

НОВЫЕ ОЦЕНКИ ЧАСТОТЫ СЛИЯНИЯ ПЕРВИЧНЫХ ЧЕРНЫХ ДЫР С УЧЕТОМ КЛАСТЕРИЗУЮЩЕЙСЯ ТЕМНОЙ МАТЕРИИ

© 2022 г. М. В. Ткачѳв^{1*}, С. В. Пилипенко¹

¹Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН, Москва, Россия

Поступила в редакцию 26.08.2022 г.

После доработки 05.10.2022 г.; принята к публикации 05.10.2022 г.

Проводится численная оценка частоты слияния первичных черных дыр (ПЧД) с учетом гравитационного взаимодействия ПЧД с кластеризующейся холодной темной материей (ТМ). Масса и начальное расстояние имеют значения, подходящие для задачи объяснения событий LIGO/Virgo путем слияния двойных ПЧД. Мы уточняем критерий слияния пары черных дыр при условии формирования гало ТМ вокруг каждой из них, и применяем этот критерий к серии численных расчетов эволюции Вселенной, заполненной как ПЧД, так и темной материей. В результате мы показываем, что учет кластеризации ТМ увеличивает частоту слияния примерно в 10 раз по сравнению со стандартной оценкой для малой доли ПЧД в составе ТМ. Это, в свою очередь, означает, что массовая доля ПЧД $f_{\text{РВН}}$ может быть меньше, чем предполагалось ранее, и может составлять не более 10^{-4} от полной массы ТМ.

Ключевые слова: первичные черные дыры, гравитационные волны, темная материя.

DOI: 10.31857/S0320010822100047

ВВЕДЕНИЕ

Первичные черные дыры (ПЧД), впервые предложенные Я.Б. Зельдовичем и И.Д. Новиковым (Зельдович, Новиков, 1966), вызывают интерес уже почти 50 лет, несмотря на то что в их пользу до сих пор нет доказательств. ПЧД могли образоваться на ранних стадиях эволюции Вселенной из-за коллапса больших флуктуаций плотности энергии (Хокинг, 1971; Карр, Хокинг, 1974). ПЧД недавно привлекли к себе много внимания в связи с событиями, наблюдаемыми гравитационно-волновыми обсерваториями LIGO и Virgo с помощью усовершенствованного лазерного интерферометра (Эббот и др., 2016а–в, 2017а–в, 2020)¹.

Хотя в настоящее время гипотеза о существовании ПЧД пока не доказана и не опровергнута, сами наблюдательные ограничения на их распространенность представляют собой мощный и уникальный метод исследования ранней Вселенной на малых масштабах, недоступных для изучения

другими методами (Карр и др., 2016, 2017; Сасаки и др., 2018). Наиболее важные потенциальные ограничения на содержание ПЧД в диапазоне масс $10\text{--}30 M_{\odot}$ могут быть получены из наблюдений LIGO при допущении, что наблюдаемые события связаны со слиянием пар первичных черных дыр. Несмотря на то что некоторые из событий LIGO/Virgo (Эббот и др., 2019) теперь считаются имеющими астрофизическое происхождение (Нитц и др., 2019), происхождение некоторых других событий вполне может оказаться связанным с ПЧД (Эббот и др., 2020). С другой стороны, если бы ПЧД составляли значительную часть темной материи (ТМ), то скорость их слияния создала бы фон гравитационных волн (ГВ), который был бы намного больше, чем тот, который в настоящее время наблюдается LIGO/Virgo (Вонг и др., 2016; Райдал и др., 2017; Али-Хаймуд, 2018). Также иначе бы проявлялись и другие эффекты, например, связанные с гравитационным линзированием сверхновых (Сумалакарреги, Сельжак, 2018; Гарсия-Беллидо и др., 2017).

Возможность того, что ПЧД могут составлять значительную долю ТМ во Вселенной², уже срав-

²и, соответственно, регистрироваться LIGO/Virgo

* Электронный адрес: mtkachev@asc.rssi.ru

¹Открытые оповещения коллаборации LIGO/Virgo по результатам наблюдательной сессии O3/2019 можно найти по адресу <https://gracedb.ligo.org/superevents/public/O3/>

нительно давно обсуждается в литературе (см., например, Хокинг, 1971; Иванов и др., 1994; Сасаки и др., 2016; Лэки, Бикэм, 2010; Белоцкий и др., 2014; Кашлинский, 2016; Клессе, Гарсия-Беллидо, 2017, 2018; Эспиноза и др., 2018). В работе Ткачёва и др. (2020) и в настоящей работе в качестве возможного объяснения событий излучения гравитационных волн, обнаруженных обсерваторией LIGO/Virgo, мы рассмотрели ПЧД с массами порядка $30 M_{\odot}$. Используя серию космологических симуляций N-тел, включающих в себя как темную материю, так и переменную долю ТМ, состоящей из ПЧД в диапазоне от $f_{\text{РВН}} = 10^{-4}$ до $f_{\text{РВН}} = 1.0$, мы анализировали процессы образования и разрушения гравитационно-связанных пар ПЧД, а также слияние как связанных, так и несвязанных пар, и оценивали вероятности таких событий. В итоге в работе Ткачёва и др. (2020) мы показали, что наши оценки хорошо согласуются с ограничениями на содержание ПЧД, полученными LIGO/Virgo и другими исследовательскими группами. В отличие от предыдущих работ, в Ткачёв и др. (2020) мы учитывали взаимодействие пар ПЧД с другими ПЧД, что привело к ускоренному разрушению пар при высоких долях ПЧД в темной материи (≥ 0.1). Однако в работе Ткачёва и др. (2020) при исследовании эволюции пар ПЧД мы не учитывали динамических эффектов “обычной” ТМ в образовании, разрушении и слиянии пар ПЧД.

С другой стороны, в работе Пилипенко и др. (2022) с использованием численных и полуаналитических средств мы рассмотрели проблему формирования пары ПЧД и эволюции ее орбитальных параметров вследствие ее гравитационного взаимодействия с кластеризующейся холодной ТМ. Мы оценили скорость слияния двойных ПЧД за счет излучения гравитационных волн в настоящее время как в стандартном случае пренебрежения эффектами, связанными с кластеризацией, так и в случае, когда они учитываются, и показали, что эти эффекты могут увеличивать частоту слияния не менее чем в 6–8 раз по сравнению со стандартной оценкой. Это, в свою очередь, означает, что массовая доля $f_{\text{РВН}}$ должна быть меньше, чем предполагалось ранее. Однако в Пилипенко и др. (2022) рассматривались только изолированные пары ПЧД, а взаимодействие с другими ПЧД никак не учитывалось. Поэтому в данной работе мы решили проверить это утверждение, применив новый критерий слияния пар ПЧД, полученный на основе наших выводов из работы Пилипенко и др. (2022), к нашим численным моделям из работы Ткачёва и др. (2020) (где такое взаимодействие учитывается).

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЙ КРИТЕРИЙ СЛИЯНИЯ ПАР ПЧД

В работе Ткачёва и др. (2020) мы представили численную модель, описывающую эволюцию ПЧД с массами $\sim 30 M_{\odot}$, начиная с радиационно-доминированной стадии Вселенной (начальное значение красного смещения было принято $z \approx 10^5$) вплоть до красных смещений $z \approx 3.0$. Мы выполнили серию численных расчетов с космологическими моделями N-тел (*n-body*) для темной материи, используя модифицированную версию космологического кода GADGET-2 (Шпрингель, 2005). Число частиц в расчетах в зависимости от фракции ПЧД в ТМ варьировалось от 10^4 до 10^6 (от $f_{\text{РВН}} = 1.0$ до $f_{\text{РВН}} = 10^{-4}$ соответственно), а масса одной частицы составляла $30 M_{\odot}$.

В работах Дежак и др. (2018), Баллестерос и др. (2018), Али-Хаймуд (2018) из общих принципов было показано, что на момент формирования ПЧД не должны образовываться плотные кластеры (по крайней мере, если ПЧД формируются в результате коллапса гауссовых флуктуаций плотности порядка размера горизонта, а не в результате каких-либо более экзотических механизмов, Белоцкий и др., 2019) и что на малых масштабах пространственное распределение ПЧД должно соответствовать пуассоновскому. По этой причине, а также из предположения, что для таких больших значений красного смещения и столь малых масштабов космологические возмущения плотности должны быть невелики, мы задали начальные координаты частиц из пуассоновского распределения, а их начальные peculiar скорости положили равными нулю.

Процессы слияния ПЧД исследовались путем оценки скорости потери ими энергии из-за излучения гравитационных волн на протяжении полного времени жизни пары. Критерий слияния определялся как

$$\sum_{i=1}^n T |\dot{E}| \geq \frac{GM^2}{2|a|}, \quad (1)$$

где T — текущий орбитальный период пары, a — большая полуось пары ($a < 0$ для гиперболической орбиты), а суммирование выполняется по периодам обращения пары (где n — полное число периодов обращения за все время существования данной пары)³. Скорость потери энергии \dot{E} из-за излучения грав. волн оценивалась как

$$\dot{E} = \frac{64G^4 M^5}{5c^5 a^5} g(e). \quad (2)$$

³При этом предполагается, что за время эволюции пары ПЧД можно пренебречь изменением масс черных дыр и потерями их энергии за счет взаимодействия с первичной плазмой и частицами темной материи в плазме.

Здесь

$$g(e) = \begin{cases} \frac{24 \cos^{-1}(-\frac{1}{e}) \left(1 + \frac{73}{24}e^2 + \frac{37}{96}e^4\right) + (e^2 - 1)^{1/2} \left(\frac{301}{6} + \frac{673}{12}e^2\right)}{(e^2 - 1)^{7/2}}, & e \geq 1, \\ \frac{24\pi}{(1 - e^2)^{7/2}} \left(1 + \frac{73}{24}e^2 + \frac{37}{96}e^4\right), & e < 1, \end{cases} \quad (3)$$

где e — эксцентриситет пары, G — гравитационная постоянная, а c — скорость света в вакууме (Питерс, Мэтьюс, 1963; Тёрнер, 1977). Также важно отметить, что при таком критерии слияния под “парой” не обязательно подразумевается *гравитационно-связанная* пара (как следует из (3)). ПЧД могут сливаться и при пролетах по гиперболической траектории (см., например, Гарсия-Беллидо, Нессерис, 2017), а в таком контексте “пара” — это любые две первичные черные дыры, являющиеся кандидатами на слияние друг с другом. Такое же определение применимо и к данной работе.

В модели из работы Ткачёва и др. (2020) в виде отдельных частиц была представлена только темная материя, состоящая из ПЧД, тогда как “обычная” темная материя была представлена как невозмущенная однородная среда. С другой стороны, в работе Пилипенко и др. (2022) мы выполнили серию численных расчетов с отдельными парами ПЧД, в которых “обычная” темная материя уже присутствовала в виде отдельных частиц. В такой модели вокруг каждой из ПЧД начинают формироваться гало из ТМ, которые затем сталкиваются и образуют единое целое. Когда гало ТМ вокруг ПЧД сближается с соседним гало вокруг ПЧД, это приводит к потере углового момента и полной энергии пары ПЧД, заставляя сливаться пары, которые не слились бы без темного гало. Очевидно, что в таком случае критерий слияния пары ПЧД будет уже отличаться от критерия (1) и зависеть в основном от радиусов гало ТМ, которые успели сформироваться вокруг ПЧД до этого момента. При этом закон роста радиуса и массы гало вокруг одиночной ПЧД в расширяющейся Вселенной был неоднократно получен в аналитических и численных расчетах (см., например, Готт, 1975). Масса и радиус растут по степенному закону и зависят только от масштабного фактора и массы ПЧД. Для ответа на вопрос о частоте слияния ПЧД в присутствии темной материи необходимо выяснить, при каких параметрах системы из двух ПЧД, окруженных гало, ПЧД неминуемо сольются. В

данной статье мы выяснили это с помощью серии специальных численных расчетов.

Мы выполнили ряд численных расчетов, аналогичных проведенным нами в работе Пилипенко и др. (2022) (см. табл. 1 из Пилипенко и др., 2022) с помощью N-body кода **ph4**, входящего в пакет **Amuse** (Портеги Цварт и др., 2009; Ван Эльтерен и др., 2014). Отличие заключалось в большем количестве расчетов (около 300) с меньшим количеством частиц ($N = 5000$, где масса частиц ПЧД $M = 30 M_{\odot}$, а масса частиц “обычной” ТМ — $m \approx 0.15 M_{\odot}$), а также в переменных начальных орбитальных параметрах пары ПЧД. Начальное значение эксцентриситета пары ПЧД e_0 в расчетах варьировалось от 0.8 до 3, а начальное удаление d_0 — от $1.5\bar{R}$ до $2.5\bar{R}$, где по аналогии с Пилипенко и др. (2022) $\bar{R} = \sqrt[3]{3M/(4\pi\rho_{\text{eq}}f_{\text{РВН}})}$ — среднее расстояние между ПЧД в эпоху равновесия плотности энергии излучения и материи ($t_{\text{eq}} \approx 70\,000 - 80\,000$ лет).

Затем для каждого численного расчета строились зависимости расстояния между ПЧД d , а также радиусов гало ТМ вокруг ПЧД от масштабного фактора s (где $s = 1$ в момент $t = t_{\text{eq}}$). Радиус гало ТМ определялся как “радиус останковки” r_{ta} (по аналогии с Пилипенко и др., 2022), т.е. такой радиус, на котором средняя радиальная скорость частиц внутри тонкого сферического слоя равна нулю. В данной работе этот радиус определялся численно, а затем интерполировался кривой $r_{\text{ta}} \sim s^{4/3}$ (Готт, 1975).

Во всех наших расчетах, где наблюдается слияние пары ПЧД, прослеживается одна и та же картина: пары сливаются при первом же прохождении перигентра благодаря наличию гало ТМ около каждой из ПЧД (как, например, на рис. 1). Это значительным образом отличается от того, что мы наблюдали в работе Ткачёва и др. (2020), где пары могли существовать на протяжении десятков и даже сотен периодов обращения, прежде чем слиться. Поэтому мы считаем уместным в качестве критерия слияния ПЧД использовать отношение расстояния между ПЧД d к радиусу гало ТМ r_{ta} :

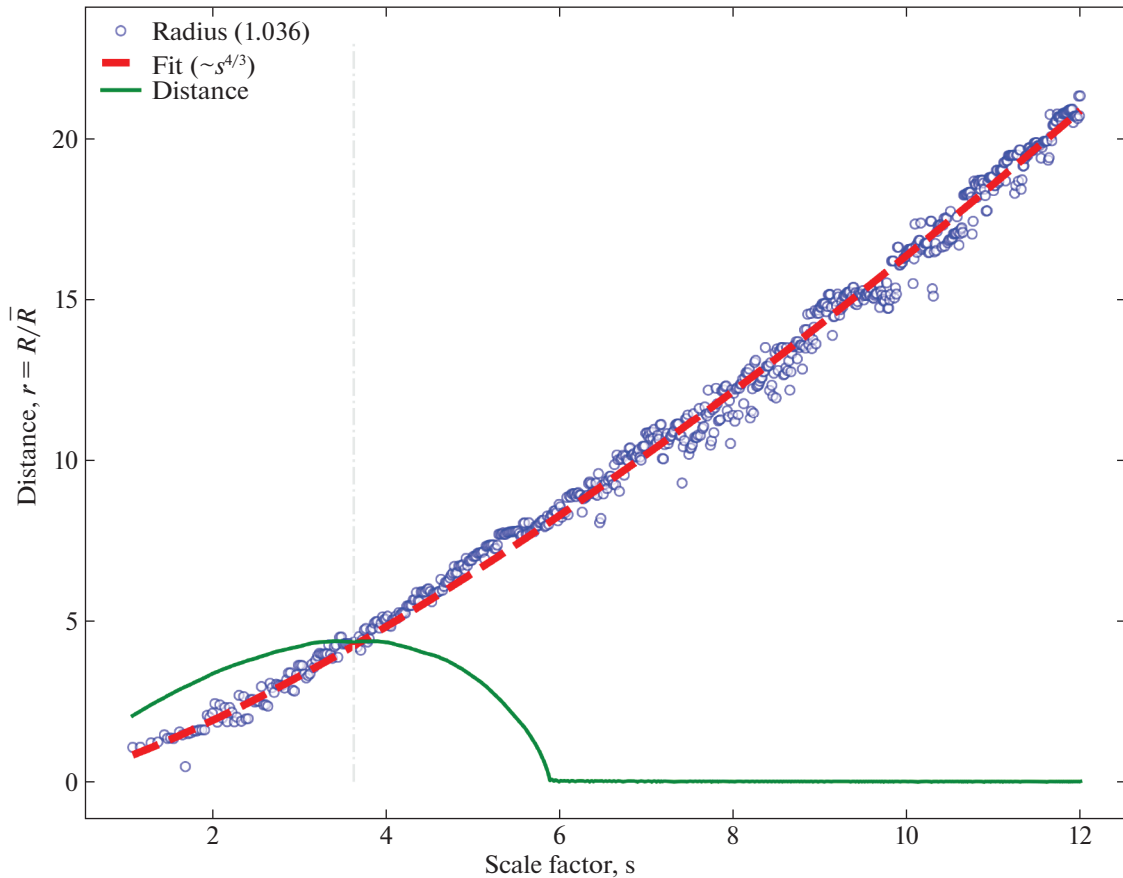


Рис. 1. Расстояние между ПЧД (зеленая сплошная линия); радиус каждого из гало, найденный численно (синие пустые кружки); кривая $r_{ta} \sim s^{4/3}$ в зависимости от масштабного фактора s (красная штриховая линия). Серой штрихпунктирной линией изображен момент слияния двух гало. Начальное значение эксцентриситета пары ПЧД соответствует $e_0 = 1.03$, а начальное удаление $d_0 = 1.5$.

$\chi = d/r_{ta}$. На рис. 1 момент начала слияния двух гало изображен серой штрихпунктирной линией и соответствует значению $\chi = 1.036$.

Затем мы убедились, что критерий слияния⁴ гало ТМ (и, следовательно, пары ПЧД) не зависит ни от фракции ПЧД $f_{РВН}$, ни от абсолютного радиуса гало, ни от орбитальных характеристик пары. Также мы убедились, что результат не зависит от числа частиц в численных расчетах, для чего мы выполнили несколько десятков расчетов с $N = 500$ и массой частицы “обычной” ТМ $m \approx 1.5 M_{\odot}$. На рис. 2 представлено распределение критериев слияния для всех наших расчетов для пары ПЧД, окруженной частицами ТМ. Как видно, абсолютное большинство пар сливается при $\chi \approx 1$, т.е. расстояние между ПЧД в этот момент

примерно равно радиусу гало ТМ вокруг них, где радиус гало рассчитывался как $r_{ta} \sim s^{4/3}$.

Таким образом, в качестве нового дополнительного критерия слияния пар ПЧД мы будем использовать медианное значение из распределения, изображенного на рис. 2, которое соответствует значению $\chi = 1.041$. При этом прежний критерий (1) мы будем использовать наравне с новым.

РЕЗУЛЬТАТЫ

Мы повторили весь анализ, проведенный в работе Ткачёва и др. (2020), с учетом нового критерия слияния. Как и раньше, слияния учитываются не во время расчета, а при постобработке данных численного моделирования⁵. Результаты для частоты

⁴Под “слиянием” подразумевается, что две ПЧД сливаются в одну с выделением грав. волн. При этом мы считаем, что после выполнения критерия из формулы (1) пара сливается за пренебрежимо малое время (см. Ли, 1993).

⁵При этом старый критерий из формулы (1) продолжает действовать наравне с новым, а также при постобработке делается проверка на прохождение перигентра компонентами пары ПЧД.

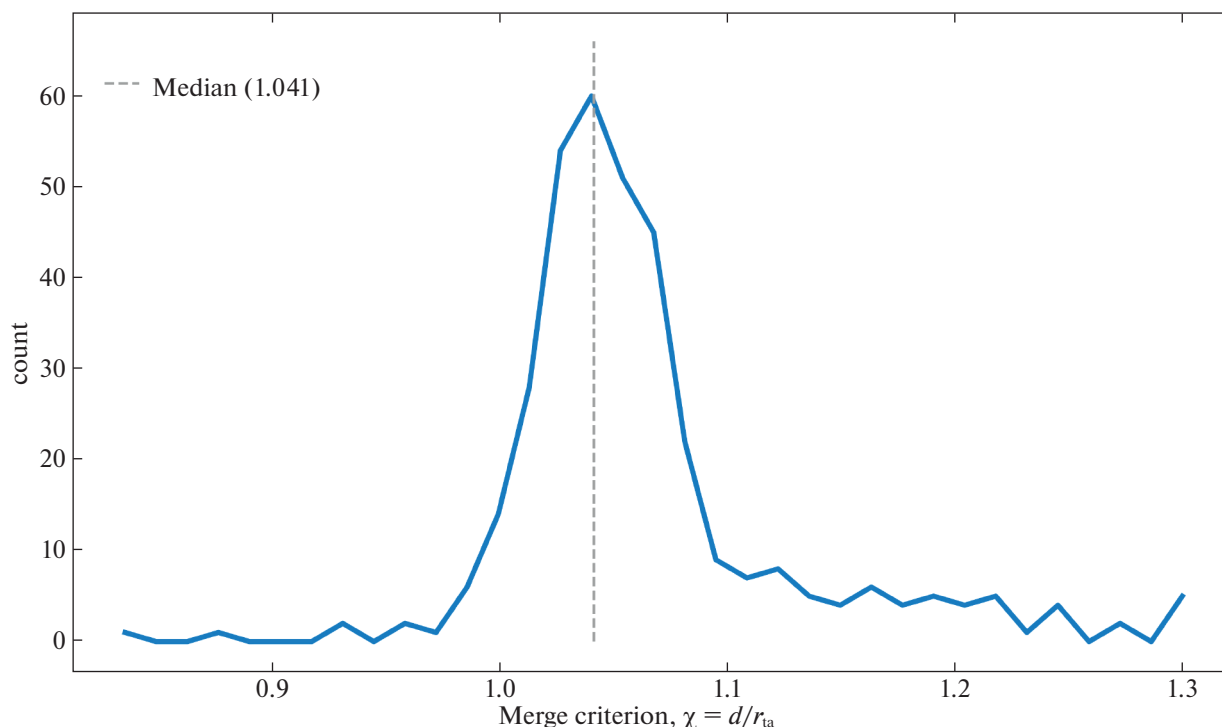


Рис. 2. Распределение значений критерия слияния пар ПЧД. Вертикальной штрихпунктирной линией изображено медианное значение, соответствующее 1.041.

слияния пар ПЧД для различных фракций $f_{\text{РВН}}$ в ранней Вселенной, вплоть до красного смещения $z = 3$ представлены на рис. 3.

Полыми символами (кружки/ромбы/треугольники/шестиугольники) изображена частота слияния, полученная в работе Ткачёва и др. (2020) с использованием критерия слияния (1). Серыми пунктирными линиями изображена экстраполяция этих значений до красного смещения $z = 3$. Крестами ($\lambda/Y/X/+$) изображена частота слияния, полученная в данной работе с учетом дополнительного критерия слияния.

Как видно, учет нового критерия слияния, полученного в данной работе, увеличивает частоту слияния ПЧД минимум на порядок. При этом для фракции $f_{\text{РВН}} = 10^{-3}$ наблюдается частота $r_m \approx 10^4 \text{ Гпк}^{-3}\text{год}^{-1}$, что значительно превышает оценки, полученные коллаборацией LIGO/Virgo (Эббот и др., 2016в) и другими группами (Али-Хаймуд, 2018; Райдал и др., 2019; Али-Хаймуд и др., 2017). В то время как частота слияния $r_m \approx 10^2 \text{ Гпк}^{-3}\text{год}^{-1}$ наблюдается уже для фракции $f_{\text{РВН}} = 10^{-4}$, что примерно соответствует нашему результату из работы Пилипенко и др. (2022).

Для фракции ПЧД $f_{\text{РВН}} = 10^{-2}$ наблюдается еще более существенное повышение частоты сли-

яний: на 3 порядка по сравнению с критерием, не учитывающим кластеризацию ТМ. Для фракции $f_{\text{РВН}} = 10^{-1}$ различие частоты слияний между двумя критериями вновь начинает снижаться. Сказывается то, что ПЧД оказываются изначально ближе друг к другу, и гало не успевают сильно вырасти до момента слияния. Однако для этой фракции частота событий оказывается все равно слишком высокой по сравнению с наблюдаемой.

ВЫВОДЫ

В работе описываются результаты по численной оценке скорости слияния пар ПЧД с учетом аккреции “обычной” темной материи в гало вокруг ПЧД.

В одной из наших предыдущих работ Ткачёва и др. (2020) мы представили численную модель, описывающую эволюцию ПЧД с массами $\sim 30 M_{\odot}$, где в качестве критерия слияния ПЧД использовалось соотношение полной энергии пары ПЧД и скорости потери энергии пары за счет излучения гравитационных волн. При этом взаимодействие пар ПЧД с “обычной” темной материей (ТМ) в этой модели не учитывалось.

С другой стороны, если рассмотреть модель, где ПЧД окружены частицами ТМ (как мы сделали это в работе Пилипенко и др., 2022), то выясняется, что

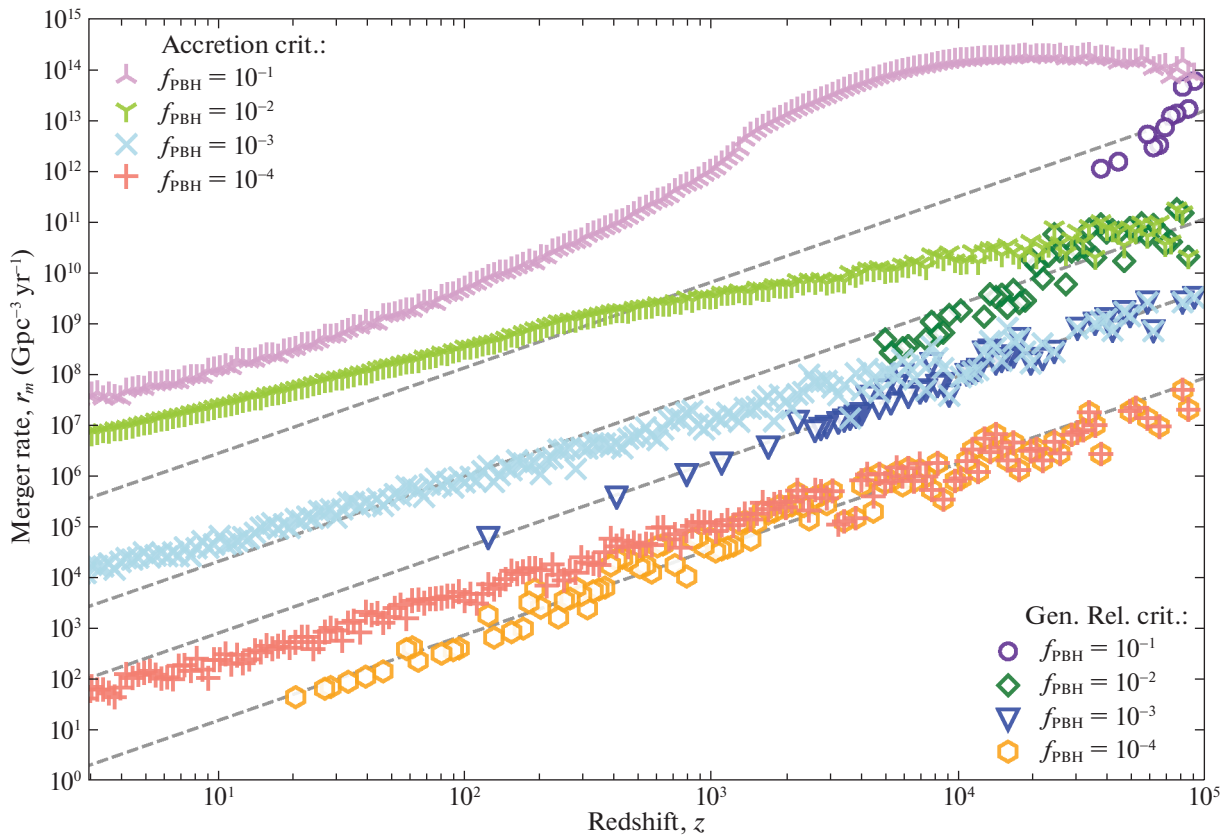


Рис. 3. Скорость слияния пар ПЧД, r_m , как функция красного смещения z . Полыми символами (см. легенду в нижнем правом углу) изображена частота слияния r_m в зависимости от красного смещения z , полученная в работе Ткачёва и др. (2020). Светлосерыми прямыми линиями представлены экстраполированные значения для разных фракций ПЧД f_{PBH} . Крестами (см. легенду в верхнем левом углу) изображена частота слияния, полученная в данной работе.

частицы ТМ начинают формировать гало вокруг каждой из ПЧД, причем радиус гало растет по известному степенному закону. Когда такие гало ТМ сближаются, это приводит к потере углового момента и полной энергии пары ПЧД, что заставляет сливаться компоненты пары. Иными словами, наличие гало вокруг ПЧД значительным образом смягчает критерий слияния пар ПЧД, тем самым повышая частоту слияния.

В настоящей работе мы вычисляем этот новый критерий слияния, анализируя большое количество численных расчетов, подобным тем, что мы проводили в работе Пилипенко и др. (2022). Затем мы применяем новый критерий вместе со старым к нашим расчетам из работы Ткачёва и др. (2020) и получаем оценки частоты слияния пар ПЧД за счет излучения гравитационных волн как в стандартном случае, когда пренебрегают эффектами, связанными с кластеризацией, так и в случае, когда они учитываются. Мы показываем, что учет этих эффектов может увеличивать частоту слияния примерно в 10 раз для фракции $f_{\text{PBH}} = 10^{-4}$ по сравнению

со стандартной оценкой, тогда как для фракций $f_{\text{PBH}} \geq 10^{-2}$ различие составляет уже несколько порядков.

Авторы выражают огромную благодарность П.Б. Иванову за плодотворные дискуссии и ценные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Али-Хаймуд (Y. Ali-Haïmoud), Phys. Rev. Lett. **121**, 081304 (2018).
2. Али-Хаймуд (Y. Ali-Haïmoud, E.D. Kovetz, and M. Kamionkowski), Phys. Rev. D **96**, 123523 (2017).
3. Баллестерос (G. Ballesteros, P.D. Serpico, and M. Taoso), J. Cosmol. Astropart. Phys. **2018**, 043 (2018).
4. Белоцкий и др. (K.M. Belotsky, A.E. Dmitriev, E.A. Esipova, V.A. Gani, A.V. Grobov, M.Yu. Khlopov, A.A. Kirillov, S.G. Rubin, and I.V. Svadkovsky), Mod. Phys. Lett. A **29**, 1440005 (2014).

5. Белоцкий и др. (K.M. Belotsky, V.I. Dokuchaev, Yu.N. Eroshenko, E.A. Esipova, M.Yu. Khlopov, L.A. Khromykh, A.A. Kirillov, V.V. Nikulin, S.G. Rubin, and I.V. Svadkovsky), *Europ. Phys. J. C* **79**, 1434 (2019).
6. Вонг и др. (Sai Wang, Yi-Fan Wang, Qing-Guo Huang and Tjonnie G.F. Li), arXiv:1610.08725 (2016).
7. Гарсия-Беллидо, Нессерис (J. Garcia-Bellido and S. Nesseris), *Phys. Dark Univer.* **18**, 123 (2017).
8. Гарсия-Беллидо и др. (J. Garcia-Bellido, S. Clesse, and P. Fleury), arXiv:1712.06574 (2017).
9. Готт (J. Richard, III Gott), *Astrophys. J.* **201**, 296 (1975).
10. Дежак и др. (V. Desjacques and A. Riotto), *Phys. Rev. D* **98**, 2470 (2018).
11. Зельдович Я.Б., Новиков И.Д., *Астрон. журн.* **43**, 758 (1966).
12. Иванов и др. (P. Ivanov, P. Naselsky, and I. Novikov), *Phys. Rev. D* **50**, 7173 (1994).
13. Карр, Хокинг (B.J. Carr and S.W. Hawking), *MNRAS* **168**, 399 (1974).
14. Карр и др. (B. Carr, F. Kühnel, and M. Sandstad), *Phys. Rev. D* **94**, 083504 (2016).
15. Карр и др. (B. Carr, M. Raidal, T. Tenkanen, V. Vaskonen, and H. Veermäe), *Phys. Rev. D* **96**, 023514 (2017).
16. Кашлинский (A. Kashlinsky), *Astrophys. J.* **823**, L25 (2016).
17. Клессе, Гарсия-Беллидо (S. Clesse and J. Garcia-Bellido), *Phys. Dark Univer.* **15**, 142 (2017).
18. Клессе, Гарсия-Беллидо (S. Clesse and J. Garcia-Bellido), *Phys. Dark Univer.* **22**, 137 (2018).
19. Ли (Lee), *Astrophys. J.* **418**, L147 (1993).
20. Лэки, Бикэм (B.C. Lacki and J.F. Beacom), *Astrophys. J.* **720**, L67 (2010).
21. Нитц и др. (A.H. Nitz, C. Capano, A.B. Nielsen, S. Reyes, R. White, D.A. Brown, and B. Krishnan), *Astrophys. J.* **872**, 195 (2019).
22. Пилипенко и др. (S. Pilipenko, M. Tkachev, and P. Ivanov), *Phys. Rev. D* **105** (2022).
23. Питерс, Мэтьюс (P.C. Peters and J. Mathews), *Phys. Rev.* **131**, 435 (1963).
24. Портеги Цварт и др. (S. Portegies Zwart, S. McMillan, S. Harfst, D. Groen, M. Fujii, B.Ó. Nualláin, E. Glebbeek, D. Hoggie, et al.), *New Astron.* **14**, 369 (2009).
25. Райдал и др. (M. Raidal, V. Vaskonen, and H. Veermäe), *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **2017**, 037 (2017).
26. Райдал и др. (M. Raidal, Ch. Spethmann, V. Vaskonen, and H. Veermäe), *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **2019**, 018 (2019).
27. Сасаки и др. (M. Sasaki, T. Suyama, T. Tanaka, and Sh. Yokoyama), *Phys. Rev. Lett.* **117**, 061101 (2016).
28. Сасаки и др. (M. Sasaki, T. Suyama, T. Tanaka, and Sh. Yokoyama), *Classic. and Quant. Grav.* **35**, 063001 (2018).
29. Сумалакарреги, Сельжак (M. Zumalacarregui and U. Seljak), *Phys. Rev. Lett.* **121**, 141101 (2018).
30. Ткачѳв и др. (M.V. Tkachev, S.V. Pilipenko, and G. Yepes), *MNRAS* **499**, 4854 (2020).
31. Тёрнер (M. Turner), *Astrophys. J.* **216**, 610 (1977).
32. Хокинг (S. Hawkingphen), *MNRAS* **152**, 75 (1971).
33. Шпрингель (V. Springel), *MNRAS* **364**, 1105 (2005).
34. Эббот и др. (B.P. Abbott, R. Abbott, T.D. Abbott, M.R. Abernathy, F. Acernese, K. Ackley, C. Adams, T. Adams, et al.), *Phys. Rev. Lett.* **116**, 061102 (2016a).
35. Эббот и др. (B.P. Abbott, R. Abbott, T.D. Abbott, M.R. Abernathy, F. Acernese, K. Ackley, C. Adams, T. Adams, et al.), *Phys. Rev. Lett.* **116**, 241103 (2016b).
36. Эббот и др. (B.P. Abbott, R. Abbott, T.D. Abbott, M.R. Abernathy, F. Acernese, K. Ackley, C. Adams, T. Adams, et al.), *Phys. Rev. Lett.* **818**, L22 (2016в).
37. Эббот и др. (B.P. Abbott, R. Abbott, T.D. Abbott, F. Acernese, K. Ackley, C. Adams, T. Adams, P. Addesso, et al.), *Phys. Rev. Lett.* **118**, 221101 (2017a).
38. Эббот и др. (B.P. Abbott, R. Abbott, T.D. Abbott, F. Acernese, K. Ackley, C. Adams, T. Adams, P. Addesso, et al.), *Phys. Rev. Lett.* **119**, 141101 (2017б).
39. Эббот и др. (B.P. Abbott, R. Abbott, T.D. Abbott, F. Acernese, K. Ackley, C. Adams, T. Adams, P. Addesso, et al.), *Astrophys. J.* **851**, L35 (2017в).
40. Эббот и др. (B.P. Abbott, R. Abbott, T.D. Abbott, M.R. Abernathy, F. Acernese, K. Ackley, C. Adams, T. Adams, et al.), *Astrophys. J.* **900**, L13 (2020).
41. Эббот и др. (B.P. Abbott, R. Abbott, T.D. Abbott, M.R. Abernathy, F. Acernese, K. Ackley, C. Adams, T. Adams, et al.), *Phys. Rev. X* **9**, 031040 (2019).
42. ван Эльтерен и др. (A. van Elteren, I. Pelupessy, and S.P. Zwart), *New Astron.* **372**, 20130385 (2014).
43. Эспиноза и др. (J.R. Espinosa, D. Racco, and A. Riotto), *Phys. Rev. Lett.* **120**, 121301 (2018).