

ОБОБЩЕННЫЙ МЕТОД ТРЕУГОЛКИ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ ГРУППОВОЙ ПУЛЬСАРНОЙ ШКАЛЫ ВРЕМЕНИ

© 2022 г. А. Е. Родин^{1*}, В. А. Федорова¹

¹Пушчинская радиоастрономическая обсерватория Физического института им. П.Н. Лебедева РАН,
Пушчино, Россия

Поступила в редакцию 27.01.2022 г.

После доработки 17.03.2022 г.; принята к публикации 17.03.2022 г.

На основе попарного сравнения хода индивидуальных пульсарных шкал времени разработан метод для составления рейтинга пульсаров, которые используются для построения групповой пульсарной шкалы (обобщенный метод треуголки). Метод применен к наблюдательным данным хронометрирования пульсаров из проекта NANOGrav. Ход построенной групповой пульсарной шкалы в пределах погрешности $\sigma_{\text{срт}} = 0.077$ мкс совпадает с ходом шкалы TT(VIRM2017), относительная нестабильность на интервале 12 лет $\sigma_z = (1.0 \pm 0.9) \times 10^{-16}$. На основе величины относительной нестабильности получен верхний предел на относительную плотность энергии стохастического гравитационно-волнового фона, возникшего в ранней Вселенной, на уровне $\Omega_g h^2 = 10^{-13}$ на частоте 2.6×10^{-10} Гц. Верхний предел амплитуды вариаций переменного гравитационного потенциала оценивается величиной $\Psi_c \sim 10^{-16}$ на той же частоте.

Ключевые слова: пульсары, шкалы времени, относительная нестабильность, гравитационно-волновой фон.

DOI: 10.31857/S0320010822040039

1. ВВЕДЕНИЕ

Хронометрирование (тайминг) пульсаров позволяет проводить исследования в совершенно различных областях физики и астрономии: релятивистской астрофизике, космологии, теории космических струн, эволюции планетных систем, строения нейтронных звезд, фундаментальной метрологии (Сажин, 1978; Детвелер, 1979; Родин, 2019; Крамер и др., 2021; Лазаридес и др., 2021). Отдельное направление в пульсарном тайминге занимает обнаружение общего коррелированного сигнала в данных хронометрирования, который, как полагают, может быть вызван низкочастотным гравитационно-волновым фоном (Родин, 2011; Чен и др., 2021).

В настоящей статье показано, как наблюдения группы миллисекундных пульсаров можно объединить для построения независимой барицентрической шкалы времени, по стабильности сравнимой с лучшими атомными шкалами на относительно длительных промежутках времени: 10–15 лет.

Вскоре после открытия пульсаров стало очевидно, что высокая регулярность следования пульсарных импульсов позволяет строить на их осно-

ве независимую астрономическую шкалу времени. Открытие и последующие наблюдения первого миллисекундного пульсара (Бакер и др., 1982) показали, что новая астрономическая шкала времени по стабильности может конкурировать с земными атомными шкалами (Мацакис, 1997; Родин, 2008; Хоббс и др., 2020).

Пульсарная шкала является долговременной, единой, воспроизводимой и неуничтожимой для всех наблюдателей на Земле. Длительное время существования пульсаров (10^8 лет) позволяет сравнивать между собой реализации земного атомного времени за различные годы. Пульсары находятся вне Солнечной системы, поэтому они предоставляют единственную возможность независимой проверки шкал земного атомного времени, что невозможно при сравнении между собой только земных часов. Именно в этом, по нашему мнению, видится главная ценность пульсарной шкалы времени.

Поскольку существует достаточное количество высокостабильных миллисекундных пульсаров, на основе которых можно строить различные реализации пульсарной шкалы, то неизбежно возникает вопрос критериев их сравнения и отбора вместе с задачей последующего усреднения для получения более стабильной групповой шкалы.

* Электронный адрес: rodin@pra0.ru

Таблица 1. Параметры четырнадцати миллисекундных пульсаров

Имя пульсара	СКО, мкс	$C_3, 10^{-13}$ мкс/год ³	σ_{psr} , мкс	Вес
B1855+09	0.916	1.7156	—	—
B1937+21	0.897	0.24356	—	—
J0030+0451	0.880	1.1359	0.481	0.036
J0613–0200	0.515	2.3391	0.308	0.089
J1012+5307	1.210	14.177	—	—
J1455–3330	2.798	41.505	—	—
J1640+2224	0.526	–10.695	—	—
J1643–1224	2.509	3.4606	—	—
J1713+0747	0.152	2.6150	0.138	0.441
J1744–1134	0.581	13.265	—	—
J1909–3744	0.226	–1.7227	0.218	0.177
J1918–0642	0.625	–7.0525	0.248	0.136
J2145–0750	0.978	8.6947	—	—
J2317+1439	0.427	1.0343	0.265	0.120

Примечание. Жирным выделены пульсары, отобранные для групповой шкалы. СКО — величина среднеквадратического отклонения после квадратичной подгонки и исключения выбросов, C_3 — коэффициент при кубическом члене остаточных уклонений МПИ пульсаров, σ_{psr} — шум хронометрирования пульсара без вклада шкалы времени, полученный обобщенным методом треуголки путем решения системы уравнений (2), вес рассчитывался как величина $\sim 1/\sigma_{\text{psr}}^2$.

В метрологии давно известен так называемый метод треуголки, который заключается в попарном сравнении хода часов друг относительно друга (Вернот и др., 2016). Если разность хода относительно определенных часов в группе показывает повышенные вариации, то очевидно, что вариации вызваны именно этими часами. Таким образом, можно “плохие” часы либо исключить из усреднения шкал, либо приписать им минимальный вес.

В случае если используется более трех часов, то необходимо использовать обобщенный метод треуголки. Подходы могут быть разные. Первый прямолинейный подход — это также вычислить и проанализировать попарные разности, которых будет $N(N-1)/2$, где N — это число пульсаров. Второй подход более сложный и заключается в формировании возможно большего количества реализаций групповых пульсарных шкал на основе имеющегося количества реперных пульсаров и вычисления фазовых вариаций индивидуальных пульсаров относительно этих групповых шкал. На основе среднеквадратичного уклонения пульсара от групповой шкалы этому пульсару присваивается соответствующий вес для последующего формирования окончательной групповой шкалы.

Вычисление рейтинга пульсаров для построения групповой шкалы времени является первой

целью этой статьи. Вторая цель — построение как можно более точной групповой пульсарной шкалы и вычисление ее погрешности на основе набора шкал, сформированных на основе подмножества пульсаров.

В качестве наблюдательных данных использовались наблюдения пульсаров, полученные в рамках североамериканского проекта NANOgrav¹ (Арзуманян и др., 2021), задуманного для поиска низкочастотного стохастического гравитационно-волнового фона, возникшего в ранней Вселенной.

Далее в разделе “Обработка данных” рассказывается о критериях предварительного отбора пульсаров для групповой шкалы и подготовке данных для использования в алгоритме. В разделе “Математический аппарат” описываются обобщенный метод треуголки и алгоритм формирования групповой шкалы на основе оптимальных винеровских фильтров. В разделе “Результаты” рассказывается об астрофизических приложениях групповой пульсарной шкалы.

ОБРАБОТКА ДАННЫХ

В качестве исходных данных использовались усредненные на интервале суток остаточные

¹<https://data.nanograv.org>

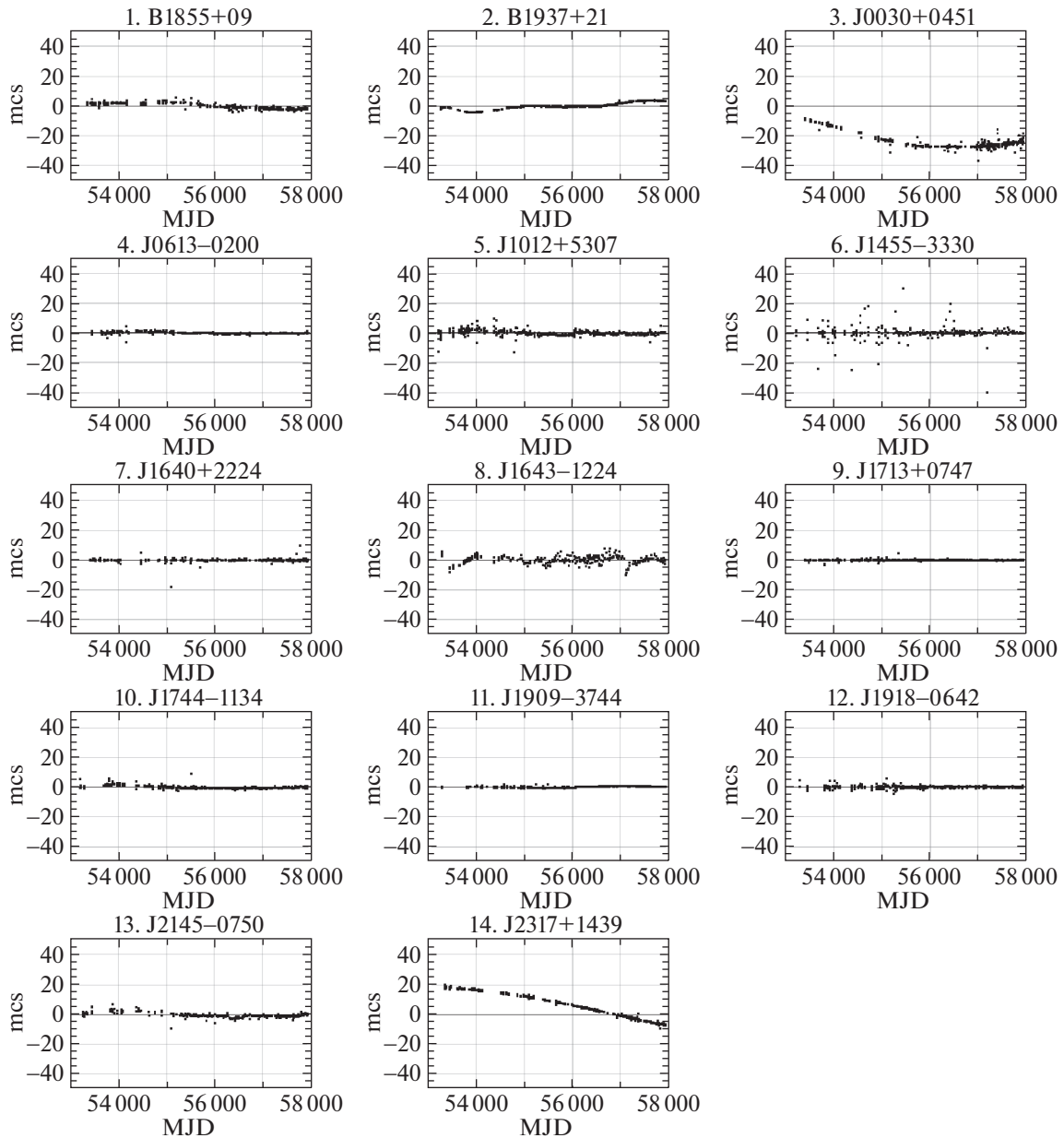


Рис. 1. Остаточные уклонения МПИ четырнадцати миллисекундных пульсаров.

уклонения моментов прихода импульсов (МПИ) 47 миллисекундных пульсаров, наблюдавшихся по программе NANOgrav. Так как поведение пульсарной шкалы времени представляет интерес на как можно более длительных интервалах времени, то из 47 пульсаров были отобраны 14, интервал наблюдения которых был длиннее 4000 сут. Список этих пульсаров приведен в табл. 1. Остаточные уклонения МПИ после квадратичной подгонки показаны на рис. 1. Коэффициент C_3 , приведенный в табл. 1, имеет смысл второй производной вращательной частоты и вычислялся путем вписывания

полинома третьей степени в остаточные уклонения:

$$\varphi = C_1(t - t_0) + C_2(t - t_0)^2 + C_3(t - t_0)^3,$$

где t_0 — эпоха вращательных параметров.

Хотя в статье Арзумяна и др. (2018) довольно подробно описываются причины появления выбросов и критерии их удаления, простой визуальный анализ временных рядов показал, что выбросы в остаточных уклонениях все-таки остались и их необходимо исключить из дальнейшего анализа. Поэтому на следующем шаге из наблюдений удалялись остаточные уклонения, которые превышали 3σ , где σ — среднеквадратичное отклонение временного ряда.

Некоторые пульсары показывают повышенный уровень низкочастотного коррелированного шума, например, PSR B1937+21 и J1643–1224. Очевидно, что такое поведение к шкале не имеет никакого отношения, а относится именно к самому пульсару. Также некоторым пульсарам присущ повышенный уровень белого шума, как, например, у PSR J1455–3330, который сильно затрудняет последующее формирование групповой шкалы. Поэтому следующим этапом было исключение пульсаров с $CKO > 0.8$ мкс или $|C_3| > 10^{-12}$ мкс/год³. Оставшиеся шесть пульсаров выделены в табл. 1 жирным шрифтом.

Далее для выполнения операций последующего сравнения и усреднения ряды данных усреднялись на интервале 30 дней, пробелы заполнялись линейной интерполяцией. В таком виде данные использовались для вычисления весов пульсаров и построения групповой шкалы.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АППАРАТ

Как уже было сказано во Введении, метод треуголки позволяет выявить часы, которые обладают повышенными вариациями хода по сравнению с другими часами, включенными в тройку. Если используется больше, чем трое часов, то появляется возможность составить рейтинг часов в соответствии с вариациями их хода относительно других. Далее в применении к пульсарам обязательным условием будет их тайминг относительно одной и той же шкалы времени — условие, которое, как правило, выполняется всегда. В рассматриваемом случае все наблюдения приведены к шкале TT (BIRM2017).

Рассмотрим первый подход для вычисления собственных вариаций вращения пульсаров. Дисперсия разности остаточных уклонений $r_i - r_j$ ($i, j = 1, 2, \dots, N, i \neq j$) записывается в следующем виде:

$$\sigma_{ij}^2 = \sigma_i^2 + \sigma_j^2 \quad (i, j = 1, 2, \dots, N, i \neq j), \quad (1)$$

где N — число пульсаров. Всего уравнений (1) будет $N(N - 1)/2$, поэтому при $N > 3$ для нахождения σ_i^2 ($i = 1, 2, \dots, N$) будем использовать метод наименьших квадратов

При написании уравнения (1) мы подразумевали, что остаточные уклонения пульсаров полностью некоррелированы, иначе пришлось бы учитывать дополнительный член $2\sigma_i\sigma_j$. Теоретически он может возникать, если, например, два пульсара наблюдаются на очень малом угловом расстоянии на небе, и сигнал распространяется через одни и те же области межзвездной среды. В рассматриваемом нами случае таких пульсаров нет.

Условные уравнения для последующего решения методом наименьших квадратов были получены в общем виде для произвольного количества пульсаров. В этой работе уравнения в матричном виде будут записаны на примере шести отобранных пульсаров. Условные уравнения записываются в следующем виде:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1^2 \\ \sigma_2^2 \\ \sigma_3^2 \\ \sigma_4^2 \\ \sigma_5^2 \\ \sigma_6^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{12}^2 \\ \sigma_{13}^2 \\ \sigma_{14}^2 \\ \sigma_{15}^2 \\ \sigma_{16}^2 \\ \sigma_{23}^2 \\ \sigma_{24}^2 \\ \sigma_{25}^2 \\ \sigma_{26}^2 \\ \sigma_{34}^2 \\ \sigma_{35}^2 \\ \sigma_{36}^2 \\ \sigma_{45}^2 \\ \sigma_{46}^2 \\ \sigma_{56}^2 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Решение матричного уравнения (2) для σ_i ($i = 1, 2, \dots, 6$) методом наименьших квадратов приведено в табл. 1 в столбце σ_{psr} . Так как наблюдения проводились на одном радиотелескопе и общей для всех пульсаров регистрирующей аппаратуре, то они считались равнозначными. Погрешность определения $\Delta\sigma_i = 0.270$ мкс ($i = 1, 2, \dots, 6$) определялась из формулы

$$\Delta\sigma_i^4 = \text{diag} \left[\varepsilon^2 (F^T F)^{-1} \right],$$

где ε — вектор невязок, полученный путем подстановки σ_i в систему (2) и последующего вычисления разности правой и левой частей системы, F — первая матрица в левой части системы (2).

Теперь перейдем ко второму методу. Введем критерий качества пульсара при использовании в групповой шкале исходя из следующих соображений: возьмем пробную группу M пульсаров ($M < N$), построим по ней реализацию групповой шкалы и вычислим отклонения индивидуальных шкал от групповой в среднеквадратическом смысле. Если в используемой реализации все пульсары

будут иметь высокую стабильность, то их отклонения от групповой шкалы будут минимальны, и такая группа пульсаров будет признана наиболее подходящей для построения групповой шкалы. Так как мы заинтересованы в максимальной статистике по различным выборкам, то возьмем максимальное число реализаций, которое будет при выборке $M = 3$ пульсара из $N = 6$: $n_r = \frac{N!}{(N-M)!M!} = 20$.

Самостоятельной ценностью второго подхода является возможность получения набора групповых шкал времени, которые покажут реальный ход шкалы при использовании различных пульсаров.

Во втором подходе используем уже опробованный в предыдущих исследованиях (Родин, 2008; Родин, Чен, 2011; Родин, Федорова, 2018) метод оптимальной винеровской фильтрации, который позволяет в разы увеличить точность построения групповой пульсарной шкалы. Кратко приведем суть метода. Остаточные уклонения МПИ $r_i = u_i + v$ ($i = 1, 2, \dots, N$), которые образуются после вычитания модели вращения пульсара, содержат информацию о физических процессах, происходящих в пульсаре u_i и стандарте частоты v . Из общих физических соображений полагаем, что случайные процессы u_i и v не коррелированы между собой и величины u_i , относящиеся к различным пульсарам, также не коррелированы между собой. Построение групповой пульсарной шкалы сводится к оцениванию общего сигнала v в присутствии аддитивных помех u_i .

Стандартный алгоритм формирования групповой пульсарной шкалы включает в себя измерение МПИ от нескольких пульсаров относительно единой опорной шкалы и вычисление взвешенной суммы $\sum_i w_i r_i \approx v$ ($i = 1, 2, \dots, N$), где w_i — относительный вес, приписываемый i -му пульсару. Так как вариации вращения u_i каждого из пульсаров не коррелированы между собой, то при усреднении их влияние на шкалу значительно уменьшается.

Применение оптимального фильтра позволяет лучше разделить вклад в r_i шумов u_i и v и сформировать групповую шкалу на более высоком уровне точности. Для раздельного нахождения вариаций вращения пульсаров и опорной шкалы времени в частотной области использовался следующий алгоритм. Вначале вычисляются преобразование Фурье остаточных уклонений i -го пульсара

$$x_i(\omega) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n r_i e^{j(\omega-1)(t-1)}, \quad (3)$$

где n — длина временного ряда, $j = \sqrt{-1}$.

Спектры мощности ($i = k$) и кросс-спектры ($i \neq k, i, k = 1, 2, \dots, N$) вычисляются по формуле

$$X_{ik} = \frac{1}{2\pi} |x_i(\omega) x_k^*(\omega)|, \quad (4)$$

где $()^*$ обозначает комплексное сопряжение.

Всего кросс-спектров будет $N(N-1)/2$. Искомая оценка сигнала v_i вычисляется следующим образом:

$$v_i = F^{-1} \left[\sqrt{\frac{\bar{S}_v}{S_{ui} + S_v}} x_i(\omega) \right], \quad (5)$$

где S_{ui}, S_v — спектры мощности случайных процессов u_i и v , $S_{ui} + S_v = X_i$, $x_i(\omega)$ — фурье-преобразование r_i , F^{-1} — оператор обратного преобразования Фурье. Величина \bar{S}_v представляет собой усредненный кросс-спектр

$$\bar{S}_v(\omega) = \frac{2}{N(N-1)} \sum_{n=1}^{N(N-1)/2} X_n(\omega), \quad (6)$$

который берется в качестве оценки спектра мощности искомого сигнала $v(t)$. Групповая шкала $v_{\text{ens}}(t)$ записывается как взвешенная сумма всех реализаций

$$v_{\text{ens}}(t) = \sum_{i=1}^{n_r} w_i v_i(t). \quad (7)$$

РЕЗУЛЬТАТЫ

На рис. 2 показан график $n_r = 20$ реализаций групповых пульсарных шкал. Видно, что хотя имеются отдельные уклонения от средней шкалы, превышающие 0.3 мкс, как, например, в начале 2010 г., в целом ход индивидуальных шкал имеет среднеквадратичное уклонение $\sigma_{\text{opt}} = 0.077$ мкс.

Для построения окончательной групповой шкалы $n_r = 20$ реализации групповых пульсарных шкал суммировались с разными весами. Использовались три подхода: 1) использовались равные веса (простое среднее), 2) веса вычислялись на основе минимума величины относительной нестабильности σ_z , 3) веса вычислялись как сумма среднеквадратичных уклонений отдельных пульсарных шкал относительно групповой шкалы, в которую они входят.

На рис. 3 показан ход относительной нестабильности групповых шкал, построенных с разными весами.

На рис. 4 показан ход относительной нестабильности σ_z (дисперсии Тейлора) отдельных групповых шкал времени (Матцакис и др., 1997).

$$\sigma_z(\tau) = \frac{\tau^2}{2\sqrt{5}} \langle C_3^2 \rangle^{1/2}, \quad (8)$$

где τ — интервал времени, на котором вычисляется σ_z , C_3 — коэффициент при кубическом члене в разложении остаточных уклонений вращательной

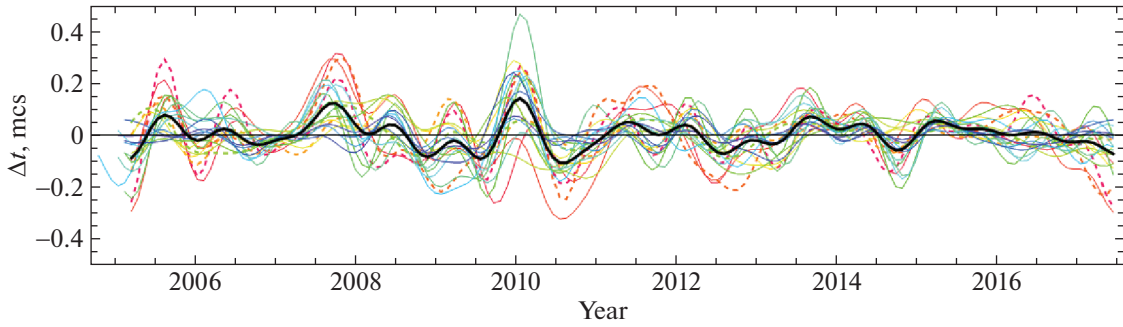


Рис. 2. Реализации $n_r = 20$ групповых пульсарных шкал: черная кривая — простое среднее всех шкал, штриховые кривые — шкалы, в которые входит пульсар J0613–0200. Среднеквадратичное отклонение $\sigma_{\text{срп}} = 0.077$ мкс.

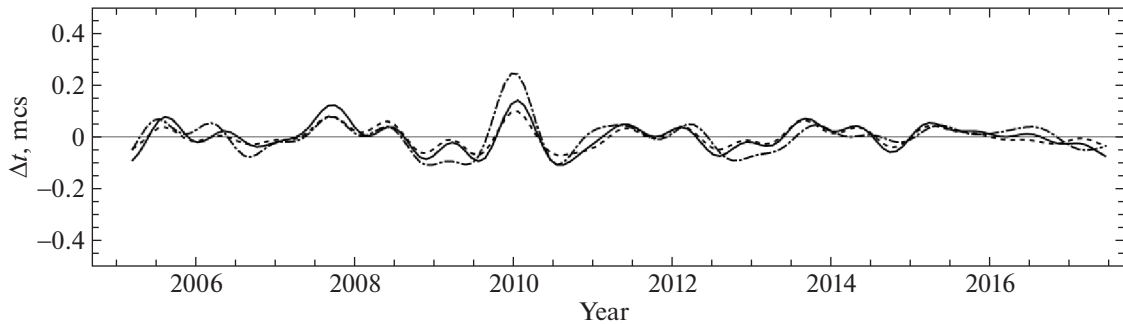


Рис. 3. Ход групповых шкал, построенных с разными весами: сплошная линия — простое среднее (подход 1), штрихпунктирная линия — веса брались на основе минимума относительной нестабильности σ_z (подход 2), штриховая линия — веса вычислялись как сумма среднеквадратичных отклонений отдельных пульсарных шкал относительно групповой шкалы, в которую они входят (подход 3).

фазы пульсара, угловые скобки $\langle \dots \rangle$ означают усреднение по всем наборам C_3 на заданном интервале τ .

На рис. 4 видно, что для некоторых шкал величина σ_z достигает значения $\sim 2 \times 10^{-17}$ на интервале $\tau = 12$ лет. Также отметим, что четыре шкалы показывают восходящий ход относительной нестабильности на интервале $\tau > 8$ лет. Был исследован список пульсаров, входящих в эти шкалы. Оказалось, что это комбинации пульсаров (J0613–0200, J1455–3330, J1640+2224), (J0613–0200, J1455–3330, J1918–0642), (J0613–0200, J1640+2224, J1713+0747) и (J0613–0200, J1713+0747, J1918–0642), в которые везде входит пульсар J0613–0200. Таким образом, в будущих построениях групповых шкал для обеспечения наилучшей относительной нестабильности на интервалах >8 лет следует избегать использования этих пульсарных комбинаций.

ОБСУЖДЕНИЕ

На основе наблюдательных данных, полученных в рамках проекта NANOgrav в 2005–2017 гг. (Арзуманян и др., 2018), построена групповая шкала времени $\text{PT}_{\text{ens}} - \text{TT}(\text{BIPM2017})$ с относительной нестабильностью $\sigma_z = (1.0 \pm 0.9) \times 10^{-16}$ на

интервале 12 лет. Полученная величина относительной нестабильности полностью соответствует предсказанной нами в статье (Родин, Федорова, 2018) величине σ_z в случае использования высокоточных наблюдательных данных. Для достижения такой величины нестабильности потребовалось обобщить метод треуголки на произвольное число пульсаров и разработать специальный метод взвешивания шкал.

Сравнение различных методов взвешивания отчетливо показало, что этому вопросу следует уделять специальное внимание. Так, метод взвешивания на основе минимальных величин σ_z показывает систематически худшую стабильность групповой шкалы на интервалах $\tau < 7$ лет даже в сравнении с простым усреднением. Наилучший результат с точки зрения относительной нестабильности показывает метод взвешивания на основе среднеквадратичных отклонений индивидуальных пульсаров относительно всех возможных пульсарных шкал. Хотя на интервалах $\tau > 8$ лет он сравнивается с простым усреднением.

Анализ шумов хронометрирования пульсаров σ_{psr} без вклада опорной шкалы времени из табл. 1 показал, что наибольший вес 0.441 имеет пульсар

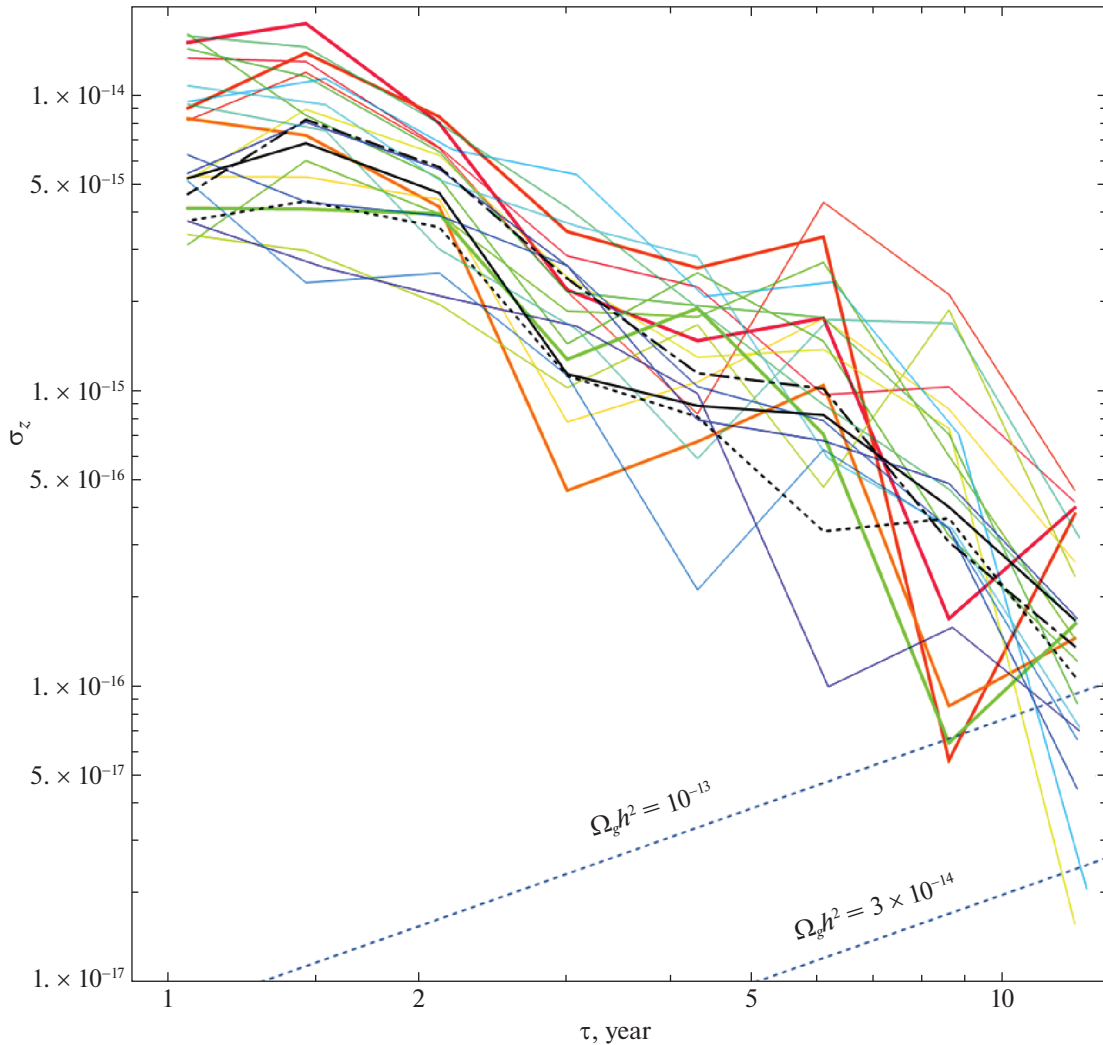


Рис. 4. График относительной нестабильности σ_z пульсарных шкал времени. Цветными жирными линиями выделены шкалы, в которые входит пульсар J0613–0200. Черные сплошная, штрихпунктирная и штриховая линии соответствуют шкалам 1, 2 и 3 соответственно. Синие штриховые линии соответствуют теоретическому ходу σ_z при наличии стохастического гравитационно-волнового фона с относительной плотностью энергии $\Omega_g h^2 = 10^{-13}$ и 3×10^{-14} .

PSR J1713+0747. Поэтому, если вдруг гипотетически представить, что для ведения шкалы у нас имеется возможность наблюдать один единственный пульсар, то совершенно определенно это должен быть PSR J1713+0747.

Ход групповой пульсарной шкалы (см. рис. 3) показал, что в рамках погрешности он совпадает с ходом шкалы TT(BIPM2017) и не показывает каких-либо особенностей, присущих именно пульсарной шкале. Аналогичный вывод был сделан в работе (Хоббс и др., 2020), посвященной анализу хронометрических наблюдений IPTA (International Pulsar Timing Array) 1994–2012 гг.

Вариации хода групповой пульсарной шкалы традиционно используются для оценок верхнего предела плотности энергии гравитационно-волнового фона, возникшего на ранних стадиях

формирования Вселенной $\Omega_g h^2$ (Бертотти и др., 1983), и для верхнего предела амплитуды переменного гравитационного потенциала Ψ_c (Порайко, Постнов, 2014; Порайко и др., 2018). В этой работе на основании величины относительной нестабильности получены величины $\Omega_g h^2 = 10^{-13}$ на частоте 2.6×10^{-10} Гц и $\Psi_c \sim 10^{-16}$ на той же частоте.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработанный в статье обобщенный метод треуголки дает возможность составить рейтинг пульсаров по степени их пригодности для построения пульсарной шкалы времени. Метод применен к равномеризованным хронометрическим данным пульсаров из проекта NANOgrav. Такой подход

искажает высокочастотную, но не затрагивает низкочастотную часть наблюдательных рядов, которая представляет основной интерес. Обобщение метода на неравномерные данные будет рассмотрено в будущих работах.

Анализ наблюдений показал, что пульсар PSR J1713+0747 обладает минимальными собственными вариациями вращения и имеет максимальный вес при построении групповой шкалы.

Из анализа кривых относительной нестабильности σ_z групповых пульсарных шкал следует, что пульсар PSR J0613–0200 нужно использовать с осторожностью, так как групповые шкалы, в которые входит этот пульсар, на интервалах $\tau > 8$ лет показывают ухудшение хода.

На основе среднеквадратичных уклонений вариаций вращения пульсаров относительно набора групповых шкал предложен новый метод вычисления весов пульсаров, что позволило построить групповую пульсарную шкалу с относительной нестабильностью $\sigma_z = (1.0 \pm 0.9) \times 10^{-16}$ на интервале 12 лет.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арзуманян и др. (Z. Arzoumanian, A. Brazier, and S. Burke-Spolaor), *Astrophys. J.* **235**, 37 (2018).
2. Бакер и др. (D.C. Backer, S.R. Kulkarni, C.E. Heiles, M.M. Davis, and W.M. Goss), *Nature* **300**, 615 (1982).
3. Бертоцци и др. (B. Bertotti B.J. Carr, and M.J. Rees), *MNRAS* **203**, 945 (1983).
4. Вернот и др. (F. Vernet, C.E. Calosso, and E. Rubiola), *Three-cornered hat versus Allan covariance 2016 IEEE International Frequency Control Symposium (IFCS)* (Ed. IEEE, New Orleans, LA, USA, 2016), p. 1.
5. Детвелер (S. Detweiler), *Astrophys. J.* **234**, 1100 (1979).
6. Крамер (M. Kramer, I. Stairs, R.N. Manchester, N. Wex, A.T. Deller, W.A. Coles, M. Ali, M. Burgay, et al.), *Phys. Rev. X* **11**(4), article id.041050 (2021).
7. Лазаридес (G. Lazarides, R. Maji, and Q. Shafi), *Phys. Rev. D* **104**, article id.095004 (2021).
8. Матцакис и др. (D.N. Matsakis, J.H. Taylor, and T.M. Eubanks), *Astron. Astrophys.* **326**, 924 (1997).
9. Порайко, Постнов (N.K. Porayko and K.A. Postnov), *Phys. Rev. D* **90**, id.062008 (2014).
10. Порайко и др. (N.K. Porayko, X. Zhu, Y. Levin, L. Hui, G. Hobbs, A. Grudskaya, K. Postnov, M. Bailes, et al.), *Phys. Rev. D* **98**, id.102002 (2018).
11. Родин А.Е., *Астрон. журн.* **96**, 241 (2019) [A.E. Rodin, *Astron. Rep.* **63**, 224 (2019)].
12. Родин (А.Е. Rodin), *MNRAS* **387**, 1583 (2008).
13. Родин (А.Е. Rodin), *Astron. Rep.* **55**, 132 (2011).
14. Родин А.Е., Чен Д., *Астрон. журн.* **88**, 677 (2011) [A.E. Rodin, Din Chen, *Astron. Rep.* **55**, 622 (2011)].
15. Родин А.Е., Федорова В.А., *Астрон. журн.* **95**, 401 (2018) [A.E. Rodin, V.A. Fedorova, *Astron. Rep.* **62**, 378 (2018)].
16. Родин, Чен (А.Е. Rodin and J. Chin), *Astron. Astrophys. Suppl. Ser.* **6**, 157 (2006).
17. Сажин (M.V. Sazhin), *Sov. Astron.* **22**, 36 (1978).
18. Хоббс и др. (G. Hobbs, L. Guo, R.N. Caballero, W. Coles, K.J. Lee, R.N. Manchester, D.J. Reardon, D. Matsakis, et al.), *MNRAS* **491**, 5951 (2020).
19. Чен и др. (S. Chen, R.N. Caballero, Y.J. Guo, A. Chalumeau, K. Liu, G. Shaifullah, K.J. Lee, S. Babak, et al.), *MNRAS* **508**, 4970 (2021).