

РАЗЛИЧИЕ ХАРАКТЕРИСТИК СОЛНЕЧНЫХ МАКРОСПИКУЛ НА НИЗКИХ И ВЫСОКИХ ШИРОТАХ

© 2022 г. С. А. Богачёв^{1,2*}, И. П. Лобода^{1,2},
А. А. Рева^{1,2}, А. С. Ульянов^{1,2}, А. С. Кириченко^{1,2}

¹Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН, Москва, Россия

²Институт космических исследований РАН, Москва, Россия

Поступила в редакцию 28.09.2021 г.

После доработки 15.11.2021 г.; принята к публикации 03.12.2021 г.

Исследованы 49 солнечных макроспикул, наблюдавшихся в 2010 г., на фазе роста солнечного цикла, на высоких (околополярных) и на низких широтах вблизи солнечного экватора. Мы нашли, что темп формирования макроспикул в пределах точности измерения не зависит от широты и составляет $\sim 0.1 \text{ град}^{-2} \text{ ч}^{-1}$. Одновременно установлено, что средняя высота макроспикул вблизи экватора и полюсов заметно различается. После устранения эффектов проекции нами получено значение 31.7 ± 0.2 тыс. км для макроспикул на низких широтах и 39.1 ± 0.3 тыс. км для высокоширотных макроспикул.

Ключевые слова: макроспикулы, переходный слой Солнца.

DOI: 10.31857/S0320010822010028

ВВЕДЕНИЕ

Солнечные макроспикулы — это вертикальные структуры, наблюдающиеся на краю солнечного диска в вакуумной УФ-области спектра (чаще всего в линии ионизованного гелия $\text{He II } 304 \text{ \AA}$, а также иных линиях переходного слоя солнечной атмосферы, таких как $\text{N IV } 765 \text{ \AA}$ и $\text{O V } 630 \text{ \AA}$). Название “макроспикулы” было введено Бохлином и др. (1975) и явно указывает на сходство этих явлений с обычными солнечными спикулами, хорошо известными из наблюдений в оптическом диапазоне, прежде всего в линии $\text{H}\alpha$ (см., например, Бекерс, 1968, 1972). Действительно, и в том, и в другом случае речь идет о движениях солнечного вещества, которое сначала поднимается над поверхностью Солнца в виде относительно узкого столба, а затем опускается вниз. Макроспикулы, как это следует из названия, заметно больше по размеру, чем спикулы (достигают высоты ~ 70 тыс. км против ~ 10 тыс. км у обычных спикул), происходят реже, а главное, формируются на больших высотах — не вплотную к фотосфере, а выше, на границе между переходным слоем и короной Солнца. Вещество макроспикул является заметно более горячим (с температурой примерно от

5×10^4 до 3×10^5 К, против температур в несколько тысяч кельвинов у спикул), поэтому основное их излучение лежит в вакуумном УФ-диапазоне, недоступном для наблюдения с поверхности Земли. Многочисленные дополнительные сведения о характеристиках макроспикул могут быть найдены в уже упоминавшейся работе Бохлина (1975), а также в работах Уитброу и др. (1976), Дера и др. (1989), Паренти и др. (2002), Беннета и Эрдели (2015), Кисса и др. (2017). Поперечный размер макроспикул оценивается как 3–16 тыс. км (у спикул от 0.3 до 1.5 тыс. км), максимальные скорости плазмы от 10 до 150 км/с (у спикул обычно не более 20–30 км/с), а времена жизни от 3 до 45 мин (у спикул 1–10 мин).

Вопрос о пространственном соответствии макроспикул и спикул изучен плохо. Направляется предположение, что макроспикулы являются внешними горячими оболочками обычных спикул. Против такого представления, однако, говорит существенная разница в количестве спикул и макроспикул. Первые образуют много более плотные ансамбли над фотосферой (особенно много их на границах конвективных ячеек); макроспикулы же — это, скорее, изолированные явления. Также есть существенная разница во временах жизни. По этой причине более вероятно, что речь идет о независимых явлениях, хотя, возможно, и близкой природы. В первом случае воздействие прилагается

* Электронный адрес: bogachev@lebedev.ru

к более тяжелой и холодной фотосферной плазме, а во втором — к более разреженной и горячей плазме переходного слоя, что, вероятно, и объясняет разницу в размерах. Не исключено, впрочем, что в обоих случаях работают совершенно разные механизмы.

В целом обособить ансамбль макроспикул от иных солнечных явлений не так просто. В частности, в $H\alpha$ диапазоне спектра, помимо обычных спикул, наблюдаются также гигантские спикулы, размеры и времена жизни которых перекрываются с характеристиками макроспикул (см., например, Лусиф, 1994; Жанг и др., 2000). Также существуют наблюдения макроспикул (обычно в виде слабых аналогов) в области заметно более высоких температур, например, в линиях Ne_{VIII} 770 Å и Mg_{IX} 368 Å, формирующихся при 6.3×10^5 К и 10^6 К соответственно. Такие макроспикулы уже вплотную примыкают к гораздо более протяженным и горячим корональным джетам (см., например, Рауафи и др., 2016). Таким образом, вопрос корректной классификации спикулоподобных образований вблизи поверхности Солнца нетривиален. Вместе с тем основной ансамбль все же уверенно разделяется на группы (прежде всего по размерам и температуре плазмы).

Интерес к обычным солнечным спикулам связан, в частности, с возможностью использовать их для изучения мелкомасштабных волновых процессов у солнечной поверхности. Речь, в частности, идет о волновых процессах, способных греть корону Солнца. Так, альфвеновские волны (одни из кандидатов на механизм нагрева; см., например, обзор Штейна, Лейбахера, 1974) при распространении вверх в корону могут вызывать колебания спикул, что делает сами волны видимыми для наблюдателя. Для макроспикул такие колебания не наблюдались, и интерес к ним имеет иную природу. Макроспикулы, в частности, могут играть заметную роль в обмене плазмой и энергией между переходным слоем и солнечной короной. Поднимающееся в корону вещество может частично рассеиваться в ней (см., например, Лобода, Богачёв, 2017). Также может происходить нагрев корональной плазмы макроспикулами, например, когда их движение является сверхзвуковым. Можно сказать, что интерес к макроспикулам является частью современного интереса к мелкомасштабным явлениям разного типа и к их возможной роли в физике Солнца (см., например, Хадсон, 1991; Рева и др., 2012; Кириченко, Богачёв, 2017a,b; обзор Богачёв и др., 2020).

Солнечные макроспикулы наиболее хорошо наблюдаются в областях открытого магнитного поля, особенно в полярных корональных дырах. По этой причине это явление часто рассматривается как

характерное для солнечных полюсов и для открытых магнитных структур (см., например, Бохлин, 1975; Дерев, 1989). Вместе с тем признаки соответствующих движений плазмы можно обнаружить на любых широтах, вплоть до солнечного экватора, однако макроспикулы здесь поднимаются на меньшую высоту. То, что наблюдения макроспикул на низких широтах затруднены, приводит к снижению интереса к их изучению. Действительно, зачем наблюдать явление там, где оно видно плохо, если на Солнце много мест, где оно видно хорошо. Мы, однако, хотели бы посмотреть на этот вопрос под несколько иным углом. Мы полагаем, что изучение макроспикул как единого ансамбля может быть не вполне корректным. В частности, характеристики солнечных макроспикул могут зависеть от гелиошироты, т.е. различаться для спикул на высоких и низких широтах. Поскольку наиболее достоверно измеряемой характеристикой макроспикул является их высота, то разница в характеристиках макроспикул на разных гелиоширотах может быть установлена путем сравнения их высоты. Именно это — сравнительный анализ высоты макроспикул на низких и высоких широтах — и является предметом работы.

Статья построена стандартно. В следующем разделе мы даем описание экспериментальных данных, на которых построена работа. Далее изложены методы обработки, и затем — полученные результаты. В Заключении мы подводим краткие итоги исследования.

ИСПОЛЬЗОВАННЫЕ ДАННЫЕ И МЕТОДЫ ИХ ОБРАБОТКИ

Макроспикулы являются многочисленными и относительно мелкомасштабными явлениями, для изучения которых наиболее эффективны автоматические методы обработки. Соответствующие процедуры были ранее разработаны и описаны Лободой и Богачёвым (2015, 2017). Эти методы применялись и в данной работе.

Для исследования мы использовали изображение Солнца в линии He_{II} 304 Å, полученные прибором AIA на космической обсерватории SDO. Линия 304 Å формируется преимущественно в переходном слое Солнца при температуре $4 \times 10^4 - 2 \times 10^5$ К с максимумом на температуре 8×10^4 К (Кушман, Ранс, 1978; Томпсон, Брекке, 2000). Это находится в хорошем соответствии с температурой плазмы в солнечных макроспикулах. Телескопы AIA предоставляют наблюдения полного диска Солнца с высоким пространственным разрешением 0.6'' и временным шагом 12 с. Для данной работы использовался массив данных AIA в линии He_{II} 304 Å, полученный 1 декабря 2010 г. с

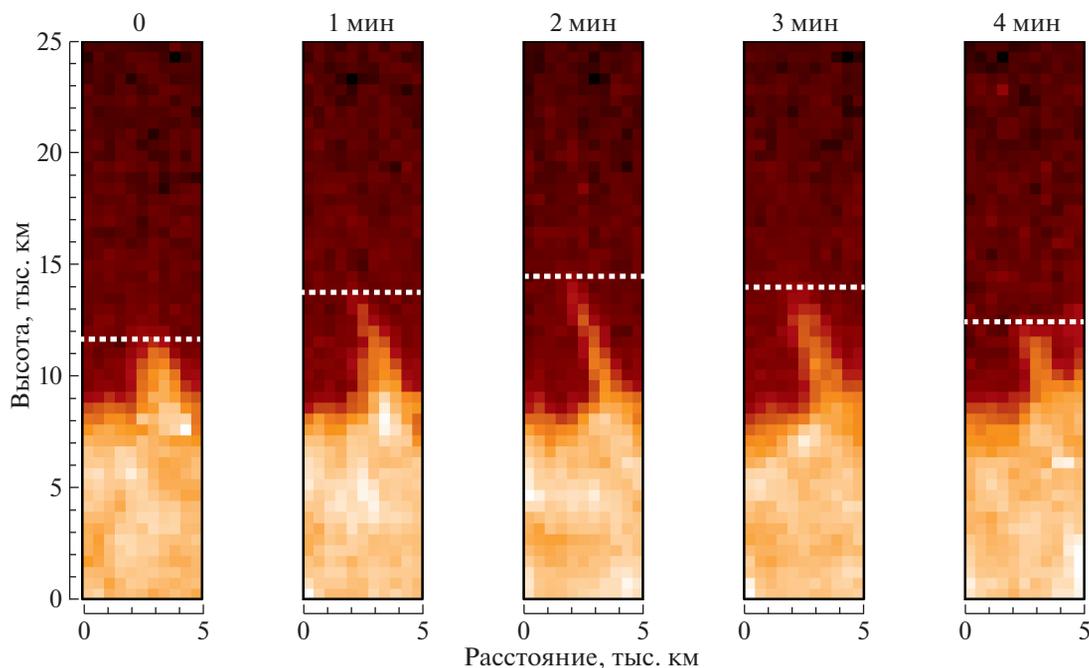


Рис. 1. Пример наблюдения макроспикулы и изменения ее высоты со временем: пять последовательных изображений одной макроспикулы, полученные с шагом 1 мин. По оси X — расстояние вдоль поверхности Солнца; по оси Y — высота, отсчитываемая от уровня фотосферы.

00:00 UT по 06:00 UT. Так как характерное время жизни макроспикул не превышает 1 ч, выбранная продолжительность серии (6 ч) гарантировала возможность наблюдения макроспикул в течение всего времени их жизни для большинства зарегистрированных событий. Период наблюдений соответствовал фазе роста солнечного цикла и характеризовался умеренной солнечной активностью.

Процедуре обработки подвергалась примыкающая к краю Солнца кольцеобразная область высотой 80 тыс. км, где и наблюдаются макроспикулы. Отсчет производился от уровня фотосферы, который находился расчетным путем. Высота макроспикулы, для уменьшения ошибки, определялась по нескольким соседним кадрам вблизи ее максимального значения. На каждом отдельном кадре верхним краем макроспикулы считалась точка, где достигался минимум производной от интенсивности, измеренной вдоль оси макроспикулы. Эти значения приближались полиномиальной зависимостью, по точке максимума которой определялась максимальная высота макроспикулы.

В диапазоне высот от 0 до 10–15 тыс. км над поверхностью Солнца практически невозможно различить отдельные структуры, так как макроспикулы сливаются из-за многочисленного переналожения в сплошной фон. Выше этой границы макроспикулы уже хорошо различаются на фоне окружающей разреженной короны. При сравнении серий изображений хорошо видна динамика

плазмы в макроспикулах: фаза подъема и фаза опускания. Пример такого наблюдения показан на рис. 1. В целом для макроспикул характерно параболическое движение, что кажется естественным для свободного движения плазмы в однородном гравитационном поле. Вместе с тем анализ показывает наличие отклонений в траектории движения плазмы от расчетного движения для известной гравитационной силы у солнечной поверхности (см., подробнее, Лобода, Богачёв, 2019).

Всего в указанный период нами было выделено 49 макроспикул, распределенных преимущественно в полярных солнечных областях, а также на низких широтах на западном краю Солнца. Восточный край был исключен из анализа, так как на нем присутствовали крупные активные области, препятствующие исследованию мелкомасштабных структур.

РЕЗУЛЬТАТЫ

Так как число изученных макроспикул, 49, является небольшим, их статистический анализ может быть проведен только с существенными погрешностями. По этой причине все полученные ниже результаты приведены со значениями погрешностей, основным источником которых является недостаток статистики. Одновременно это один из самых больших ансамблей макроспикул, обработанный в рамках одного исследования. Заметно большее число макроспикул (в обоих случаях около 350)

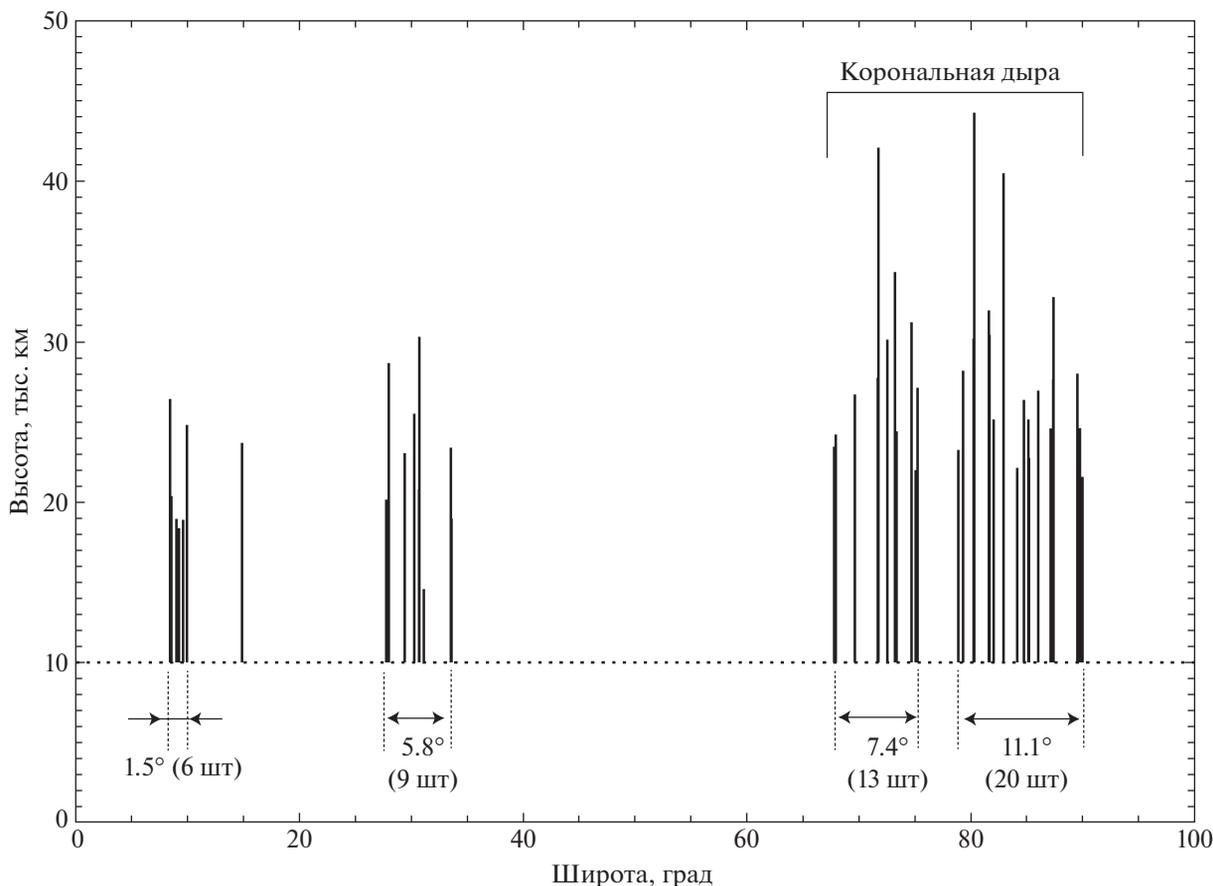


Рис. 2. Распределение исследованных макроспикул по гелиошироте (угол в градусах от солнечного экватора до места формирования макроспикулы). Ось X — широта; ось Y — максимальная высота макроспикулы над видимым краем солнечного диска. Продольная пунктирная линия — примерная граница, выше которой различаются отдельные макроспикулы. Показаны ширина (в градусах) и число макроспикул для четырех плотных наблюдавшихся групп. Группа вблизи полюса зарегистрирована в корональной дыре.

изучено, вероятно, только в Кисс и др. (2018) и Лободой и Богачёвым (2019), но за более продолжительный интервал наблюдений: с 2010 по 2016 г. в первой работе и с 2010 по 2015 г. — во второй. В таких случаях на результат измерений может влиять изменение уровня солнечной активности. По этой причине мы полагаем, что рост погрешности (из-за меньшего числа событий) в нашей работе компенсируется однородностью измерений, так как все они получены примерно в одно и то же время.

Ниже на рис. 2 показано распределение 49 изученных макроспикул по солнечной широте без разделения на северное/южное, а также западное/восточное полушария. Для каждого события показана его максимальная высота. Пунктирной линией отмечена приблизительная граница, ниже которой макроспикулы не различаются из-за высокой плотности фонового излучения. Разделение макроспикул на четыре ансамбля является условным и возникло в результате обработки. В интервалах, где макроспикул нет, отсутствовали условия

для их регистрации из-за активных областей или иных эмиссионных структур (в основном, протуберанцев). Первые два ансамбля, расположенные в диапазонах 8.5° – 10.0° и 27.8° – 33.6° , а также изолированную макроспикулу на широте 14.9° мы относим к низкоширотным макроспикулам, а два последних ансамбля в диапазонах 67.7° – 75.2° и 78.8° – 89.9° — к высокоширотным. В первой, низкоширотной, группе содержатся 16 макроспикул; во второй, высокоширотной, — 33 макроспикулы. Отметим, что все высокоширотные события были зарегистрированы в полярных корональных дырах (северной или южной). Все низкоширотные события относились к спокойной короне. Сведения по двум выделенным нами ансамблям макроспикул приведены в табл. 1. Частота формирования макроспикул определялась делением их числа на занимаемый ими угол на солнечном лимбе. С учетом погрешности мы не обнаружили существенной разницы в частоте формирования макроспикул на низких и высоких широтах. Средняя высота макроспикул в полярных областях, напротив, кажется

Таблица 1. Основные группы макроспикул, исследованные в работе

Группа	Расположение	Число макроспикул	Средняя высота, тыс. км	Частота формирования, шт. град ⁻¹ ч ⁻¹
Низкоширотные (экваториальные)	8.5°–10.0°	16	22.3 ± 4.2	4.1 ± 1.1
	14.9°			
	27.8°–33.6°			
Высокоширотные (полярные)	67.7°–75.2°	33	27.9 ± 5.7	3.6 ± 0.6
	78.8°–89.9°			

заметно большей, чем для экваториальных, хотя диапазоны частично перекрываются. Результаты измерения, таким образом, предварительно оказались в соответствии с нашим предположением, что макроспикулы должны формироваться с одинаковой эффективностью на низких и высоких широтах, однако могут различаться по высоте.

Приведенная в табл. 1 средняя высота макроспикул должна быть завышенной, так как из наблюдений выпадают макроспикулы малого размера. Чтобы сделать выводы о реальных характеристиках низкоширотных и высокоширотных групп макроспикул, мы предположили, что их распределение по высоте h является распределением Гаусса со средним значением h_0 и дисперсией σ :

$$f(h) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(h-h_0)^2}{2\sigma^2}\right]. \quad (1)$$

Сравнив распределение $f(h)$ с экспериментальными значениями, можно найти наиболее вероятные значения h_0 и σ .

Чтобы снизить влияние дискретности измерений на результат, мы сделали переход от обычной к интегральной функции распределения $\Phi(h)$, которая определяет вероятность нахождения высоты макроспикулы в диапазоне высот от 0 до h . Функция $\Phi(h)$ связана с функцией (1) формулой

$$\Phi(h) = \int_0^h f(t)dt = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^h \times \exp\left[-\frac{(t-h_0)^2}{2\sigma^2}\right] dt. \quad (2)$$

Используя замену переменных

$$x = \frac{t-h_0}{\sqrt{2}\sigma}, \quad (3)$$

формула (2) может быть преобразована к виду

$$\Phi(h) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-h_0/\sqrt{2}\sigma}^{(h-h_0)/\sqrt{2}\sigma} \exp(-x^2) dx, \quad (4)$$

после чего может быть выражена через функцию ошибок $\operatorname{erf}(x)$, присутствующую в большинстве математических программ:

$$\Phi(h) = \frac{1}{2} \left[\operatorname{erf}\left(\frac{h-h_0}{\sqrt{2}\sigma}\right) + \operatorname{erf}\left(\frac{h_0}{\sqrt{2}\sigma}\right) \right]. \quad (5)$$

Эта формула сравнивалась нами с экспериментальными интегральными распределениями, которые были измерены в ходе работы. Результаты приведены на рис. 3. Треугольниками показано экспериментальное интегральное распределение для высокоширотных макроспикул, а крестами — распределение для низких широт. Соответствующее экспериментальное распределение нормировалось в диапазон от 0 до 1, после чего проводился поиск его наилучшего соответствия с функцией $\Phi(h)$. Краткие сведения по использованному методу оптимизации приведены в Приложении к работе. Результаты оптимизации, распределения $\Phi(h)$, для обеих групп макроспикул, показаны на верхней панели рис. 3 гладкими кривыми (сплошная для высокоширотных макроспикул и пунктирная для низкоширотных). На нижней панели рис. 3 показаны соответствующие нормальные распределения Гаусса для двух групп макроспикул. Результаты интерполяции (параметры h_0 и σ с погрешностями) для обеих групп приведены в табл. 2. Как и ожидалось, средние высоты макроспикул по результатам интерполяции оказались ниже, чем по экспериментальным данным, за счет более корректного учета событий малой высоты. Погрешности параметров h_0 и σ , приведенные в табл. 2, рассчитывались, исходя из разброса точек. Возможные погрешности индивидуальных измерений во внимание не принимались.

ОБСУЖДЕНИЕ И ВЫВОДЫ

Проведенное в работе исследование показывает, что солнечные макроспикулы действительно могут быть разделены на две группы, а именно, на высокоширотные (на широте выше 45°) и низкоширотные (ниже 45°). Частота формирования макроспи-

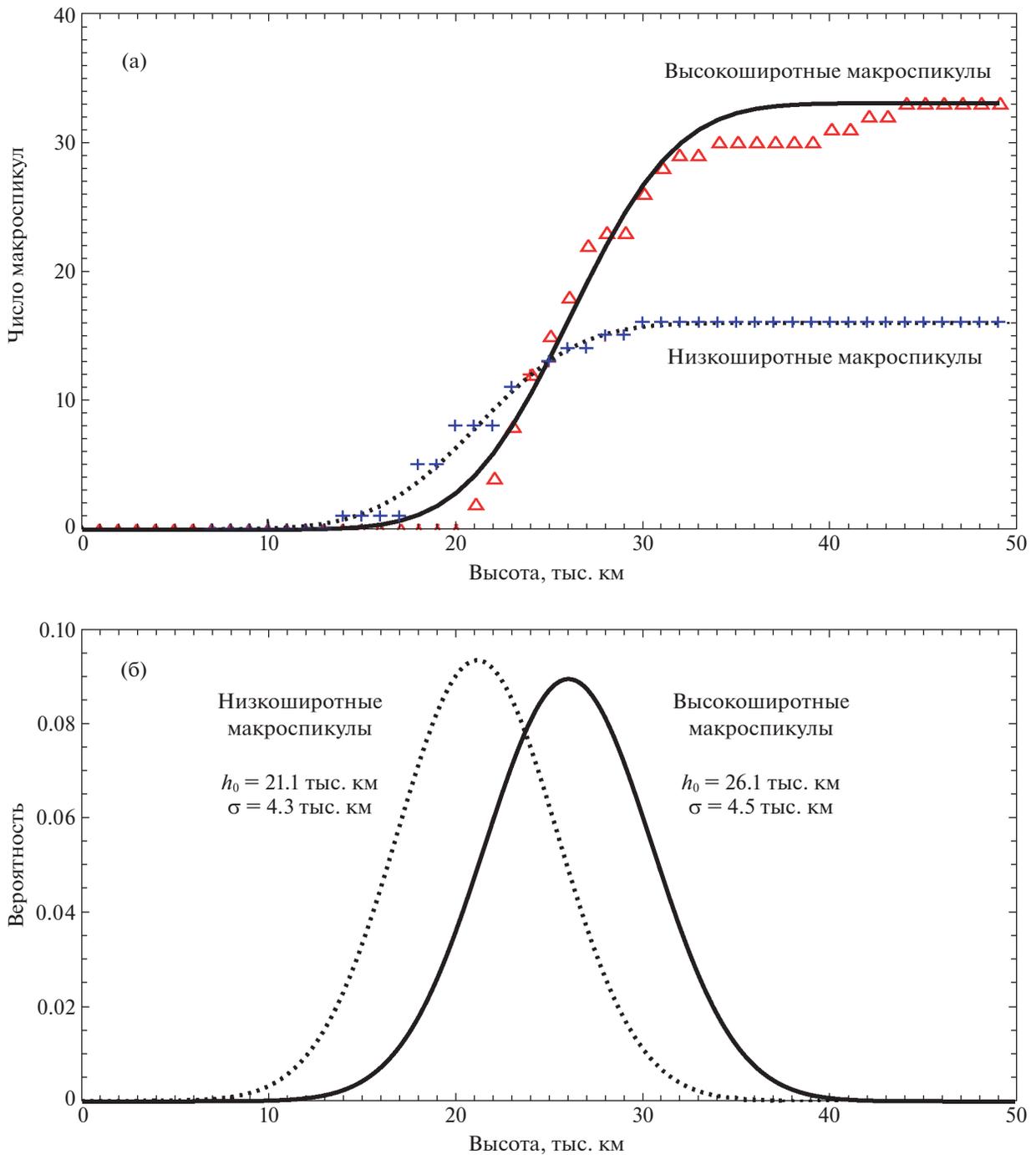


Рис. 3. (а) — Экспериментальные интегральные распределения макроспикул, наблюдаемых на высоких (треугольники) и низких (кресты) солнечных широтах, и их приближение теоретической функцией $\Phi(h)$ (формула (2)). (б) — Распределения Гаусса для высокоширотных (сплошная линия) и низкоширотных (пунктир) макроспикул, построенные для найденных в ходе интерполяции параметров h_0 и σ .

кул в обеих группах примерно совпадает. В проекции на картинную плоскость для макроспикул на высоких широтах она составляет $\sim 4.1 \text{ град}^{-1} \text{ ч}^{-1}$, а на низких $\sim 3.6 \text{ град}^{-1} \text{ ч}^{-1}$. Средняя измеренная высота для высокоширотных макроспикул составила 26.1 ± 0.2 тыс. км, что заметно отличается

от средней высот макроспикул на низких широтах, 21.1 ± 0.1 тыс. км.

Так как измерения макроспикул производились в проекции на картинную плоскость, фактическая высота макроспикул должна быть выше наблюдаемой. Проведем простые оценки. Измеренная вы-

Таблица 2. Экспериментально измеренные характеристики макроспикул

Группа	Число макроспикул	Средняя высота h_0 , тыс. км	Стандартное отклонение σ , тыс. км
Низкоширотные (экваториальные)	16	21.1 ± 0.1	4.3 ± 0.2
Высокоширотные (полярные)	33	26.1 ± 0.2	4.5 ± 0.2

Таблица 3. Характеристики макроспикул после пересчета

Группа	Фактическая средняя высота H_0 , тыс. км	Частота формирования F , град $^{-2}$ ч $^{-1}$
Низкоширотные (экваториальные)	31.7 ± 0.2	0.12 ± 0.03
Высокоширотные (полярные)	39.1 ± 0.3	0.09 ± 0.02

сота макроспикулы h над краем солнечного диска связана с ее фактической высотой H соотношением

$$H = \frac{h + R}{\cos \alpha} - R \approx h + R \frac{\alpha^2}{2}, \quad (6)$$

где R — радиус Солнца, а α — смещение макроспикулы по долготе от видимого края Солнца (малый угол). Усредним данное соотношение по углу α ; при этом обозначим $H_0 = \langle H \rangle$, а $h_0 = \langle h \rangle$ (высота h_0 равна измеренной выше, а высота H_0 представляет собой искомую фактическую высоту макроспикул):

$$H_0 = h_0 + \frac{R}{2} \langle \alpha^2 \rangle. \quad (7)$$

Усреднение угла α производится в диапазоне от 0 до предельного угла α_0 , при котором спикулы перестают быть видны над лимбом. При усреднении в таком диапазоне, $\langle \alpha^2 \rangle = \alpha_0^2/3$. Предельный угол α_0 , при котором спикулы со средней высотой H_0 перестают быть видны над краем Солнца, можно определить, положив в формуле (6) значение $H = H_0$, а $h = 0$. Тогда

$$\alpha_0^2 \approx 2 \frac{H_0}{R}. \quad (8)$$

Собирая все вместе, получаем, что измеренная средняя высота макроспикул, h_0 , и их фактическая высота H_0 связаны соотношением

$$H_0 \approx \frac{3}{2} h_0. \quad (9)$$

Аналогично пересчитаем частоту формирования макроспикул. Обозначим ранее полученную частоту (измеренную в картинной плоскости над лимбом) как f . Соответствующие экспериментальные

значения приведены в табл. 1. Учтем, что над краем Солнца видны спикулы, приблизительно формирующиеся в диапазоне углов $\pm \alpha_0$ относительно лимба (формула (8)). Отсюда можно рассчитать фактическую частоту формирования макроспикул (обозначим ее F) в пересчете на квадратный градус солнечной поверхности:

$$F = \frac{f}{2\alpha_0} = f \frac{\pi}{360} \sqrt{\frac{R}{2H_0}}. \quad (10)$$

Результаты расчетов приведены в табл. 3.

В заключение оценим энергию, которая затрачивается на формирование одной макроспикулы. Положим, что макроспикулы имеют средний поперечный размер $L_0 \approx (5-10) \times 10^8$ см и концентрацию плазмы $n_0 \approx (0.5-2) \times 10^{10}$ см $^{-3}$ (см., например, Уитброу и др., 1976; Дерев и др., 1989; Херманз, Мартин, 1986). Для формирования столба плазмы с такими характеристиками и средней высотой H_0 (табл. 3) в однородном гравитационном поле $g_0 \approx 2.7 \times 10^4$ см с $^{-2}$, требуется затратить энергию

$$W_0 = \frac{1}{2} n_0 m_p g_0 L_0^2 H_0^2, \quad (11)$$

где $m_p = 1.67 \times 10^{-24}$ г — масса протона. Для экваториальных макроспикул со средней высотой $H_0 = 31.7$ тыс. км получается $W_0 = (0.3-4.5) \times 10^{27}$ эрг. Для макроспикул в полярных областях, где $H_0 = 39.1$ тыс. км, вычисления дают $W_0 = (0.4-6.9) \times 10^{27}$ эрг. Полученные значения сопоставимы с энергиями слабых солнечных микровспышек и примерно на 1–2 порядка выше энергии отдельных нановспышек (см., например, Кириченко, Богачёв, 2013; Ульянов и др., 2019).

Отметим, что похожая величина может быть получена и из оценок магнитной энергии, запасе-

мой в переходном слое перед формированием макроспикулы. Полагая, что объем соответствующей области примерно равен L_0^3 , а магнитное поле $B \sim 10$ Гс, получаем

$$W_B = \frac{B^2}{8\pi} L_0^3 \sim (0.5-4.0) \times 10^{27} \text{ эрг.} \quad (12)$$

Разброс значений энергии соответствует естественному разбросу в поперечном размере макроспикул L_0 , а также неопределенностью в концентрации плазмы n_0 .

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 21-72-10157).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Приведем краткие сведения по экстраполяции экспериментальных функций $\Phi(h)$. Для экстраполяции мы использовали метод оптимизации Левенберга–Марквардта (см., например, Марквардт, 1963), который реализован в виде программных кодов во многих библиотеках. Мы использовали для расчетов язык IDL6.0 (соответствующая функция в нем называется LMFIT, код — lmfitt.pro). Для применения кода требуется подготовительная работа по определению частных производных искомой функции (в нашем случае $\Phi(h)$) по каждому параметру, по которому производится оптимизация (в нашем случае это средняя высота h_0 и ее стандартное отклонение σ). Ниже приведены расчеты для этих производных, которые могут быть полезны в аналогичных исследованиях.

Исходная функция $\Phi(h)$ определена в работе как

$$\Phi(h) = \frac{1}{2} \left[\operatorname{erf} \left(\frac{h - h_0}{\sqrt{2}\sigma} \right) + \operatorname{erf} \left(\frac{h_0}{\sqrt{2}\sigma} \right) \right]. \quad (13)$$

Для определения ее производных воспользуемся известной формулой для производной функции ошибок

$$\frac{d}{dx} \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp(-x^2). \quad (14)$$

Проведем вычисления частной производной по h_0 :

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi}{dh_0} &= \frac{1}{2} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp \left[-\frac{(h - h_0)^2}{2\sigma^2} \right] \left(-\frac{1}{\sqrt{2}\sigma} \right) + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp \left(-\frac{h_0^2}{2\sigma^2} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}\sigma} \right). \end{aligned} \quad (15)$$

Окончательно:

$$\frac{d\Phi}{dh_0}(h) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \left[\exp \left(-\frac{h_0^2}{2\sigma^2} \right) - \right. \quad (16)$$

$$\left. - \exp \left(-\frac{(h - h_0)^2}{2\sigma^2} \right) \right].$$

Аналогично для частной производной по σ :

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi}{d\sigma} &= \frac{1}{2} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp \left[-\frac{(h - h_0)^2}{2\sigma^2} \right] \left(-\frac{h - h_0}{\sqrt{2}\sigma^2} \right) + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp \left(-\frac{h_0^2}{2\sigma^2} \right) \left(-\frac{h_0}{\sqrt{2}\sigma^2} \right). \end{aligned} \quad (17)$$

После незначительного упрощения имеем

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi}{d\sigma}(h) &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^2} \left[h_0 \exp \left(-\frac{h_0^2}{2\sigma^2} \right) + \right. \\ &+ (h - h_0) \exp \left(-\frac{(h - h_0)^2}{2\sigma^2} \right) \left. \right]. \end{aligned} \quad (18)$$

Формулы (13), (16) и (18) в совокупности содержат всю необходимую информацию для применения метода. В качестве начального набора параметров для оптимизации использовались данные из табл. 1: для низкоширотных макроспикул $h_0 = 22.3$ и $\sigma = 4.2$ тыс. км; для высокоширотных макроспикул $h_0 = 27.9$ и $\sigma = 5.7$ тыс. км.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бекерз (J.M. Beckers), Solar Phys. **3**, 367 (1968).
2. Бекерз (J.M. Beckers), Ann. Rev. Astron. Astrophys. **10**, 73 (1972).
3. Беннет, Эрдели (S.M. Bennett and R. Erdélyi), Astrophys. J. **808**, 135 (2015).
4. Богачёв и др. (S.A. Bogachev, A.S. Ulyanov, A.S. Kirichenko, I.P. Loboda, and A.A. Reva), Phys. Usp. **63**, 783 (2020).
5. Бохлин и др. (J.D. Bohlin, S.N. Vogel, J.D. Purcell, N.R. Sheeley, Jr., R. Tousey, and M.E. Vanhoosier), Astrophys. J. Lett. **197**, L133 (1975).
6. Дере и др. (K.P. Dere, J.-D.F. Bartoe, G.E. Brueckner, J.W. Cook, and D.G. Socker), Solar Phys. **119**, 55 (1989).
7. Жанг и др. (J. Zhang, J. Wang, C.-Y. Lee, and H. Wang), Solar Phys. **194**, 59 (2000).
8. Кириченко, Богачёв (A.S. Kirichenko and S.A. Bogachev), Solar Phys. **292**, 1 (2017a).
9. Кириченко, Богачёв (A.S. Kirichenko, and S.A. Bogachev), Astrophys. J. Lett. **840**, 45 (2017b).
10. Кириченко А.С., Богачёв С.А., Письма в Астрон. журн. **39**, 884 (2013) [A.S. Kirichenko and S.A. Bogachev, Astron. Lett. **39**, 797 (2013)].
11. Кисс и др. (T.S. Kiss, N. Gyenge, and R. Erdélyi), Astrophys. J. **835**, 47 (2017).
12. Кисс и др. (T.S. Kiss, N. Gyenge, and R. Erdélyi), Adv. Space Res. **61**(2), 611 (2018).
13. Кушман, Ренс (G.W. Cushman and W.A. Rense), Solar Phys. **58**, 299 (1978).
14. Лобода, Богачёв (I.P. Loboda and S.A. Bogachev), Solar Phys. **290**, 1963 (2015).

15. Лобода, Богачёв (I.P. Loboda and S.A. Bogachev), *Astron. Astrophys.* **597**, 78 (2017).
16. Лобода, Богачёв (I.P. Loboda and S.A. Bogachev), *Astrophys. J.* **871**, 230 (2019).
17. Лусиф (M.L. Loucif), *Astron. Astrophys.* **281**, 95 (1994).
18. Марквардт (D. Marquardt), *SIAM J. Appl. Math.* **11(2)**, 431 (1963).
19. Паренти и др. (S. Parenti, B.J.I. Bromage, and G.E. Bromage), *Astron. Astrophys.* **384**, 303 (2002).
20. Рауафи и др. (N.E. Raouafi, S. Patsourakos, E. Pariat, P.R. Young, A.C. Sterling, A. Savcheva, M. Shimojo, F. Moreno-Insertis, et al.), *Sp. Sci. Rev.* **201**, 1 (2016).
21. Рева и др. (A. Reva, S. Shestov, S. Bogachev, and S. Kuzin), *Solar Phys.* **276**, 97 (2012).
22. Томпсон, Брекке (W.T. Thompson and P. Brekke), *Solar Phys.* **195**, 45 (2000).
23. Уитброу, Нойз (G.L. Withbroe and R.W. Noyes), *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* **15**, 363 (1977).
24. Уитброу и др. (G.L. Withbroe, D.T. Jaffe, P.V. Foukal, M.C.E. Huber, R.W. Noyes, E.M. Reeves, E.J. Schmahl, J.G. Timothy, and J.E. Vernazza), *Astrophys. J.* **203**, 528 (1976).
25. Ульянов и др. (A.S. Ulyanov, S.A. Bogachev, I.P. Loboda, A.A. Reva, and A.S. Kirichenko), *Solar Phys.* **294**, 1 (2019a).
26. Ульянов А.С., Богачев С.А., Рева А.А., и др., Письма в Астрон. журн. **45**, 290 (2019) [A.S. Ulyanov, S.A. Bogachev, A.A. Reva, A.S. Kirichenko, and I.P. Loboda, *Astron. Lett.* **45**, 248 (2019b)].
27. Хадсон (H.S. Hudson), *Solar Phys.* **133**, 357 (1991).
28. Херманз, Мартин (L.M. Hermans and S.F. Martin), *NASA Publ. CP 2442*, 369 (1986).
29. Штейн, Лейбахер (R.F. Stein and J. Leibacher), *Annu. Rev. Astron. Astrophys.* **12**, 407 (1974).