = 5$. При $\alpha_e = 1$ кривая $\psi_p(x)$ с конечным наклоном упирается в единицу на границе звезды. При $\alpha_e = 2$ наклон на границе практически нулевой. А при $\alpha_e = 3$ кривая упирается в единицу снизу, из недопустимой (в нашем приближении) области $\psi_p < 1$! Таким образом, решение для хипотенциала протонов здесь неверно, и протонная компонента, фактически, заканчивается при $x \approx 0.3$. Данный эффект имеет прямой аналог в теории политроп. Функции Эмдена, показанные на нижней панели того же рис. 5 для нескольких значений индекса политропы n , также могут иметь несколько корней. Например, функция Эмдена для $n = 1$ имеет вид $\sin(\xi)/\xi$ и обращается в ноль не только при $\xi = \pi$, но и при $\xi = 2\pi$ и т.д. Однако решение, лежащее при $\xi > \pi$ уже не имеет отношения к реальности. Так и в нашем случае при $\alpha_e \gtrsim 2$ полученное решение, хотя формально и удовлетворяет граничному условию, не является допустимым. Тем самым

большие значения α_e , а значит, и полного заряда звезды, также недопустимы.

ЭЛЕКТРОСФЕРА

Возможно ли в рассматриваемом приближении получить глобально электронейтральную звездную конфигурацию, имеющую полный заряд $Q_s = 0$? Формула (45), как кажется, говорит, что это возможно только при $\alpha_e = 0$, т.е. в случае строгой локальной электронейтральности. Однако это не так: везде выше мы использовали существенное условие, что концентрации всех компонент вещества обращаются в нуль в одной точке. Если ослабить это требование, то вполне возможно построить конфигурацию, в которой концентрация, например, электронов внутри звезды меньше концентрации протонов, но сама электронная компонента простирается чуть дальше, образуя на поверхности звезды так называемую электросферу (Криворученко и др., 2018), компенсируя тем самым набравшийся положительный заряд звезды. Оценим параметры такой электросферы в нашем приближении.

Электросфера существует в тонком приповерхностном слое толщиной r_e , причем $r_e \ll r_b$ — радиуса границы барионной компоненты. С учетом

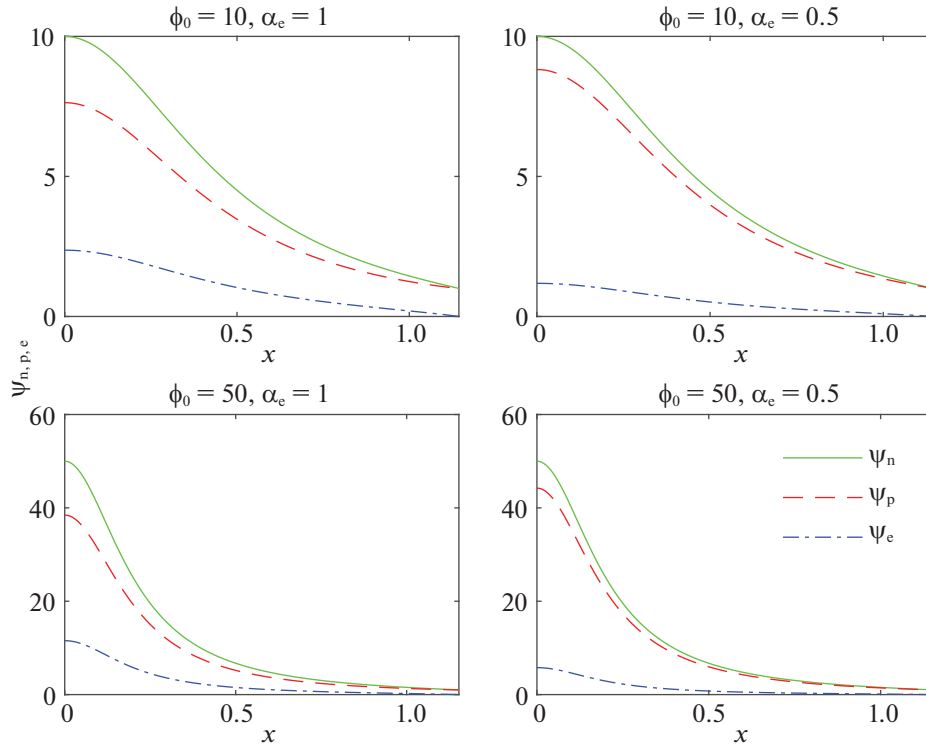


Рис. 4. Распределение безразмерных химпотенциалов нейтронов, протонов и электронов внутри НЗ для нескольких значений ϕ_0 и α_e .

этого уравнение (4) для заряда Q в области электросферы элементарно интегрируется. Требование $Q_s = 0$ дает нам толщину электросферы (ср. с формулой (A.9) из Криворученко и др., 2018):

$$\frac{r_e}{r_b} = \frac{Q_b}{4\pi r_b^3 e n_e} = \frac{\alpha_e}{\Lambda_G} \frac{\theta(x_b)}{x_b^3 e^{\lambda_b/2}} \left(\frac{n_b}{n_e} \right) \sim 10^{-36}, \quad (46)$$

где Q_b — величина (положительного) заряда звезды на границе барионной компоненты вещества. Химпотенциал электронов внутри такой электросферы, согласно уравнению равновесия (14), с точностью $O(\Lambda_G^{-1})$ равен нулю.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе была рассмотрена структура локально неэлектронейтральной самогравитирующей несжимаемой трехкомпонентной жидкости в ОТО. Как и в случае ньютоновской гравитации, в отношении термодинамических величин типа давления P , термодинамического потенциала Φ и т.д. (см. формулы (21), (22) и (27)) решение представляет собой ряд по малому параметру $1/\Lambda_G \sim 10^{-36}$, где первое приближение — классическое электронейтральное решение. Решение является вырожденным, так как в нем отсутствует нерегулярная

компонента решения, что полностью согласуется с аналогичным случаем в ньютоновской гравитации (см. Приложение из Криворученко и др., 2018). Было найдено, что при расчете макроскопических параметров НЗ, таких как масса и радиус, неэлектронейтральностью можно пренебречь. Тем самым показано, что странные результаты Бельведере и др. (2012) не могут быть просто следствием нарушения ЛЭН в ОТО. По-видимому, они связаны с их трактовкой тонких эффектов, происходящих на границе ядра звезды. В нашем решении здесь может появиться электросфера, однако ничего подобного найденному указанными авторами резкому росту электрического поля там не происходит. На важность аккуратного расчета границ фаз при решении задач о поляризации плазмы в астрофизических объектах было указано в работах Иосилевского (см., например, Иосилевский, 2009).

Главная особенность, к которой приводит учет отклонения от ЛЭН, содержится в уравнениях равновесия химпотенциалов компонент вещества (23). В них (для заряженных компонент) фактор, стоящий перед интегралом, состоит из двух множителей, компенсирующих друг друга, одного Λ_G — огромного, а другого $(n_p - n_e)/n_b$ — малого.

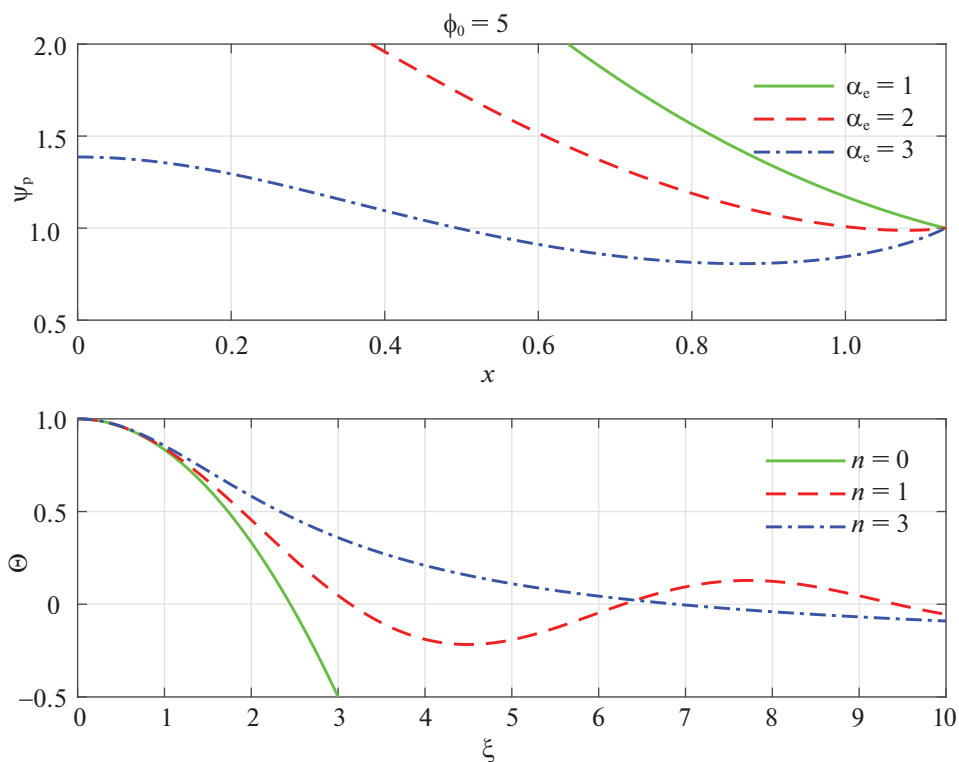


Рис. 5. Сверху: поведение химпотенциала протонов в окрестности $\psi_p \sim 1$ для нескольких значений α_e . Внизу: функции Эмдена для нескольких значений индекса политропы n .

Этот фактор, обозначенный нами $\alpha_e = O(1)$, входит в конечные уравнения равновесия индивидуальных компонент вещества (38) и обуславливает (уже не малый) эффект отклонения от ЛЭН. Он же в конечном счете определяет и полный заряд звезды (43). Этот нюанс является характерной и важнейшей особенностью задач об отклонении от ЛЭН в звездах: несмотря на то, что в отношении крупномасштабных параметров этим эффектом (и порожденным им полем поляризации) можно пренебречь, при переходе на микроуровень оказывается, что сила, действующая на заряженную частицу со стороны этого поля, сравнима с гравитационной силой.

Несмотря на модельный характер рассмотренной задачи, ее решение представляется нам важным этапом на пути анализа структуры НЗ с более реалистичными уравнениями состояния в отсутствие строгой ЛЭН.

Работа Н.И. Крамарева поддержана фондом развития теоретической физики и математики “БА-ЗИС” (грант № 20-2-1-19-1). Авторы также благодарны анонимным рецензентам, чьи замечания позволили существенно улучшить нашу статью.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Балли, Харрисон (J. Bally and E.R. Harrison), *Astrophys. J.* **220**, 743 (1978).
2. Безногов, Яковлев (M.V. Beznogov and D.G. Yakovlev), *Phys. Rev. Lett.* **111**, 161101 (2013).
3. Бейм и др. (G. Baym, C. Pethick, and P. Sutherland), *Astrophys. J.* **170**, 299 (1971).
4. Бельведере и др. (R. Belvedere, D. Pugliese, J.A. Rueda, R. Ruffini, and S.-Sh. Xue), *Nucl. Phys. A* **883**, 1 (2012).
5. Бельведере и др. (R. Belvedere, J.A. Rueda, and R. Ruffini), *Astrophys. J.* **799**, 23 (2015).
6. Вайнберг (S. Weinberg), *Гравитация и космология* (ПЛАТОН, 2000).
7. Горшков, Батулин (A.B. Gorshkov and V.A. Baturin), *Astron. Rep.* **52**, 760 (2008).
8. Иосилевский (I.L. Iosilevskiy), *J. Phys. A* **42**, 214008 (2009).
9. Криворученко и др. (M.I. Krivoruchenko, D.K. Nadyozhin, and A.V. Yudin), *Phys. Rev. D* **97**, 083016 (2018).
10. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М., *Теория поля* (Физматлит, 2012).
11. О’Мэлли (R.E. O’Malley), *Singular Perturbation Methods for Ordinary Differential Equations* (New York: Springer-Verlag, 1991).

12. Неслушан (L. Neslusan), *Astron. Astrophys.* **372**, 913 (2001).
13. Олсон, Бэйлин (E. Olson and M. Bailyn), *Phys. Rev. D* **12**, 3030 (1975).
14. Олсон, Бэйлин (E. Olson and M. Bailyn), *Phys. Rev. D* **18**, 2175 (1978).
15. Пирсон и др. (J.M. Pearson, N. Chamel, A.Y. Potekhin, A.F. Fantina, C. Ducoin, A.K. Dutta, and S. Goriely), *MNRAS* **481**, 2994 (2018).
16. Росселанд (S. Rosseland), *MNRAS* **84**, 525 (1924).
17. Ротондо и др. (M. Rotondo, J.A. Rueda, R. Ruffini, and S.-S. Xue), *Phys. Lett. B* **701**, 667 (2011).
18. Синг Дж.Л., *Общая Теория Относительности* (М.: Изд. иностр. лит-ры, 1964).
19. Хензель и др. (P. Haensel, A.Y. Potekhin, and D.G. Yakovlev), *Neutron Stars 1: Equation of State and Structure* (New York: Springer, 2007).
20. Хунд, Кисслинг (P. Hund and M.K.-H. Kiessling), *Phys. Rev. D* **103**, 4 (2021).
21. Хунд, Кисслинг (P. Hund and M.K.-H. Kiessling), *Am. J. Phys.* **89**, 291 (2021).
22. Шацман (E.L. Schatzman), *White Dwarfs* (Amsterdam: North-Holland, 1958).