ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ХОРИ–ДЕПРИ К ИССЛЕДОВАНИЮ КОСМОГОНИЧЕСКОЙ ЭВОЛЮЦИИ СЛАБОВОЗМУЩЕННЫХ ПЛАНЕТНЫХ СИСТЕМ

Д. В. Микрюков[1*], И. А. Баляев[1]

[1]*Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия*
Поступила в редакцию 09.02.2022 г.
После доработки 09.02.2022 г.; принята к публикации 02.03.2022 г.

Методом осреднения Хори–Деприизучается динамическая эволюция нерезонансных двухпланетных систем, структура которых близка к круговой и компланарной. Используются астроцентрические координаты Пуанкаре и комплексная форма второй системы канонических элементов Пуанкаре. Осреднение уравнений выполнено до второго порядка по планетным массам. Осредненная система проинтегрирована на примере одной модельной двухпланетной системы и на примере реальной двухпланетной системы HD 12661. Выполнено сравнение построенного решения с решением осредненной системы первого приближения, а также с решением точных уравнений движения в прямоугольных координатах. В случае обеих планетных систем показано, что второе приближение лучше согласуется с решением точных уравнений. Период колебаний эксцентриситетов в системе HD 12661, согласно точным уравнениям, уравнениям второго приближения и уравнениям первого приближения, равен соответственно 26 175, 26 309 лет и 26 391 год.

Ключевые слова: планетная задача, долговременная орбитальная эволюция, экзопланеты, HD 12661, метод осреднения, метод Хори–Депри, координаты Пуанкаре, канонические элементы Пуанкаре, возмущающая функция, гамильтониан, ряды Пуассона, коэффициенты Лапласа, численное интегрирование.

DOI: 10.31857/S0320010822030044

ВВЕДЕНИЕ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В настоящей работе мы продолжаем изучать долговременную динамическую эволюцию планетных систем типа Солнечной с помощью численно-аналитических методов, основанных на методе осреднения. В нашей предыдущей статье (Микрюков, 2020), посвященной этой теме, мы рассматривали орбитальную эволюцию нерезонансных планетных систем в рамках теории первого порядка по планетным массам. Здесь мы перейдем к изучению эволюции нерезонансных систем, определяемой теорией второго порядка. В первой работе (Микрюков, 2020) подробно описана общая методика исследования, определены координаты Пуанкаре и используемые оскулирующие элементы, представлено разложение функции Гамильтона в ряд Пуассона по всем элементам, на примерах двухпланетных и трехпланетных систем проинтегрирована осредненная система первого приближения.

*Электронный адрес: d.mikryukov@spbu.ru

Осреднение уравнений в оскулирующих элементах мы выполняем методом Хори–Депри (Депри, 1969; Джакалья, 1979; Маркеев, 1978; Морбиделли, 2014; Найфе, 1976; Холшевников, 1985; Хори, 1966). Основной аналитический аппарат, с помощью которого строятся интегрируемые нами осредненные уравнения, разработан и описан в работах Д.В. Микрюкова в 2016, 2018, 2021 гг. в настоящем журнале. Для кеплеровых элементов используем прежние обозначения: a, e, i, M, g, Ω — это соответственно большая полуось, эксцентриситет, наклонение, средняя аномалия, аргумент перицентра и долгота восходящего узла. Чертой сверху обозначается комплексное сопряжение. Для любого комплексного φ положим $\operatorname{Exp}\varphi = \exp \mathrm{i}\varphi$, где i — мнимая единица. Основными единицами измерения в работе являются масса Солнца, астрономическая единица и сидерический земной год; гравитационная постоянная $\mathcal{G} = 4\pi^2$.

В следующем разделе рассматриваются основные практические аспекты построения осредненных уравнений второго приближения. Далее мы выполняем интегрирование этих уравнений на примерах двух двухпланетных систем и сравниваем полученные результаты с решением системы первого приближения, а также с решением точных уравнений в прямоугольных координатах. В заключение статьи обсуждаются результаты.

Перед записью и исследованием уравнений второго приближения изложим коротко опорные теоретические результаты предыдущей работы (Микрюков, 2020). В абсолютной инерциальной системе отсчета с началом в точке O рассматривается движение $N+1$ материальных точек $\mathcal{Q}_0$, $\ldots$, $\mathcal{Q}_N$, имеющих массы соответственно $\mathcal{M}_0$, $\ldots$, $\mathcal{M}_N$. Предполагается, что $N \geqslant 2$ и что расстояние между двумя любыми точками всегда остается больше некоторого положительного числа (бесстолкновительное конфигурационное пространство). Исключение центра инерции осуществляется путем перехода в систему координат Пуанкаре по формулам

$$\mathbf{r}_0 = \frac{1}{\widetilde{\mathcal{M}}}\sum_{k=0}^{N}\mathcal{M}_k\boldsymbol{\rho}_k, \quad \mathbf{P}_0 = \sum_{k=0}^{N}\mathbf{\Pi}_k, \tag{1}$$

$$\mathbf{r}_j = \boldsymbol{\rho}_j - \boldsymbol{\rho}_0, \quad \mathbf{P}_j = \mathbf{\Pi}_j - \frac{\mathcal{M}_j}{\widetilde{\mathcal{M}}}\sum_{k=0}^{N}\mathbf{\Pi}_k,$$
$$1 \leqslant j \leqslant N.$$

Здесь $\widetilde{\mathcal{M}} = \sum_{k=0}^{N}\mathcal{M}_k$, $\mathbf{\Pi}_s = \mathcal{M}_s\dot{\boldsymbol{\rho}}_s$, а векторы $\boldsymbol{\rho}_s$ задают положение точек относительно начала O. Определим малый параметр

$$\mu = \max_{1\leqslant s\leqslant N}\frac{\mathcal{M}_s}{\mathcal{M}_0},$$

представляющий собой отношение массы самой массивной из “планет” $\mathcal{Q}_1, \ldots, \mathcal{Q}_N$ к массе “Солнца” $\mathcal{Q}_0$. После замены переменных

$$\mathbf{p}_s = \mathbf{P}_s/\mu, \quad 1 \leqslant s \leqslant N,$$

и введения обозначений $m_0 = \mathcal{M}_0$,

$$m_s = \frac{\mathcal{M}_s}{\mu}, \quad \beta_s = \frac{m_0 m_s}{m_0 + \mu m_s},$$
$$\varkappa_s^2 = \mathcal{G}(m_0 + \mu m_s) \quad (\varkappa_s > 0), \quad 1 \leqslant s \leqslant N,$$

гамильтониан h записывается в виде суммы невозмущенной и малой возмущающей частей:

$$h = h_0 + \mu h_1, \tag{2}$$

где

$$h_0 = \sum_{s=1}^{N} h_{0s}, \quad h_{0s} = \frac{\mathbf{p}_s^2}{2\beta_s} - \frac{\varkappa_s^2\beta_s}{r_s}, \tag{3}$$

$$r_s = |\mathbf{r}_s|, \quad h_1 = \sum_{1\leqslant j<k\leqslant N}\left(-\frac{\mathcal{G}m_j m_k}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k|} + \frac{\mathbf{p}_j\mathbf{p}_k}{m_0}\right).$$

При $h = h_0$ уравнения движения

$$\dot{\mathbf{r}}_s = \frac{\partial h}{\partial \mathbf{p}_s}, \quad \dot{\mathbf{p}}_s = -\frac{\partial h}{\partial \mathbf{r}_s}, \quad 1 \leqslant s \leqslant N, \tag{4}$$

распадаются на N независимых задач одного притягивающего центра:

$$\ddot{\mathbf{r}}_s + \varkappa_s^2\frac{\mathbf{r}_s}{r_s^3} = 0, \quad 1 \leqslant s \leqslant N, \tag{5}$$

каждая из которых порождается гамильтонианом h_{0s} и определяет положение $\mathbf{r}_s$ и скорость $\mathbf{p}_s/\beta_s$ точки массы β_s в ее движении относительно неподвижной точки массы $\mathcal{M}_0 + \mathcal{M}_s$.

Используемой системой оскулирующих элементов является комплексная форма канонических элементов Пуанкаре (Ласкар, Робютель, 1995; Микрюков, Холшевников, 2016)

$$P = X\sqrt{\Lambda/2}, \quad p = -\mathrm{i}\bar{P}, \tag{6}$$
$$Q = Y\sqrt{2\Lambda}, \quad q = -\mathrm{i}\bar{Q},$$
$$\Lambda = \beta\varkappa\sqrt{a}, \quad \lambda = M + g + \Omega.$$

Выражение X, Y через кеплеровы элементы приведено в формуле (7) работы Микрюкова (2020). В формулах (6) все переменные снабжаются одним и тем же индексом s, равным номеру планеты ($1 \leqslant s \leqslant N$); планеты нумеруются в порядке удаления от звезды. Далее во всех случаях, в которых не могут возникнуть недоразумения, мы будем также опускать планетную индексацию. Поскольку кеплерова часть

$$h_0 = -\sum_{s=1}^{N}\frac{\varkappa_s^4\beta_s^3}{2\Lambda_s^2}$$

гамильтониана (2) зависит лишь от аналогов больших полуосей Λ_s, $1 \leqslant s \leqslant N$, уравнения движения в канонических элементах (6) принимают вид

$$\dot{P} = -\mu\frac{\partial h_1}{\partial p}, \quad \dot{p} = \mu\frac{\partial h_1}{\partial P}, \quad \dot{Q} = -\mu\frac{\partial h_1}{\partial q},$$
$$\dot{q} = \mu\frac{\partial h_1}{\partial Q}, \quad \dot{\Lambda} = -\mu\frac{\partial h_1}{\partial \lambda}, \quad \dot{\lambda} = \omega + \mu\frac{\partial h_1}{\partial \Lambda}.$$

Здесь $\omega = \partial h_0/\partial\Lambda = \varkappa^4\beta^3\Lambda^{-3} = \varkappa a^{-3/2}$. Если $h = h_0$, то медленные переменные P, Q, Λ, p, q остаются, очевидно, постоянными с течением времени.

УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ В СРЕДНИХ ЭЛЕМЕНТАХ

Теория второго порядка по планетным массам определяется осредненными уравнениями второго приближения

$$\dot{X} = \frac{-2\mathrm{i}}{\Lambda}\left(\mu\frac{\partial H_1}{\partial \bar{X}} + \mu^2\frac{\partial H_2}{\partial \bar{X}}\right), \tag{7}$$

$$\dot{Y} = \frac{-\mathrm{i}}{2\Lambda}\left(\mu\frac{\partial H_1}{\partial \bar{Y}} + \mu^2\frac{\partial H_2}{\partial \bar{Y}}\right).$$

Необходимые для составления этих уравнений коэффициенты H_1 и H_2 разложения осредненного гамильтониана

$$H = H_0 + \mu H_1 + \mu^2 H_2 + \ldots \tag{8}$$

находятся по формулам

$$H_1 = \langle h_1 \rangle, \quad H_2 = \langle \{T_1, h_1 + H_1\} \rangle/2, \tag{9}$$
$$T_1 = \tilde{h}_1.$$

Здесь T_1 — первый коэффициент разложения производящей функции метода Хори—Деприи

$$T = \mu T_1 + \mu^2 T_2 + \ldots, \tag{10}$$

фигурные скобки обозначают скобку Пуассона по системе элементов (6), а волной сверху и угловыми скобками обозначены соответственно интегрирующий оператор и оператор взятия среднего значения (см. раздел 4 в Микрюков, 2020). В формулах (8)—(10) все функции зависят от средних элементов. На практике оказывается эффективным следующее простое свойство оператора взятия среднего значения:

$$\langle f_1 + f_2 + \ldots + f_k \rangle = \tag{11}$$
$$= \langle f_1 \rangle + \langle f_2 \rangle + \ldots + \langle f_k \rangle.$$

В (11) предполагается, что все f_s зависят от основных элементов (6) и что существуют средние значения $\langle f_s \rangle$.

В работе Микрюкова (2020) мы рассматривали теорию первого порядка по планетным массам. В основу этой теории была положена система уравнений первого приближения, которую можно получить из уравнений (7), опустив в скобках слагаемые, пропорциональные μ^2. Система первого приближения легко составляется для любого числа планет и поэтому в работе Микрюкова (2020) были рассмотрены и проинтегрированы примеры двухпланетных и трехпланетных систем. Задача построения системы второго приближения (7) является существенно более трудоемкой, так как для получения H_2 требуется вычислять скобку Пуассона функций T_1 и $h_1 + H_1$. Трудоемкость, очевидно, быстро возрастает с ростом числа планет N. В связи с этим в настоящей работе мы ограничимся изучением и решением уравнений (7) лишь на примерах двухпланетных систем. В многопланетном случае ($N \geqslant 3$) все выкладки, связанные с получением H_2, становятся более громоздкими и требующими значительно большего времени машинного счета, но принципиально новых деталей в их построении не появляется (Микрюков, 2018).

Разложения величин H_1 и H_2 строятся на основе пуассоновского разложения возмущающей функции h_1. При произвольном $N \geqslant 2$ возмущающая функция h_1 зависит сложным образом от всех $6N$ фазовых переменных (6). В случае $N = 2$ функция h_1 принимает вид

$$h_1 = \mathcal{R} + \mathcal{V}. \tag{12}$$

Главная $\mathcal{R}$ и дополнительная $\mathcal{V}$ части определяются равенствами

$$\mathcal{R} = -\frac{\mathcal{G} m_1 m_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}, \quad \mathcal{V} = \frac{\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2}{m_0}$$

и разлагаются в ряд Пуассона:

$$\mathcal{R} = \frac{\sigma}{\Lambda_2^2}\sum_{\mathbb{K}} C_{\ell v n}(XY)^{\ell v}\mathrm{Exp}(n\lambda), \tag{13}$$
$$\mathcal{V} = \frac{\tau}{\Lambda_1\Lambda_2}\sum_{\mathbb{K}_1} I_{\ell v n}(XY)^{\ell v}\mathrm{Exp}(n\lambda).$$

Здесь используются обозначения

$$\sigma = -\mathcal{G} m_1 m_2 \varkappa_2^2 \beta_2^2, \quad \tau = (\varkappa_1 \varkappa_2 \beta_1 \beta_2)^2/m_0,$$
$$(XY)^{\ell v} = X_1^{\ell_1} X_2^{\ell_2} Y_1^{\ell_3} Y_2^{\ell_4} \bar{X}_1^{v_1} \bar{X}_2^{v_2} \bar{Y}_1^{v_3} \bar{Y}_2^{v_4},$$
$$n\lambda = n_1\lambda_1 + n_2\lambda_2;$$

десятимерные множества суммирования $\mathbb{K}$ и $\mathbb{K}_1$ определены в разделе 3 работы Микрюкова (2020). Вещественные и безразмерные коэффициенты

$$C_{\ell v n} = C_{\ell_1\ell_2\ell_3\ell_4 v_1 v_2 v_3 v_4 n_1 n_2}(\alpha), \quad \alpha = a_1/a_2,$$
$$I_{\ell v n} = I_{\ell_1\ell_2\ell_3\ell_4 v_1 v_2 v_3 v_4 n_1 n_2}$$

рядов (13) можно свободно скачать из базы данных Mendeley Data по ссылке `http://dx.doi.org/10.17632/3cb75grjz4.1`.

При $N = 2$ степенные разложения

$$H_1 = \sum_{\mathbb{K}_0} Z_{\ell v}^{(1)}(XY)^{\ell v}, \tag{14}$$
$$H_2 = \sum_{\mathbb{K}_0} Z_{\ell v}^{(2)}(XY)^{\ell v}$$

формально имеют один и тот же вид[1] и отличаются лишь коэффициентами $Z_{\ell v}^{(1)}$ и $Z_{\ell v}^{(2)}$. Восьмимерное множество суммирования $\mathbb{K}_0$ определено в разделе 5 работы Микрюкова (2020). Основные теоретические стороны получения разложений (14) были описаны в работе Микрюкова (2018). Рассмотрим сейчас наиболее важные практические аспекты построения этих разложений.

Для изложения этих аспектов удобно предварительно ввести некоторые обозначения. Для

[1] В общем случае $N \geqslant 2$ каждое слагаемое разложения H_1 по степеням $X, \bar{X}, Y, \bar{Y}$ зависит от элементов лишь двух планет, но в разложении H_2 уже появляются слагаемые, зависящие от элементов трех и четырех (но не более) планет (см. подробности в работе Микрюкова, 2018).

всех двенадцати фазовых переменных (6) введем сплошную нумерацию

$$(\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_{12}) = \qquad (15)$$
$$= (P_1, P_2, Q_1, Q_2, \Lambda_1, \Lambda_2, p_1, p_2, q_1, q_2, \lambda_1, \lambda_2).$$

Согласно (15), имеем, например, $\epsilon_3 = Q_1$, $\epsilon_7 = p_1$, $\epsilon_{11} = \lambda_1$. Положим далее $\Psi_1 = h_1 + H_1$, $\Phi_2 = \{T_1\Psi_1\}/2$, откуда, согласно (9), получаем

$$H_2 = \langle\{T_1\Psi_1\}\rangle/2 = \langle\Phi_2\rangle.$$

Для любого натурального s, $1 \leqslant s \leqslant 6$, введем обозначения

$$\gamma_{s,s+6} = \frac{\partial T_1}{\partial\epsilon_s}\frac{\partial\Psi_1}{\partial\epsilon_{s+6}}, \quad \gamma_{s+6,s} = \frac{\partial T_1}{\partial\epsilon_{s+6}}\frac{\partial\Psi_1}{\partial\epsilon_s}, \qquad (16)$$

позволяющие для H_2 записать представление

$$H_2 = \frac{1}{2}\left\langle\sum_{s=1}^{6}(\gamma_{s,s+6} - \gamma_{s+6,s})\right\rangle. \qquad (17)$$

Итак, сначала рассмотрим основные особенности и отличия, которые возникают при нахождении коэффициентов $Z^{(1)}_{\ell v}$ и $Z^{(2)}_{\ell v}$ рядов (14). Коэффициенты $Z^{(1)}_{\ell v}$ разложения $H_1 = \langle h_1\rangle = \langle\mathcal{R} + \mathcal{V}\rangle$ вычисляются просто, так как они могут храниться в машинной памяти в *символьном* виде. В самом деле, $\langle\mathcal{V}\rangle = 0$, так что в силу (13) имеем

$$Z^{(1)}_{\ell v} = \frac{\sigma}{\Lambda_2^2}C_{\ell v00}. \qquad (18)$$

Формула (18) показывает, что коэффициенты разложения H_1 простым аналитическим образом выражаются через массы и большие полуоси планет. Коэффициенты же $Z^{(2)}_{\ell v}$ зависят от больших полуосей и масс планет очень сложным образом, и поэтому хранить их в символьном виде уже не представляется возможным. В случае каждой конкретной планетной системы величины $Z^{(2)}_{\ell v}$ нужно вычислять и хранить в машинной памяти уже в *числовом* виде. Сложность вычисления $Z^{(2)}_{\ell v}$ обусловлена в первую очередь тем, что ряды Пуассона, в которые разлагаются частные производные

$$\frac{\partial T_1}{\partial\epsilon_s}, \quad \frac{\partial\Psi_1}{\partial\epsilon_s}, \quad 1 \leqslant s \leqslant 12, \qquad (19)$$

являются (двойными) рядами Фурье по средним долготам λ_1 и λ_2. Перемножение этих рядов в (16) приводит к тому, что в образовании каждого коэффициента $Z^{(2)}_{\ell v}$ ряда H_2 участвует бесконечное число коэффициентов разложения функций (19) (см. подробности в Микрюков, 2018). На практике пуассоновские разложения величин (19) усекаются до конечных многочленов, однако в образовании каждого коэффициента $Z^{(2)}_{\ell v}$ участвует все равно очень большое количество коэффициентов разложения производных (19), и компактного аналитического представления для величин $Z^{(2)}_{\ell v}$ получить невозможно.

Далее, каждый член разложения H_2 (как и разложения H_1) имеет четную степень по совокупности переменных X, $\bar{X}$, Y, $\bar{Y}$ (Микрюков, 2018, 2020). Если требуется построить разложение H_2 до степени d включительно по этим элементам (здесь d — четное натуральное), то возникает следующий (не совсем очевидный) вопрос. До какой степени по X, $\bar{X}$, Y, $\bar{Y}$ необходимо разлагать функции T_1 и Ψ_1, участвующие в получении $H_2 = \langle\{T_1\Psi_1\}\rangle/2$? С помощью (16) легко заключить, что T_1 и Ψ_1 нужно разлагать до степени $d + 1$ включительно. В самом деле, при вычислении производных (19) функции T_1 и Ψ_1 представляются многочленами по X, $\bar{X}$, Y, $\bar{Y}$, а дифференцирование по эксцентрическим и облическим элементам, очевидно, понижает степень этих многочленов на единицу. Например, если разложение H_2 строится до четвертой степени включительно по X, $\bar{X}$, Y, $\bar{Y}$, то разложение исходной определяемой формулами (12) и (13) возмущающей функции h_1 необходимо построить до пятой степени включительно (с тем, чтобы получить разложения $T_1 = \tilde{h}_1$ и $\Psi_1 = h_1 + \langle h_1\rangle$ до пятой степени включительно).

Правые части системы первого приближения строятся на основе разложения величины H_1. Удобная для применения машинных алгоритмов интегрирования схема этого построения рассмотрена в разделе 5 работы Микрюкова (2020). Приведем теперь близкую к оптимальной схему машинного получения величины H_2. На практике эффективность этой схемы заключается в экономном использовании имеющейся в распоряжении оперативной памяти. Эта схема опирается на свойство (11) осредняющего оператора и заключается в том, что $H_2 = \langle\Phi_2\rangle$ можно вычислять по формуле

$$H_2 = \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{6}\left(\langle\gamma_{s,s+6}\rangle - \langle\gamma_{s+6,s}\rangle\right). \qquad (20)$$

На практике получение H_2 с помощью (20) имеет преимущество перед вычислением H_2 по формуле (17). Дело в том, что в разложениях величин

$$\gamma_{s,s+6}, \quad \gamma_{s+6,s}, \quad 1 \leqslant s \leqslant 6, \qquad (21)$$

содержится гораздо больше слагаемых, чем в разложениях соответствующих средних значений

$$\langle\gamma_{s,s+6}\rangle, \quad \langle\gamma_{s+6,s}\rangle, \quad 1 \leqslant s \leqslant 6. \qquad (22)$$

Формула (20) показывает, что для получения $\langle\Phi_2\rangle$ функции (22) можно вычислять последовательно.

Таблица 1. Значения массовых параметров в двухпланетных системах HD 12661 (Родригес, Галлардо, 2005) и СВЗ (Кочетова и др., 2019)

Система	μ	m_0	m_1	m_2
HD 12661	2.079×10^{-3}	1.07	1.07	0.8404
СВЗ	3.0404×10^{-6}	1	0.8051	1

Именно, сначала вычисляется γ_{17}, после чего из γ_{17} сразу же извлекается среднее значение

$$\langle\gamma_{17}\rangle = \left\langle \frac{\partial T_1}{\partial P_1}\frac{\partial \Psi_1}{\partial p_1} \right\rangle.$$

После получения $\langle\gamma_{17}\rangle$ оперативную память можно очистить от многочлена, представляющего γ_{17}, так как он больше не нужен для получения $\langle\Phi_2\rangle$. Далее таким же образом последовательно вычисляются остальные одиннадцать величин $\langle\gamma_{71}\rangle$, $\langle\gamma_{s,s+6}\rangle, \langle\gamma_{s+6,s}\rangle$, $2 \leqslant s \leqslant 6$. Подстановка полученных средних значений (22), в каждом из которых содержится относительно небольшое количество слагаемых, в представление (20) дает требуемое $\langle\Phi_2\rangle$. Применение же формулы (17) для получения H_2 требует от оперативной памяти одновременной работы с целыми многочленами (21), а не с их гораздо более мелкими частями (22).

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ОСРЕДНЕННЫХ УРАВНЕНИЙ

В работе Микрюкова (2020) были рассмотрены три двухпланетные системы: HD 12661, двухпланетное приближение системы v Andromedae (планеты c и d), а также модельная двупланетная система, состоящая из звезды солнечной массы и двух обращающихся около нее планет с массами и орбитальными элементами Венеры и Земли. В первых двух планетных системах малый параметр μ имеет порядок 10^{-3}, а в третьей $\mu \sim 10^{-6}$. В настоящей работе будет продолжено исследование только системы HD 12661 и модельной двухпланетной системы, которую мы далее будем для краткости называть системой СВЗ. В табл. 1 приведены массовые параметры для обеих систем.

Для интегрирования уравнений второго приближения (7) нужно задать начальные значения средних элементов X и Y. Эти значения определяются начальными значениями оскулирующих элементов и вычисляются по формулам замены переменных (Микрюков, 2018). Рассмотрим вопрос о получении начальных значений оскулирующих элементов.

Координаты Пуанкаре

$$\mathbf{r}_s, \quad 1 \leqslant s \leqslant N, \tag{23}$$

которые мы задали каноническим преобразованием (1), часто называют астроцентрическими координатами. Хотя такая терминология, очевидно, имеет право на существование (векторы (23) представляют собой астроцентрические положения планет), в контексте планетной задачи она может приводить к путанице, связанной с определением оскулирующих элементов. В самом деле, когда говорят об оскулирующих элементах планеты $\mathcal{Q}_s$ ($1 \leqslant s \leqslant N$) в астроцентрической системе координат, обычно имеются в виду элементы, определяемые по ее астроцентрическому положению $\mathbf{r}_s$ и астроцентрической скорости $\dot{\mathbf{r}}_s$. В случае же наших уравнений (5) оскулирующие элементы определяются вектором положения $\mathbf{r}_s$ и вектором скорости $\mathbf{p}_s/\beta_s$, коллинеарным с вектором барицентрической скорости планеты $\mathcal{Q}_s$. Ясно, что элементы, соответствующие векторам $\mathbf{r}_s, \dot{\mathbf{r}}_s$, отличаются от элементов, отвечающих векторам $\mathbf{r}_s$, $\mathbf{p}_s/\beta_s$. Чтобы указанные наборы элементов можно было различать, элементы, соответствующие векторам $\mathbf{r}_s$ и $\dot{\mathbf{r}}_s$, будем называть элементами планеты в системе астроцентрических координат, а элементы, определяемые векторами $\mathbf{r}_s$ и $\mathbf{p}_s/\beta_s$, — элементами в системе координат Пуанкаре[2].

За начальные значения оскулирующих элементов в системе HD 12661 примем элементы из работы (Родригес, Галлардо, 2005), данные на эпоху JD 2450314.22. Родригес и Галлардо (2005) ввиду отсутствия надежной информации об элементах i и Ω рассматривают компланарный вариант системы HD 12661 и дают лишь элементы a, e, M, g для обеих планет. Чтобы получить пространственную конфигурацию, мы придали планетным орбитам в этой системе произвольным образом малые наклонения и задали произвольным образом линии узлов. Ли и Пил (2003) показывают, что если наклонения малы, то при любом положении линий узлов качественное поведение орбитальных характеристик планетной системы сохраняется и совпадает с поведением ее компланарного варианта. Данные Родригесом и Галлардо (2005) элементы a, e, M, g в совокупности с нашими i и Ω отнесены к астроцентрической системе координат, мы приводим их во втором столбце табл. 2. Начальные значения оскулирующих элементов для системы СВЗ мы взяли из ежегодника (Кочетова и др., 2019). Эти значения даны на эпоху JD 2459000.5 и также отнесены к астроцентрической системе координат (см. табл. 3, второй столбец).

Для того чтобы от оскулирующих элементов в системе астроцентрических координат перейти к оскулирующим элементам в системе координат

[2]Пытаясь, таким образом, сохранить симметрию с термином “элементы в системе координат Якоби”.

Таблица 2. Начальные значения оскулирующих элементов в двухпланетной системе HD 12661

Элементы	Астроцентрические координаты	Координаты Пуанкаре
a_1 (а.е.)	0.821	0.8199359295
e_1	0.34	0.3415768806
i_1	0.5°	0.5000040708°
M_1	136.7°	136.7880869907°
g_1	290.6°	290.4720779851°
Ω_1	6.0°	6.0098334270°
a_2 (а.е.)	2.855	2.8386768580
e_2	0.066	0.0606236383
i_2	1.5°	1.4999334376°
M_2	0.7°	359.9218569780°
g_2	94.1°	94.9593261811°
Ω_2	8.0°	8.0297475760°

Таблица 3. Начальные значения оскулирующих элементов в двухпланетной системе СВЗ

Элементы	Астроцентрические координаты	Координаты Пуанкаре
a_1 (а.е.)	0.7233420	0.7233383308
e_1	0.0067521	0.0067543698
i_1	3.39459°	3.3945984941°
M_1	115.03086°	115.0694946641°
g_1	55.01074°	54.9721184741°
Ω_1	76.62393°	76.6239066120°
a_2 (а.е.)	1.0000015	0.9999958536
e_2	0.0167255	0.0167301985
i_2	0.00266°	0.0026629847°
M_2	145.72710°	145.7383169383°
g_2	285.46174°	285.2510110147°
Ω_2	177.48660°	177.6861263815°

Пуанкаре, нужно найти связь между векторами $\mathbf{r}_s$ и $\mathbf{p}_s$. Эту связь можно получить, выполняя дифференцирование в первой группе уравнений (4). Согласно (2) и (3), получаем

$$\dot{\mathbf{r}}_s = \frac{\partial h}{\partial \mathbf{p}_s} = \frac{\mathbf{p}_s}{m_s} + \frac{\mu}{m_0}\sum_{k=1}^{N}\mathbf{p}_k, \quad 1 \leqslant s \leqslant N.$$

Отсюда для $N = 2$ находим

$$\mathbf{p}_1 = \frac{m_1 m_2}{m_0 + \mu m_1 + \mu m_2}\left(\frac{m_0 + \mu m_2}{m_2}\dot{\mathbf{r}}_1 - \mu\dot{\mathbf{r}}_2\right), \tag{24}$$

$$\mathbf{p}_2 = \frac{m_1 m_2}{m_0 + \mu m_1 + \mu m_2}\left(-\mu\dot{\mathbf{r}}_1 + \frac{m_0 + \mu m_1}{m_1}\dot{\mathbf{r}}_2\right).$$

Итак, сначала по элементам планеты $\mathcal{Q}_s$ в астроцентрических координатах находятся векторы $\mathbf{r}_s$, $\dot{\mathbf{r}}_s$. Затем по этим векторам с помощью (24) получаются векторы $\mathbf{r}_s$, $\mathbf{p}_s$ (вектор $\mathbf{r}_s$ не изменяется). Элементы в системе координат Пуанкаре восстанавливаются в итоге по вектору положения $\mathbf{r}_s$ и вектору $\mathbf{p}_s/\beta_s$, выступающему в роли скорости. Вычисленные начальные значения оскулирующих элементов в системе координат Пуанкаре приведены в последних столбцах табл. 2 и 3. По этим значениям с помощью формул перехода от оскулирующих элементов к средним находятся, наконец, начальные значения переменных уравнений (7).

Как и в работе Микрюкова (2020) разложение H_1 мы ограничили десятой степенью по совокупности элементов X, $\bar{X}$, Y, $\bar{Y}$. Разложение H_2 мы построили лишь до второй степени. Таким образом, полученные нами производные $\partial H_2/\partial\bar{X}$ и $\partial H_2/\partial\bar{Y}$ представляют собой поправки к линейным членам, дающимися производными $\partial H_1/\partial\bar{X}$ и $\partial H_1/\partial\bar{Y}$. На основании табл. 7 работы Микрюкова (2020) заключаем, что разложения H_1 и H_2 содержат соответственно 2446 и 9 слагаемых. Для получения H_2 мы использовали разложение h_1, ограниченное условиями

$$\sum_{k=1}^{4}(\ell_k + v_k) \leqslant 3 \quad \text{и} \quad |n_1|, |n_2| \leqslant 9$$

(см. формулы (12) и (13)). Согласно анализу, выполненному в предыдущем разделе, разложение h_1 нужно было ограничить третьей степенью (включительно) по совокупности параметров $X, \bar{X}, Y, \bar{Y}$.

Интегрирование осредненных уравнений (7) проводилось, как и в работе Микрюкова (2020), с помощью реализованного на языке C++ явного одношагового семистадийного метода Рунге–Кутты шестого порядка точности. Пуассоновские разложения величин H_1 и H_2 строились в системе компьютерной алгебры Maxima.

Интегратор REX

Сравнение решений уравнений первого и второго приближения важно выполнить, так как оно показывает, насколько существенным оказывается вклад производных $\partial H_2/\partial \bar{X}$ и $\partial H_2/\partial \bar{Y}$ в осредненное решение. Это относится и к случаю резонансных, и к случаю нерезонансных систем (имеются в виду резонансы средних движений).

Также значительный интерес представляет сравнение осредненного решения с решением точных уравнений движения в обычных прямоугольных координатах. Анализ этого сравнения должен показать, насколько точно построенная осредненная теория воспроизводит истинное поведение системы. В настоящей работе для выполнения данного сравнения мы использовали интегратор REX (Research + EXoplanet), реализованный нами на языке общего назначения С и предназначенный для численного решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Интегратор REX разработан на основе используемого в работе Баляева (2020) варианта интегратора Эверхарта и применяется в основном для интегрирования ньютоновской задачи многих тел в декартовых координатах. Особенностью интегратора REX является произвольная точность, что достигается с помощью инструментов библиотеки gmp (GNU Multi-Precision Library). Хотя такой подход значительно увеличивает время вычислений, он позволяет преодолеть ограничения, связанные с погрешностями машинного округления и численного интегрирования. Программный комплекс REX также включает в себя программы преобразования координат, в том числе из элементов орбит в декартовы координаты. Таким образом, начальные данные могут без потери точности задаваться набором элементов орбит. Интегрирование проводится с постоянным шагом. На шаге используется разбиение Гаусса–Лобатто. Контроль точности осуществляется параллельным интегрированием с вдвое большим шагом. В случае интегрирования экзопланетной системы для первичной оценки времени вычислений достаточно знать наименьший период обращения: интегрирование на 10^6 оборотов с наименьшим периодом обычно проводится за несколько дней.

Интегратор REX строит решение обычных уравнений в прямоугольных координатах, так что его применение служит хорошим контролем достоверности полученных в настоящей работе результатов.

Система HD 12661

Интегрирование для системы HD 12661 мы выполнили на 3×10^5 лет вперед. На рис. 1 и 2 изображена полученная эволюция элементов e и i. Красная и синяя линии обозначают выраженное в кеплеровых элементах решение системы первого и второго приближения соответственно. Таким образом, этими линиями обозначена эволюция средних e и i, отнесенных к системе координат Пуанкаре. Зеленая линия — построенная с помощью REX эволюция оскулирующих e и i в астроцентрических координатах. Линии наносились в следующем порядке: зеленая, красная, синяя[3].

Уравнения первого и второго приближения дают период колебаний эксцентриситетов, равный примерно 26 391 и 26 309 лет соответственно. Период колебаний e, который дает REX, мы оценили приблизительно в 26 175 лет (рис. 1). Родригес и Галлардо (2005), аналогично построив с помощью интегратора MERCURY точное решение и применив спектральный анализ, получили период колебаний e в этой системе, равный 26 150 лет. Как видим, период изменения e, который дают уравнения второго приближения (7), гораздо лучше соответствует истинному значению периода эксцентриситетов, чем период e, определяемый системой первого приближения.

Согласно графикам, изображенным на рис. 2, поведение наклонений в этой системе имеет более сложный характер. Наклонения также совершают колебания в противофазе, но вопрос об их граничных значениях остается неясным. Тем не менее в случае наклонений также очевидно, что второе приближение лучше согласуется с решением точных уравнений.

В табл. 4 мы приводим для ориентировки и сравнения коэффициенты (с одинаковыми нижними индексами) разложений H_1 и H_2, построенных для системы HD 12661.

Модельная двухпланетная система СВЗ

На рис. 3 и 4 показана эволюция элементов e и i в модельной системе СВЗ. Смысл цветовых обозначений соответствует рассмотренному случаю системы HD 12661 (линии рисовались в том же порядке). Интегрирование выполнялось на 2×10^6 лет вперед.

В случае системы СВЗ при переходе от уравнений первого к уравнениям второго приближения период колебаний e также уменьшается (рис. 3). Однако в отличие от HD 12661 теперь переход ко второму приближению приводит к практически полному согласованию точного и осредненного решений (на рассматриваемых 2×10^6 лет).

[3]Цветные версии всех представленных в работе рисунков доступны в онлайн-версии журнала.

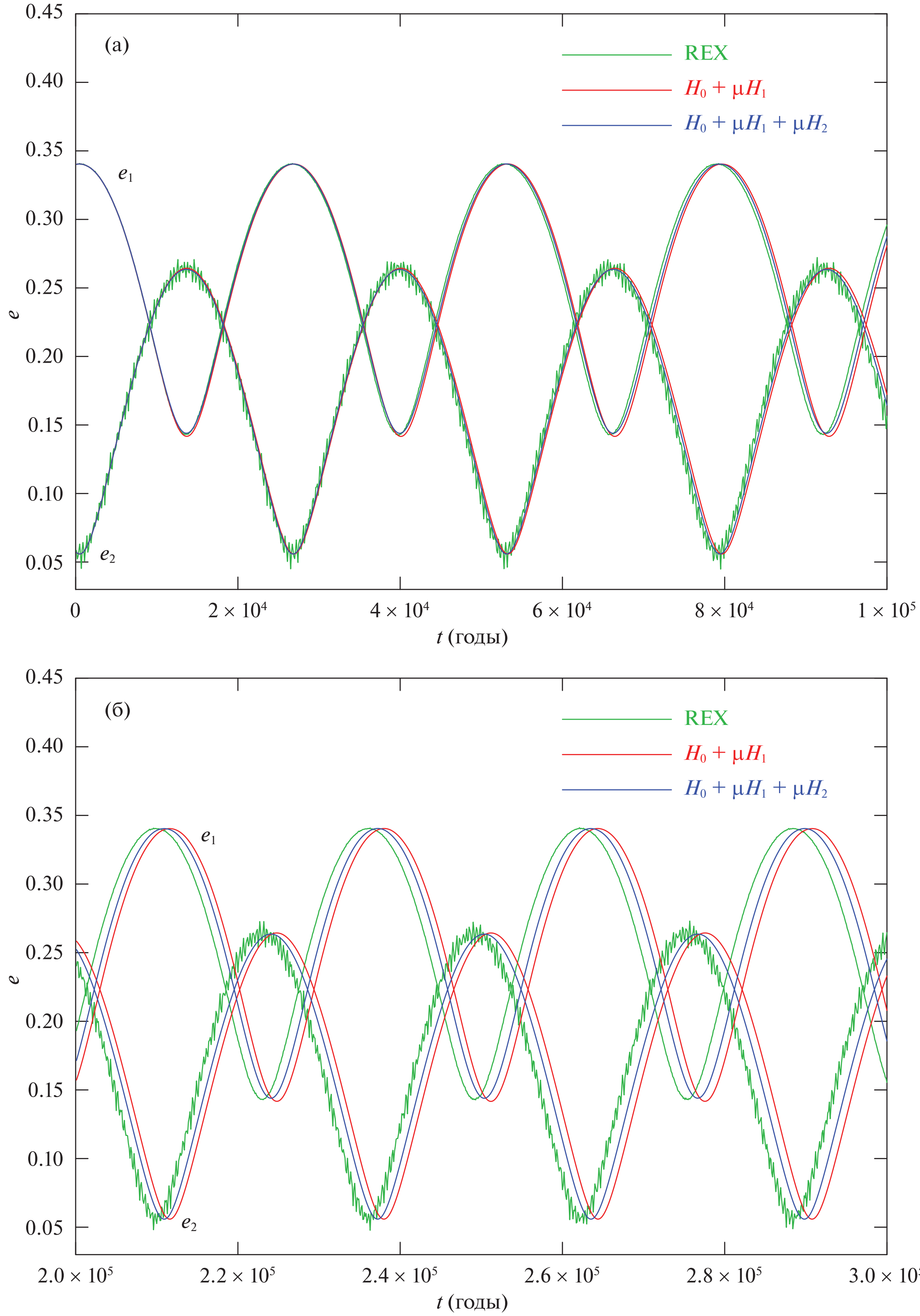

Рис. 1. Эволюция эксцентриситетов в системе HD 12661 на интервале времени 3×10^5 лет. Изображены первая (а) и последняя (б) трети этого интервала.

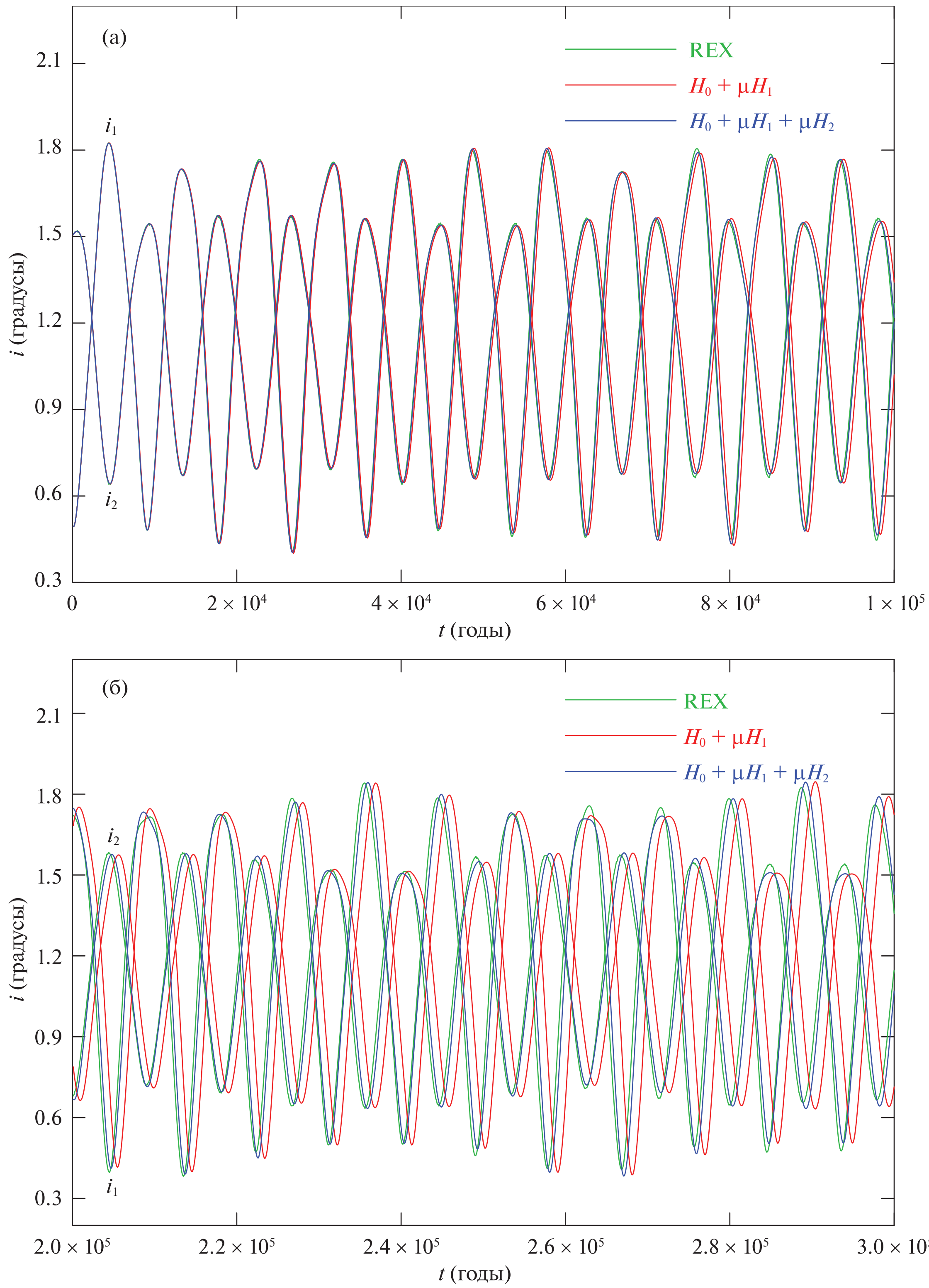

Рис. 2. Эволюция наклонов в системе HD 12661 на интервале времени 3×10^5 лет. Изображены первая (а) и последняя (б) трети этого интервала.

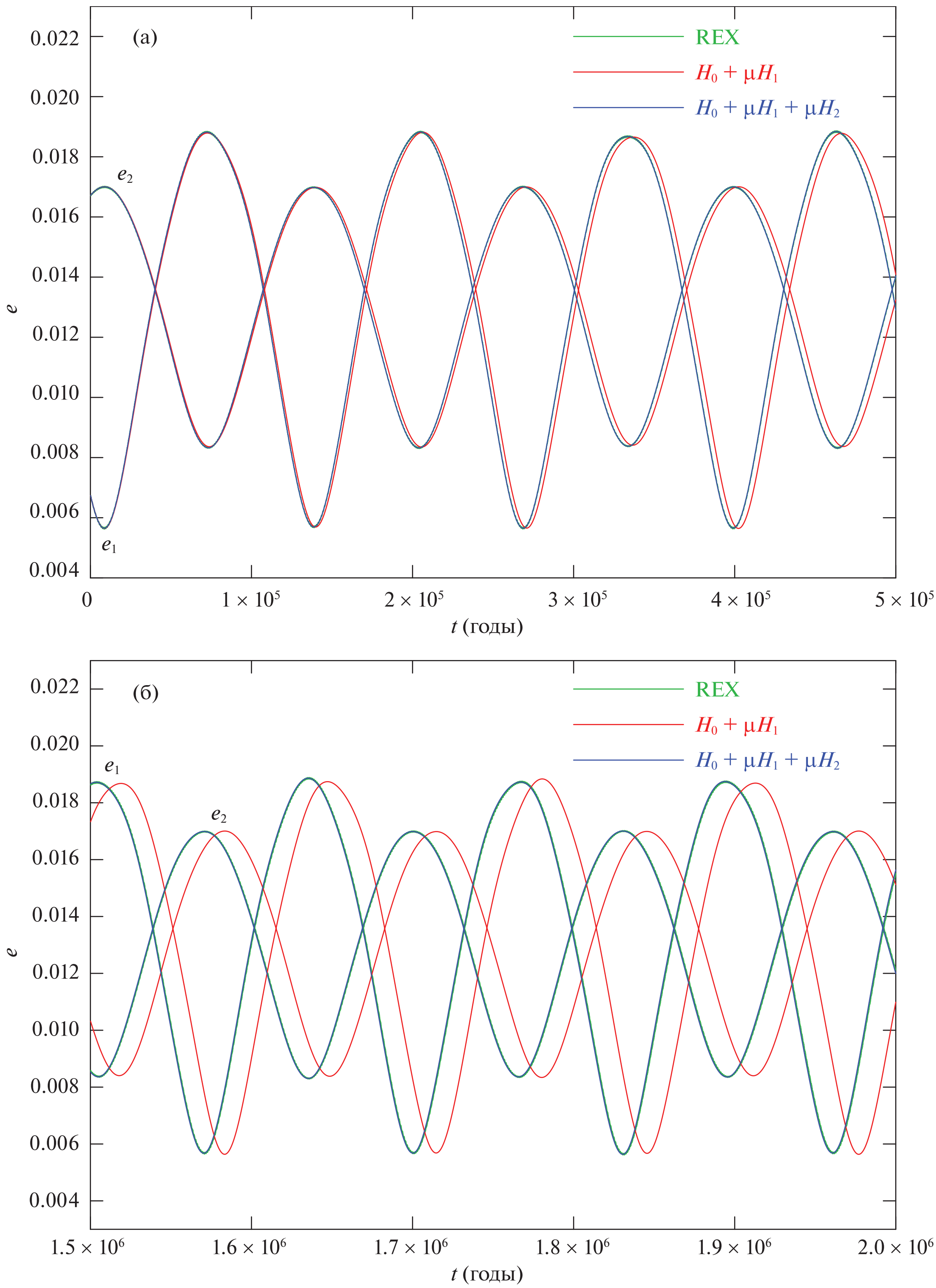

Рис. 3. Эволюция эксцентриситетов в модельной системе СВЗ на интервале времени 2×10^6 лет. Изображены первая (а) и последняя (б) четверти этого интервала. Второе приближение хорошо согласуется с решением точных уравнений.

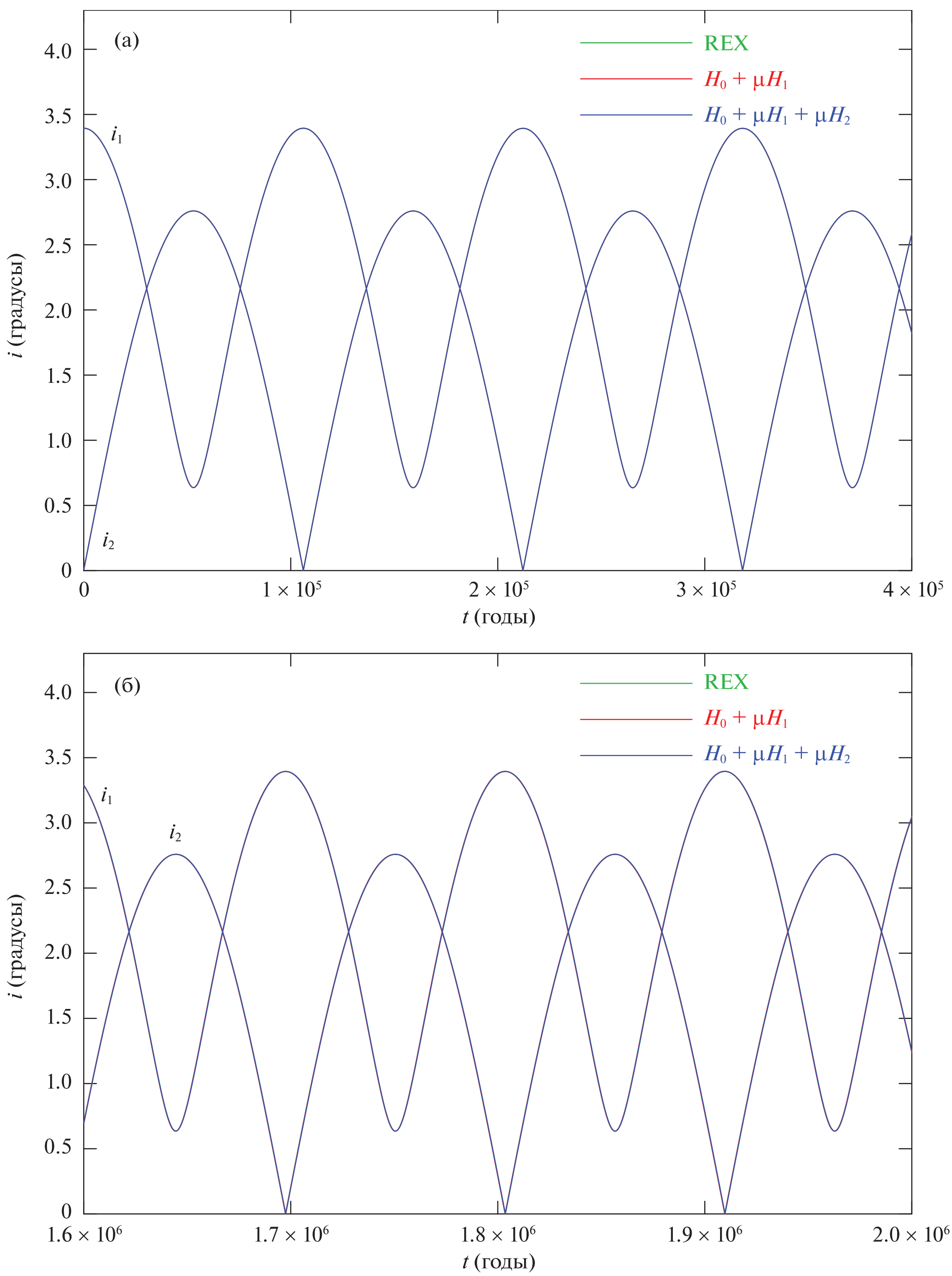

Рис. 4. Эволюция наклонов в модельной системе СВЗ на интервале времени 2×10^6 лет. Изображены начальные (а) и конечные 4×10^5 лет (б) этого интервала. Все три метода дают для наклонений практически один и тот же результат.

Таблица 4. Система HD 12661. Разложение H_1 и H_2 до второй степени включительно (см. формулу (14)). Коэффициенты $Z^{(1)}_{\ell v}$ и $Z^{(2)}_{\ell v}$ имеют размерность энергии

ℓ_1	ℓ_2	ℓ_3	ℓ_4	v_1	v_2	v_3	v_4	$Z^{(1)}_{\ell v}$	$Z^{(2)}_{\ell v}$
0	0	0	0	0	0	0	0	$-1.280429255392898\times10^{+1}$	$-1.170437994297547\times10^{+1}$
1	0	0	0	1	0	0	0	$-4.647478519548778\times10^{-1}$	$-1.836085626527677\times10^{+0}$
0	1	0	0	0	1	0	0	$-4.647478519548778\times10^{-1}$	$-4.885059809599514\times10^{-1}$
1	0	0	0	0	1	0	0	$1.664653330731684\times10^{-1}$	$1.834070370869245\times10^{-1}$
0	1	0	0	1	0	0	0	$1.664653330731684\times10^{-1}$	$1.834070370869192\times10^{-1}$
0	0	1	0	0	0	1	0	$1.858991407819511\times10^{+0}$	$3.653641895367278\times10^{+0}$
0	0	0	1	0	0	0	1	$1.858991407819511\times10^{+0}$	$3.653641895367280\times10^{+0}$
0	0	1	0	0	0	0	1	$-1.858991407819511\times10^{+0}$	$-3.653641895367251\times10^{+0}$
0	0	0	1	0	0	1	0	$-1.858991407819511\times10^{+0}$	$-3.653641895367251\times10^{+0}$

Таблица 5. Система СВЗ. Разложение H_1 и H_2 до второй степени включительно, см. формулу (14). Коэффициенты $Z^{(1)}_{\ell v}$ и $Z^{(2)}_{\ell v}$ имеют размерность энергии

ℓ_1	ℓ_2	ℓ_3	ℓ_4	v_1	v_2	v_3	v_4	$Z^{(1)}_{\ell v}$	$Z^{(2)}_{\ell v}$
0	0	0	0	0	0	0	0	$-3.792418772564527\times10^{1}$	$1.565541269173967\times10^{1}$
1	0	0	0	1	0	0	0	$-2.549475352840062\times10^{1}$	$-4.645023695772291\times10^{4}$
0	1	0	0	0	1	0	0	$-2.549475352840062\times10^{1}$	$-7.468783347688307\times10^{4}$
1	0	0	0	0	1	0	0	$2.122747589102033\times10^{1}$	$5.823784070278836\times10^{4}$
0	1	0	0	1	0	0	0	$2.122747589102033\times10^{1}$	$5.823784070278838\times10^{4}$
0	0	1	0	0	0	1	0	$1.019790141136024\times10^{2}$	$-2.384419776970157\times10^{3}$
0	0	0	1	0	0	0	1	$1.019790141136024\times10^{2}$	$-2.384419776970157\times10^{3}$
0	0	1	0	0	0	0	1	$-1.019790141136024\times10^{2}$	$2.384419776970508\times10^{3}$
0	0	0	1	0	0	1	0	$-1.019790141136024\times10^{2}$	$2.384419776970508\times10^{3}$

Относительно наклонений наблюдается хорошее согласование всех трех способов получения долговременной эволюции (рис. 4). Период колебаний i равен приблизительно 106 100 годам.

Коэффициенты разложений H_1 и H_2 приведены в табл. 5.

ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

1. Анализ табл. 4 и 5 показывает, что в случае системы СВЗ коэффициенты разложения H_2 больше значений коэффициентов H_1 на два-три порядка, хотя коэффициенты разложений H_1 и H_2, соответствующие системе HD 12661, имеют приблизительно один и тот же порядок. Эта разница связана с тем, что в системе HD 12661 отношение больших полуосей значительно меньше, чем в системе СВЗ. В табл. 6 мы приводим для ориентировки величины коэффициентов Лапласа, которые использовались для составления осредненных уравнений (7). Напомним, что среди всех пар соседних орбит в Солнечной системе (речь идет об основных восьми планетах) пара Венера–Земля имеет наибольшее отношение больших полуосей.

2. На основании рис. 1 и 3, а также табл. 7, в которой приведены основные полученные периоды

колебаний, можно сделать вывод, что период колебаний эксцентриситетов уменьшается при переходе от первого ко второму приближению. Можно ли привести пример двухпланетной системы, в которой второе приближение дает большее значение периода колебаний e_1 и e_2, нежели первое? Пока этот вопрос остается открытым. Интересным также является то, что по сравнению с СВЗ в системе HD 12661 второе приближение заметно хуже согласуется с решением точных уравнений. Скорее всего, это связано с тем, что в системе HD 12661 орбиты более вытянуты, и что в ней значение параметра μ существенно больше (на три порядка), чем в системе СВЗ. Учет большего числа членов в разложении H_2, а также расчет третьего приближения должны дать большее соответствие точного и осредненного решений.

3. Для составления и решения уравнений второго приближения (7) мы использовали только первые девять слагаемых из разложения H_2 (табл. 4 и 5, последние столбцы). Более детальное и точное сравнение систем первого и второго приближения, а также сравнение решения осредненных уравнений с решением точных уравнений в прямоугольных координатах требуют разложения H_2 до более высокой степени. Например, Либер и Сансоттера (2013) при исследовании эволюции системы υ Andromedae (двухпланетное приближение, состоящее из планет c и d) приводят разложение осредненного гамильтониана до шестой степени включительно по совокупности эксцентрических элементов. (Либер и Сансоттера (2013) рассматривали компланарный вариант орбит в системе υ Andromedae, так что облических элементов в их исследовании не возникало.) С помощью табл. 7 работы Микрюкова (2020) заключаем, что разложение H_2 до шестой степени содержит 261 слагаемое. Отметим, что хотя в разложении H_2 мы учли лишь первые девять слагаемых, учет этих (наиболее важных) слагаемых, как показывают изображенные в предыдущем разделе графики, значительным образом улучшил соответствие точного и осредненного решений[4]. Вопрос о выборе количества учитываемых членов в разложении H_2 рассматривается также в работе Холшевникова и др. (2002).

4. С помощью формул замены переменных (Микрюков, 2018) можно изучить поведение оскулирующих элементов, определяемое построенным численно-аналитическим методом. В частности, можно получить оценки короткопериодических возмущений оскулирующих эксцентриситетов и наклонений. Полученное таким способом решение в оскулирующих элементах можно затем сравнить с решением точных уравнений планетного движения (например, снова с помощью интегратора REX). При этом сравнении важно понимать, что если оскулирующее решение, дающееся точными уравнениями, отнесено к системе астроцентрических координат (что наиболее естественно), то оскулирующее решение, вычисленное по осредненному с помощью формул замены переменных, должно быть также переведено в систему астроцентрических координат. Указанное сравнение послужит хорошим контролем достоверности и точности формул замены переменных, а также всего построенного численно-аналитического метода. Задача получения оскулирующего решения по осредненному имеет большое практическое значение и в наших следующих работах мы этой задаче безусловно уделим внимание.

5. В настоящем исследовании нами рассматривались такие планетные системы, в долговременной орбитальной динамике которых резонансы средних движений не играют существенной роли. В самом деле, при переходе от первого ко второму приближению соответствие точного и осредненного решений становилось во всех случаях очевидно лучше, хотя построенные нами коэффициенты H_0, H_1, H_2 разложения осредненного гамильтониана (8) зависели только от медленных переменных. Для удовлетворительного описания орбитальной динамики резонансных систем необходимо дополнительно включить в разложение осредненного гамильтониана H резонансные комбинации средних движений. Изучение долговременной эволюции таких планетных конфигураций входит в ближайшие планы авторов настоящей работы.

6. Безусловно, рассмотренная нами двухпланетная система СВЗ является примером сугубо модельным и имеющим весьма далекое отношение к поведению Венеры и Земли в реальной Солнечной системе. Однако, как уже было отмечено в работе Микрюкова (2020), этот пример указывает на теоретически возможное существование таких устойчивых планетарных систем, которые образованы только планетами земного типа. Этот факт представляет значительный интерес с точки зрения вопросов астробиологии и терраформирования. Но он также важен и с точки зрения небесной механики, поскольку было бы ошибочным предполагать, что при столь малом значении $\mu \sim 10^{-6}$ планетная система не может показывать сколько-нибудь интересной динамики (характерное для землеподобных планет значение $\mu \sim 10^{-6}$ существенно меньше хорошо изученного случая планет-гигантов $\mu \gtrsim 10^{-3}$). Ярким примером здесь может служить недавно открытая (Картер и др., 2012) двухпланетная система Kepler-36, в которой около звезды солнечной массы по околокруговым

[4]Строго говоря, из полученных нами девяти членов разложения H_2 на эволюцию переменных X и Y влияют лишь восемь, так как свободный член $Z^{(2)}_{0000\,0000}$ участия, очевидно, не принимает в образовании правых частей (7).

Таблица 6. Численные значения коэффициентов Лапласа, использованные для получения разложения правых частей осредненной системы (7)

Коэффициенты Лапласа	Система HD 12661, $\alpha = 0.28966796765545$	Модельная двупланетная система, $\alpha = 0.72332928635925$
$b_{1/2}^{(0)}$	2.04405723394687	2.38636938287722
$b_{1/2}^{(1)}$	0.29929176928246	0.94240697216200
$b_{3/2}^{(0)}$	2.43340886384816	9.99233279018946
$b_{3/2}^{(1)}$	1.02450568760861	8.87148128101114
$b_{5/2}^{(0)}$	3.37863281812190	85.7700193425058
$b_{5/2}^{(1)}$	2.12090536586398	83.4011658301125
$b_{7/2}^{(0)}$	5.24216201870723	893.125714736053
$b_{7/2}^{(1)}$	3.97590747410957	881.095089125255
$b_{9/2}^{(0)}$	8.73102097060679	9989.18477781155
$b_{9/2}^{(1)}$	7.28671762200818	9900.36855767005
$b_{11/2}^{(0)}$	15.1889765894544	115932.302389711
$b_{11/2}^{(1)}$	13.3470490590445	115161.594285413

Примечание. Здесь $\alpha = a_1/a_2$, где a_1 и a_2 — средние большие полуоси, которые вычисляются с помощью формул замены переменных по начальным значениям оскулирующих больших полуосей, отнесенных к системе координат Пуанкаре (табл. 2 и 3, последние столбцы). Каждый коэффициент Лапласа $b_s^{(k)}$ — функция от α. Подробности см. в (Микрюков, 2018, 2020).

Таблица 7. Периоды (в годах), рассчитанные с помощью решения точных уравнений (T_{REX}), уравнений второго приближения (T_{II}) и уравнений первого приближения (T_{I})

Параметры	T_{REX}	T_{II}	T_{I}	$\frac{\lvert T_{\mathrm{I}} - T_{\mathrm{REX}}\rvert}{T_{\mathrm{REX}}} \times 100\%$	$\frac{\lvert T_{\mathrm{II}} - T_{\mathrm{REX}}\rvert}{T_{\mathrm{REX}}} \times 100\%$
HD 12661, эксцентриситеты (рис. 1)	26 175	26 309	26 391	0.825%	0.512%
СВЗ, эксцентриситеты (рис. 3)	130 150	130 140	131 220	0.822%	0.008%
СВЗ, наклоны (рис. 4)	106 105	106 094	106 088	0.016%	0.010%

и почти компланарным орбитам обращаются суперземля Kepler-36b и мининептун Kepler-36c. Для данной системы $\mu \sim 10^{-5}$, так как планеты Kepler-36b и Kepler-36c массивнее Земли примерно в четыре и семь раз соответственно. Данная система выделяется тем, что в ней отношение больших полуосей $\alpha \approx 0.9$, и что при столь близких орбитах средние плотности планет отличаются в восемь раз (внутренняя планета b плотнее). Предварительные оценки показывают (Дэк и др., 2012), что динамика этой системы должна иметь хаотический характер, приводящий к возможным столкновениям или выбросам планет уже на временах порядка 10 (земных) лет. Этот вывод относительно эволюции данной планетной системы очевидно требует дальнейшего изучения, поскольку, согласно принципу устойчивости Четаева (1955), в природе могут наблюдаться, как правило, только устойчивые системы.

7. В число задач миссии недавно приступившего к работе космического телескопа “Джеймс Уэбб” входит поиск экзопланет с характеристиками, близкими к Земле. Ожидается, что мощность телескопа окажется достаточной даже для открытий экзоспутников, обращающихся около экзопланет. В ближайшие десятилетия, как в космосе, так и на Земле, будут постепенно вводиться в строй новые и более мощные инструменты, на которых

станет возможным открывать все более мелкие экзопланеты. Сделанные всеми этими инструментами открытия будут необратимо расширять наше представление о природе экзопланетных миров. Таким образом, в заключение нашего исследования можно сделать вывод, что в будущем актуальность изучения экзопланетных систем, состоящих или содержащих землеподобные планеты, будет только возрастать.

Авторы выражают благодарность К.В. Холшевникову (1939–2021) за постановку задачи, а также Л.Л. Соколову за помощь в проведении численных расчетов. Все вычисления в работе проводились с помощью оборудования вычислительного центра научного парка СПбГУ. Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (грант 19-72-10023).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баляев И.А., Астрон. вестник **54**, 567 (2020) [I.A. Balyaev, Solar Syst. Res. **54**, 557 (2020)].
2. Деприт (A. Deprit), Celest. Mech. **1**, 12 (1969).
3. Джакалья Г.Е.О., *Методы теории возмущений для нелинейных систем* (М.: Наука, 1979).
4. Дэк и др. (K.M. Deck, M.J. Holman, E. Agol, J.A. Carter, J.J. Lissauer, D. Ragozzine and J.N. Winn), Astrophys. J. Lett. **755**, L21 (2012).
5. Картер и др. (J.A. Carter, E. Agol, W.J. Chaplin et al.), Science **337**, 556 (2012).
6. Кочетова О.М., Кузнецов В.Б., Медведев Ю.Д., Чернетенко Ю.А., Шор В.А., *Эфемериды малых планет на 2020 год* (СПб.: ИПА РАН, 2019).
7. Ласкар, Робютель (J. Laskar and P. Robutel), Celest. Mech. Dynam. Astron. **62**, 193 (1995).
8. Ли, Пил (M.H. Lee and S.J. Peale), Astrophys. J. **592**, 1201 (2003).
9. Либер, Сансоттера (A.-S. Libert and M. Sansottera), Celest. Mech. Dynam. Astron. **117**, 149 (2013).
10. Маркеев А.П., *Точки либрации в небесной механике и космодинамике* (М.: Наука, 1978).
11. Микрюков Д.В., Письма в Астрон. журн. **44**, 361 (2018) [D.V. Mikryukov, Astron. Lett. **44**, 337 (2018)].
12. Микрюков Д.В., Письма в Астрон. журн. **46**, 366 (2020) [D.V. Mikryukov, Astron. Lett. **46**, 344 (2020)].
13. Микрюков Д.В., Холшевников К.В., Письма в Астрон. журн. **42**, 302 (2016) [D.V. Mikryukov, K.V. Kholshevnikov, Astron. Lett. **42**, 268 (2016)].
14. Морбиделли А., *Современная небесная механика. Аспекты динамики Солнечной системы* (М.: ИКИ, 2014).
15. Найфэ А.Х., *Методы возмущений* (М.: Мир, 1976).
16. Родригес, Галлардо (A. Rodríguez and T. Gallardo), Astrophys. J. **628**, 1006 (2005).
17. Холшевников К.В., *Асимптотические методы небесной механики* (Л.: ЛГУ, 1985).
18. Холшевников К.В., Греб А.В., Кузнецов Э.Д., Астрон. вестник **36**, 75 (2002) [K.V. Kholshevnikov et al., Solar System. Res. **36**, 68 (2002)].
19. Хори (G.-I. Hori), Publ. Astron. Soc. Jpn. **18**, 287 (1966).
20. Четаев Н.Г., *Устойчивость движения* (М.: ГИТТЛ, 1955).