

НАВЕДЕННОЕ МАГНИТНОЕ ПОЛЕ В АККРЕЦИОННЫХ ДИСКАХ ВОКРУГ НЕЙТРОННЫХ ЗВЕЗД

© 2023 г. А. В. Кузин*

Государственный Астрономический институт им. П.К. Штернберга
Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

Поступила в редакцию 11.09.2023 г.

После доработки 15.10.2023 г.; принята к публикации 20.10.2023 г.

В рентгеновских источниках с пульсациями замагниченную нейтронную звезду окружает аккреционный диск, особенности структуры которого требуют изучения. В частности, дипольное поле звезды может частично проникать в диск и, вмораживаясь в вещество, приводить к появлению наведенного поля в диске. Рост поля может быть ограничен его турбулентной диффузией. В настоящей работе проведен расчет такого наведенного поля. Задача сведена к решению уравнения индукции при наличии диффузии. Получено аналитическое решение уравнения, при этом одновременно рассчитаны радиальная и вертикальная структуры наведенного поля. Радиальная структура близка к ранее предсказанной зависимости от разности скоростей диска и магнитосферы: $b \propto \Omega_s - \Omega_k$, а вертикальная структура поля близка к линейной пропорциональности между полем и высотой над экватором: $b \propto z$. Обсуждается возможность существования нестационарных квазипериодических составляющих наведенного магнитного поля.

Ключевые слова: нейтронные звезды, аккреционные диски, магнитное поле.

DOI: 10.31857/S0320010823100017, **EDN:** OKJNVG

1. ВВЕДЕНИЕ

Вопрос о структуре аккреционного диска, взаимодействующего с магнитным полем центральной звезды, является проблемой, связанной с исследованием рентгеновских источников с замагниченными нейтронными звездами. Цель настоящей работы состоит в расчете наведенного поля в таком диске. Мы рассматриваем случай, когда магнитное поле НЗ частично проникает в диск, причем магнитная ось НЗ наклонена к оси диска. Из-за того, что вещество в диске ионизовано и линии поля увлекаются движением вещества, в диске появляется наведенное поле (Лаи, 1999).

Одну из первых моделей взаимодействия магнитного поля с аккреционным диском предложили Гош и Лэмб (Гош и др., 1977; Гош, Лэмб, 1979а,б) для объяснения наблюдаемого изменения частоты вращения НЗ. Они рассчитали момент сил, который передается от диска звезде магнитным полем, и их теоретические результаты оказались в согласии с имеющимися наблюдениями. Однако наведенное магнитное поле в этой серии работ было введено в упрощенном виде, и Ванг (1987) показал, что модель диска у Гоша и Лэмба несамосогласована. Эти проблемы явились мотивацией для других авторов

строить более правдоподобные модели наведенного магнитного поля.

Кэмпбелл (1987) нашел структуру наведенного поля, решая уравнение индукции в предположениях, похожих на используемые в настоящей работе. В упомянутой работе и в следующей (Кэмпбелл, 1992) была высказана и обоснована идея о пропорциональности наведенного поля разности угловых скоростей звезды и скорости вещества в диске: $b \propto \Omega_s - \Omega(r)$. Исследуя различные механизмы ограничения роста наведенного поля, Ванг (1995, 1997 для наклоненного ротатора) пришел к той же пропорциональности в случае, когда турбулентность в диске уравнивает рост поля. Вангом был также исследован случай пересоединения линий поля над поверхностью диска в областях большой разницы скоростей (см. также Лавлейс и др., 1995).

Опишем основные положения используемой модели. Для моделирования диска важно знать как радиальную, так и вертикальную структуры поля внутри диска. В настоящей работе в выражении для наведенного поля вертикальная и радиальная структуры разделяются, что значительно помогает в понимании устройства этого поля. Коэффициент магнитной диффузии физически обоснованно зависит от радиальной координаты. Из уравнения

*Электронный адрес: alv.kuzin@gmail.com

индукции выведено уравнение для расчета наведенного магнитного поля и к этому уравнению поставлены граничные условия на поверхности диска. Работа сфокусирована на нахождении стационарного аксиально-симметричного магнитного поля, кратко обсуждаются альтернативные возможности.

2. МОДЕЛЬ ДИСКА И НЕЙТРОННОЙ ЗВЕЗДЫ

В работе используется цилиндрическая неподвижная система координат (r, φ, z) , чей центр совмещен с НЗ, вращающейся с частотой Ω_s . Ось вращения НЗ совпадает с осью диска, диск лежит в плоскости $z = 0$. Координата поверхности диска будет обозначена как $z_0(r)$. Магнитное поле НЗ предполагается дипольным с моментом μ , а магнитная ось наклонена к оси вращения на угол χ .

Аккреционный диск геометрически тонкий, относительная полутолщина $h_0 = z_0(r)/r \ll 1$, является параметром модели. Поскольку h_0 в стандартной теории дисковой аккреции слабо зависит от расстояния, предполагается, что $h_0 = \text{const}$. Внутренний радиус вязкого диска обозначим r_0 : его положение зависит от магнитного поля (в том числе наведенного), но в этой работе он также будет рассматриваться как заданная величина. Для простоты считается, что r_0 разграничивает области вещества, коротирующего с НЗ, и вещества в диске. Вместо того, чтобы моделировать переходную зону (как, например, в работе Клузняка и Раппапорта, 2007), переход от одной скорости к другой считается резким. Такой же резкий переход предполагается на поверхностях диска. Вещество в диске имеет кеплеровскую угловую скорость (отклонения от кеплеровости неважны для задачи, см. Кэмпбелл, 1987), а вне диска коротирует с НЗ:

$$V = \begin{cases} \left(\frac{GM}{r}\right)^{1/2} & \text{в диске,} \\ \Omega_s r & \text{в магнитосфере.} \end{cases} \quad (1)$$

Будем считать, что магнитное поле состоит из дипольных компонент, которые проникают в диск, и дополнительного тороидального поля:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_{\text{НЗ}}^{\text{dip}} + b_\varphi \mathbf{e}_\varphi = B_r \mathbf{e}_r + (B_\varphi + b_\varphi) \mathbf{e}_\varphi + B_z \mathbf{e}_z, \quad (2)$$

где $b_\varphi = b_\varphi(r, \varphi, z)$ — наведенное поле.

Обычным образом определены радиус коротации $r_c = (GM/\Omega_s^2)^{1/3}$ и параметр быстроты $\omega = \Omega_s/\Omega_k(r_0) = (r_0/r_c)^{3/2}$. Все результаты в работе приведены для параметров НЗ, характерных для аккрецирующих миллисекундных пульсаров: $M = 1.4M_\odot$, $\mu = 10^{26}$ Гс · см³, $f = 200$ Гц.

3. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Начнем с известного уравнения индукции магнитного поля (см., например, Насо, Миллер, 2010, 2011):

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \text{rot}([\mathbf{v} \times \mathbf{B}] - \eta \text{rot} \mathbf{B}). \quad (3)$$

Коэффициент магнитной диффузии η считается турбулентной природы и полагается пропорциональным “коэффициенту кинематической вязкости”: $\eta \propto \nu_T$. В книге Липуновой и др. (2018) приведено выражение для ν_T : $\nu_T = 2\alpha z_0^2 \Omega_k / 3\Pi_1$, где Π_1 — слабо зависящий от расстояния параметр: $\Pi_1 \approx 6 - 7$. Тогда запишем коэффициент магнитной диффузии в диске

$$\eta = \Omega_k r^2 / C, \quad (4)$$

где C — коэффициент, слабо зависящий от расстояния. Если ввести коэффициент пропорциональности $\eta = \epsilon \nu_T$, то коэффициент $C = 3\Pi_1 / 2\alpha \epsilon h_0^2$. Будем считать C не зависящим от расстояния, поскольку и h_0 , и Π_1 — слабые функции r . В следующем разделе подробно обсуждаются возможные соотношения между коэффициентами магнитной диффузии внутри и вне диска. В дальнейшем понадобится выражение для дипольного поля в цилиндрических координатах:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^{\text{dip}} = & \frac{\mu}{(r^2 + z^2)^{5/2}} [(2r^2 \sin \chi \cos \varphi' + \\ & + 3rz \cos \chi - z^2 \sin \chi \cos \varphi') \mathbf{e}_r + \\ & + (\sin \chi \sin \varphi' (r^2 + z^2)) \mathbf{e}_\varphi + \\ & + (-r^2 \cos \chi + 3rz \sin \chi \cos \varphi' + 2z^2 \cos \chi) \mathbf{e}_z]. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь угол φ' во вращающейся системе отсчета НЗ связан с углом в инерциальной системе отсчета соотношением $\varphi' = \varphi - \Omega_s t$.

3.1. Уравнение диффузии поля

Чтобы получить верхнюю оценку на наведенное поле внутри диска, допустим, что дипольное поле НЗ полностью проникает в диск (обсуждение этого предположения приведено дальше).

Учтем, что в силу квазистационарного характера изменения поля со временем, и поскольку поле зависит от времени лишь через азимутальный угол $\mathbf{B}(\varphi', \dots) = \mathbf{B}(\varphi - \Omega_s t, \dots)$, производную по времени можно заменить на производную по углу: $\frac{\partial}{\partial t} = -\Omega_s \frac{\partial}{\partial \varphi}$. Воспользуемся также соотношениями $\text{rot} \mathbf{B}^{\text{dip}} = \mathbf{0}$, $\text{grad} \eta = (\eta/2r) \mathbf{e}_r$. Тогда проекция уравнения индукции на тороидальное направление принимает вид

$$-\Omega_s \frac{\partial B_\varphi}{\partial \varphi} = \frac{\partial (V B_z)}{\partial z} + \frac{\partial (V B_r)}{\partial r} + \quad (6)$$

$$+ \eta \left(\Delta b_\varphi - \frac{b_\varphi}{2r^2} + \frac{1}{2r} \frac{\partial b_\varphi}{\partial r} \right).$$

Уравнение требует граничных условий, а выражение в последних скобках в (6) неудобно для их постановки. Полезна замена $\tilde{b}_\varphi = (r/r_c)^{1/4} b_\varphi$, которая позволяет избавиться от первых производных по r в скобках. Подставляя в (6) скорость (1) и магнитное поле (2) с дипольным полем, заданным (5) (причем удерживаем члены вида z/r лишь до первой степени в силу их малости), получаем уравнение индукции в виде

$$\begin{aligned} \left(\frac{r_c}{r} \right)^{1/4} \left(\Delta \tilde{b}_\varphi - \frac{9}{16r^2} \tilde{b}_\varphi + \frac{C}{r^2} \frac{\Omega_s}{\Omega_k} \frac{\partial \tilde{b}_\varphi}{\partial \varphi} \right) = & \quad (7) \\ = \frac{C\mu}{r^5} \left(4 + \frac{\Omega_s}{\Omega_k} \right) \sin \chi \cos \varphi + \frac{9C\mu}{2r^6} z \cos \chi - & \\ - \frac{C\mu D_z}{r^5 \Omega_k} (-\cos \chi + 3z/r \cos \varphi \sin \chi) - & \\ - \frac{C\mu D_r}{r^5 \Omega_k} (2 \sin \chi \cos \varphi + 3z/r \cos \chi), & \end{aligned}$$

где коэффициенты D_r и D_z содержат в себе дельта-функции, возникающие из производных скорости:

$$D_r = \Omega_s r_0 \frac{1 - \omega}{\omega} \delta(r - r_0), \quad (8)$$

$$D_z = r(\Omega_s - \Omega_k)(\delta(z - z_0) - \delta(z + z_0)). \quad (9)$$

Угол $\varphi = \Omega_s t + \varphi'$ входит в уравнение (7) только через $\cos \varphi$, значит, наведенное поле состоит только из не зависящей от угла стационарной составляющей и, возможно, компонент, зависящих от угла как $\cos \varphi$ и $\sin \varphi$. Обозначим $b_\varphi = b(r, z) + b_1(r, z) \cos \varphi + b_2(r, z) \sin \varphi$. Первый и второй члены справа в уравнении (7) — это источники для b и b_1 . Третий и четвертый члены ответственны за разрывность полей на поверхностях и внутреннем краю диска; эти члены будут использованы при получении граничных условий. Для $\tilde{b} = \tilde{b}(r, z)$ внутри диска получается уравнение

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \tilde{b}}{\partial r} \right) - \frac{9\tilde{b}}{16r^2} + \frac{\partial^2 \tilde{b}}{\partial z^2} = & \quad (10) \\ = \frac{9C}{2} \frac{z}{r^6} \left(\frac{r}{r_c} \right)^{1/4} \mu \cos \chi. & \end{aligned}$$

Граничное условие на поверхности диска будет условием Неймана. Чтобы получить вид этого условия, проинтегрируем (7) по малому отрезку между близкими точками, одна из которых находится в диске, а другая — в магнитосфере [$z_0(1 - \varepsilon), z_0(1 + \varepsilon)$], где $\varepsilon \ll 1$. Перепишем уравнение

(7) для аксиально-симметричной компоненты поля, оставив только члены, которые после такого интегрирования дадут не бесконечно малые величины:

$$\begin{aligned} \eta \left(\frac{r_c}{r} \right)^{1/4} \frac{\partial^2 \tilde{b}}{\partial z^2} = & \quad (11) \\ = \frac{\mu \cos \chi}{r^3} (V_m - V_d) \delta(z - z_0) + \dots & \end{aligned}$$

Видно, что разрыв производной поля $\frac{\partial \tilde{b}}{\partial z}$ на поверхности диска определяется разницей скоростей в диске и в магнитосфере. Чтобы из уравнения (11) получить условие на производную, нужно узнать, как она связана с производной в магнитосфере. Это можно сделать двумя способами.

Первый подход (Насо, Миллер, 2010, 2011; Рековски и др., 2000) опирается на предположение, что в диске и магнитосфере за магнитную диффузию отвечают похожие турбулентные механизмы, но из-за низкой плотности и высокой температуры над диском (в короне) $\eta_{\text{magn}} \gg \eta_{\text{disk}}$. Тогда переместим η в правую часть уравнения (11) и проинтегрируем по малому отрезку, содержащему поверхность диска. Получаем, используя (4),

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{b}}{\partial z} \Big|_{z=z_0(1+\varepsilon)} - \frac{\partial \tilde{b}}{\partial z} \Big|_{z=z_0(1-\varepsilon)} = & \quad (12) \\ = -\frac{C\mu \cos \chi}{2} \left(1 - \frac{\Omega_s}{\Omega_k} \right) \frac{1}{r^4} \left(\frac{r}{r_c} \right)^{1/4}. & \end{aligned}$$

Теперь необходимо связать $\frac{\partial \tilde{b}}{\partial z}$ в диске и в магнитосфере. Для оценки заметим, что в уравнении (3) член $\text{rot}[\mathbf{v} \times \mathbf{B}]$ под поверхностью того же порядка, что и над поверхностью на заданном радиусе¹. Таким образом, учитывая стационарность, можно написать

$$\eta_{\text{magn}} \frac{\partial^2 \tilde{b}_{\text{magn}}}{\partial z^2} \sim \eta_{\text{disk}} \frac{\partial^2 \tilde{b}_{\text{disk}}}{\partial z^2}. \quad (13)$$

Пусть наведенное поле в диске меняется на масштабе высот $\Delta z \sim z_0$. Масштаб изменения b (или \tilde{b}) в магнитосфере обозначим за z_m . Тогда заменой производных на отношения из (13) следует

$$\eta_{\text{magn}} \frac{\tilde{b}_{\text{magn}}}{z_m^2} \sim \eta_{\text{disk}} \frac{\tilde{b}_{\text{disk}}}{z_d^2}. \quad (14)$$

Ожидается, что недипольная компонента поля над и под поверхностью должна быть одного порядка, поэтому

$$\frac{\partial \tilde{b}_{\text{magn}}}{\partial z} \sim \frac{\tilde{b}_{\text{magn}}}{z_m} \sim \sqrt{\frac{\eta_d}{\eta_{\text{magn}}}} \frac{\partial \tilde{b}_{\text{disk}}}{\partial z} \ll \frac{\partial \tilde{b}_{\text{disk}}}{\partial z}. \quad (15)$$

¹ Только полоидальное поле вносит вклад в $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$, и это полоидальное поле в используемой модели есть просто дипольная полоидальная компонента (см. уравнение (2)).

Таким образом, в первом подходе можно пренебречь производной в магнитосфере и из (12) получить

$$\left. \frac{\partial \tilde{b}}{\partial z} \right|_{z=z_0-\varepsilon} = \frac{C\mu \cos \chi}{2} \left(1 - \frac{\Omega_s}{\Omega_k}\right) \frac{1}{r^4} \left(\frac{r}{r_c}\right)^{1/4}. \quad (16)$$

Альтернативный способ описания коэффициента магнитной диффузии в магнитосфере состоит в том, чтобы предположить полное отсутствие вещества в магнитосфере, т.е. $\eta_{\text{magn}} = 0$ (Кэмпбелл, 1992). В этом случае, проинтегрировав (11), получаем

$$\left. \frac{\partial \tilde{b}}{\partial z} \right|_{z=z_0-\varepsilon} = C\mu \cos \chi \left(1 - \frac{\Omega_s}{\Omega_k}\right) \frac{1}{r^4} \left(\frac{r}{r_c}\right)^{1/4}. \quad (17)$$

Для нас предпочтителен первый способ постановки граничных условий, поскольку корона над диском, вероятно, существует, и этот способ будет использован в настоящей работе. Существуют вопросы к выбранному подходу: если корона коротирует с НЗ, она, вероятно, не будет турбулентной, и неясно, действительно ли коэффициент магнитной диффузии в магнитосфере будет выше, чем в диске. Примечательно, однако, как мало результат зависит от способа постановки условий.

Граничное условие на нижней поверхности диска ставится таким же образом. На внутреннем радиусе по аналогии запишем

$$\left. \frac{\partial \tilde{b}}{\partial r} \right|_{r=r_0} = -\frac{3C(1-\omega)}{2} \frac{1}{r_0^4} \left(\frac{r_0}{r_c}\right)^{1/4} \frac{z}{r_0} \mu \cos \chi. \quad (18)$$

Отметим пропорциональность компоненты b дипольному моменту и косинусу угла наклона: $b \propto \mu \cos \chi$.

Достаточно подсчитать число граничных условий, чтобы понять, что их недостаточно, необходимо еще одно. Известно (Лавлейс и др., 1995; Узденский и др., 2002а,б), что при наличии диска линии поля сохраняют дипольную конфигурацию только рядом с НЗ. Вдали же от центральной звезды линии должны, пересоединяясь, размыкаться. Очевидно, на больших расстояниях от звезды наведенного поля нет. Поставим дополнительное условие первого рода на некотором внешнем радиусе, который назовем r_{out} . Этот внешний радиус в нашей модели не определяется самосогласованно и является

поэтому еще одним параметром. Мы обозначим за a внешний радиус, нормированный на радиус коротации: $a = r_{\text{out}}/r_c$.

Полная задача для \tilde{b} выглядит так:

$$\begin{cases} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \tilde{b}}{\partial r} \right) - \frac{9\tilde{b}}{16r^2} + \frac{\partial^2 \tilde{b}}{\partial z^2} = \\ = \frac{9C}{2} \frac{z}{r^6} \left(\frac{r}{r_c}\right)^{1/4} \mu \cos \chi, \\ \left. \frac{\partial \tilde{b}}{\partial z} \right|_{z=\pm z_0} = \frac{C}{2} \frac{1}{r^4} \left(1 - \frac{\Omega_s}{\Omega_k}\right) \left(\frac{r}{r_c}\right)^{1/4} \mu \cos \chi, \\ \left. \frac{\partial \tilde{b}}{\partial r} \right|_{r=r_0} = -\frac{3C}{2r_0^5} (1-\omega) \left(\frac{r_0}{r_c}\right)^{1/4} z \mu \cos \chi, \\ \tilde{b}(r = r_{\text{out}}) = 0. \end{cases} \quad (19)$$

Нормируем поле \tilde{b} на величину $C\mu \cos \chi$ и везде далее будем обозначать ее как μ_c . Перепишем (19) для новой функции β , для которой граничные условия на поверхности диска будут тривиальными:

$$\begin{aligned} \tilde{b}(r, z) &= \\ &= \frac{\mu_c}{2r^4} \left(1 - \frac{\Omega_s}{\Omega_k}\right) \left(\frac{r}{r_c}\right)^{1/4} z + \frac{\mu_c}{r_c^3} \tilde{\beta}(\rho, \zeta) \equiv \\ &\equiv \tilde{b}_0(r, z) + \frac{\mu_c}{r_c^3} \tilde{\beta}(\rho, \zeta). \end{aligned} \quad (20)$$

Здесь введены безразмерные переменные $\rho = r/r_c$, $\zeta = z/z_0 = z/rh_0$. Прежде чем выписать задачу для $\tilde{\beta}$, обсудим подробнее составляющую поля \tilde{b}_0 в (20); \tilde{b}_0 определяется ненулевыми граничными условиями второго рода на поверхности диска и пропорциональна разрыву в скорости вещества на поверхности диска. Перейдя от \tilde{b}_0 обратно к b_0 и подставив в качестве вертикальной координаты поверхность диска $z = z_0(r) = h_0 r$, получаем $b_0^{\text{surf}} = \mu_c h_0 / 2 \cdot (1 - \Omega_s / \Omega_k) / r^3$. С точностью до множителя это равно выражению, полученному Вангом для наведенного поля на поверхности диска в случае, когда турбулентная диффузия в диске ограничивает генерацию поля. Это выражение часто используется как простая аналитическая оценка для наведенного поля на поверхности диска (см., например, работу Клузняка и Раппапорта, 2007). Таким образом, выражение $b_0(r, z)$ описывает распределение по вертикали того поля, значение которого на поверхности было найдено Вангом.

Оставшаяся же величина $\tilde{\beta}$ определяется граничными условиями на внутреннем краю диска и правой частью уравнения (19) и Вангом не была рассмотрена. Для удобства сравнения результатов

настоящей статьи с результатами других работ коэффициент C будет полагаться таким, чтобы выражение для b_0^{surf} в точности совпадало с выражением, использованным Клузнякам и Раппапортом, т.е. $C = 2/h_0$. Для $\tilde{\beta}(r, z)$ мы получаем следующую задачу:

$$\begin{cases} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \tilde{\beta}}{\partial \rho} \right) - \frac{9\tilde{\beta}}{16\rho^2} + \frac{1}{h_0^2 \rho^2} \frac{\partial^2 \tilde{\beta}}{\partial \zeta^2} = f(\rho, \zeta), \\ \left. \frac{\partial \tilde{\beta}}{\partial \zeta} \right|_{\zeta=1} = 0, \tilde{\beta}(\zeta = 0) = 0, \\ \left. \frac{\partial \tilde{\beta}}{\partial \rho} \right|_{\rho=\omega^{2/3}} = \frac{3}{4} \frac{1+\omega}{\omega^{8/3}} \omega^{1/6} \zeta, \\ \beta(\rho = a) = \frac{a^{3/2} - 1}{a^3} a^{1/4} \zeta, \\ f(\rho, \zeta) = \frac{9}{2} \frac{\zeta}{\rho^5} (\rho^{3/2} - 1) \rho^{1/4}, \end{cases} \quad (21)$$

которую решаем в следующем подразделе. Сейчас заметим, что в случае очень тонкого диска $h_0 \ll \ll 1$ уравнение дает $\beta(r, z) = 0$. Это значит, что отклонение полного наведенного поля b от “ванговского поля” b_0 отсутствует в случае очень малой относительной толщины диска и растет с ростом h_0 .

3.2. Решение для наведенного поля

Мы предполагаем, что

$$\frac{\partial^2 \tilde{\beta}}{\partial z^2} \approx \frac{1}{h_0^2 r^2} \frac{\partial^2 \tilde{\beta}}{\partial \zeta^2}.$$

Строго это неверно, но корректное выражение было бы слишком сложно для любых аналитических исследований и метод разделения переменных был бы неприменим. Причина возникшего усложнения в том, что область решения — усеченная трапеция, и граничные условия выставлены в виде $\frac{\partial \tilde{\beta}}{\partial z} = \dots$, вместо каноничной формы $\frac{\partial \tilde{\beta}}{\partial \mathbf{n}} = \dots$. Замена $\frac{\partial \tilde{\beta}}{\partial z}$ на $\frac{1}{h_0 r} \frac{\partial \tilde{\beta}}{\partial \zeta}$ в уравнении эквивалентна замене производных по z -координате в граничных условиях на производные вдоль нормали. Поскольку угол раскрытия диска $2h_0 \ll 1$, можно ожидать, что наше приближение приведет лишь к небольшим ошибкам. Подобные проблемы можно обойти, пользуясь сферической системой координат (ССК). Уравнение в ССК решается даже легче, чем в цилиндрической СК (ЦСК). С другой стороны, упомянутое упрощение позволяет получить “вертикальные” собственные функции в ЦСК в виде простых синусов $\sin(\mu_n \zeta)$ (см. далее), в то время как аналогичные собственные функции

в ССК оказываются сложнее. Сравнение наведенного магнитного поля, рассчитанного в ЦСК (с упомянутыми упрощениями) и в ССК, показано позднее на рис. 3. Хотя отличия заметны, они несущественны в контексте моделирования структуры диска.

Очевидно, $\tilde{\beta}$ — нечетная функция ζ . Рассмотрим задачу на отрезке $[0, 1]$ вместо $[-1, 1]$, заменив условие на нижней границе условием на экваторе: $\beta(\zeta = 0) = 0$. Ищем решение в виде

$$\tilde{\beta}(\rho, \zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(\rho) \sin(\mu_n \zeta), \quad (22)$$

где введено обозначение $\mu_n = \pi(n + 1/2)$. Для коэффициентов $B_n(\rho)$ получаем одномерные краевые задачи. Используя линейность всех уравнений, разделим B на сумму двух функций: $B(\rho) = u(\rho) + v(\rho)^2$. Задача для u будет включать нулевые граничные условия и ненулевой источник, а задача для v будет без источника, но с ненулевыми граничными условиями:

$$\begin{cases} \rho(\rho u'_n)' - M_n^2 u_n = \rho^2 f_n(\rho), \\ u'_n(\omega^{2/3}) = 0, u_n(a) = 0, \\ f_n(\rho) = 9 \frac{(-1)^n}{\mu_n^2} \frac{\rho^{1/4}}{\rho^5} (\rho^{3/2} - 1); \end{cases} \quad (23)$$

$$\begin{cases} \rho(\rho v'_n)' - M_n^2 u_n = 0, \\ v'_n(\omega^{2/3}) = 2 \frac{3}{4} \frac{(-1)^n}{\mu_n^2} \frac{1+\omega}{\omega^{8/3}} \omega^{1/6}, \\ v_n(a) = 2 \frac{(-1)^n}{\mu_n^2} \frac{a^{3/2} - 1}{a^3} a^{1/4}. \end{cases} \quad (24)$$

Здесь обозначено $M_n^2 = 9/16 + \mu_n^2/h_0^2$. Задача для v имеет решение

$$v_n(\rho) = A_n \rho^{M_n} + C_n \rho^{-M_n}, \quad (25)$$

где коэффициенты A, C легко найти подстановкой этого выражения в граничные условия.

Задачу для u можно решить так. Решается задача Штурма–Лиувилля с соответствующими граничными условиями:

$$\begin{cases} \frac{1}{\rho} (\rho \tilde{y}'_{mn})' - \frac{M_n^2}{\rho^2} \tilde{y}_{mn} + \lambda_{mn} \tilde{y}_{mn} = 0, \\ + \text{нулевые Г.У.} \end{cases} \quad (26)$$

² Этот шаг необходим для аналитического решения (21), но на самом деле проще и быстрее решать полученные краевые задачи для $B_n(r)$ (для приемлемого числа n) численно. В любом случае аналитическое решение полезно, хотя бы для тестирования численного кода.

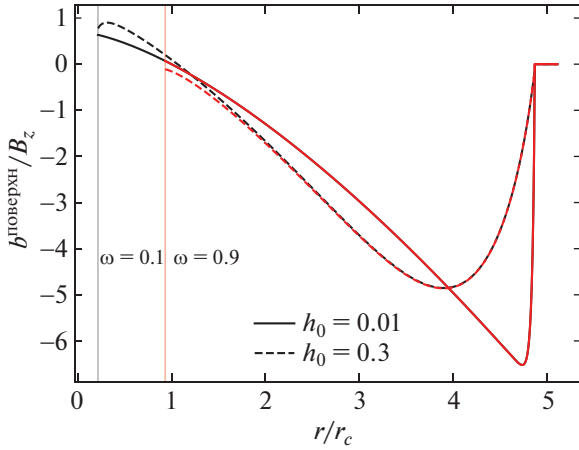


Рис. 1. Зависимость наведенного поля на поверхности диска b^{surf} , нормированного на вертикальное дипольное поле B_z , от расстояния до НЗ в единицах радиуса короткоты ($\omega = 0.1$ и $\omega = 0.9$ соответствуют черному и красному цвету, внутренние радиусы обозначены на рисунке вертикальными линиями). Для каждой ω были приняты две относительные полутолщины диска (см. легенду).

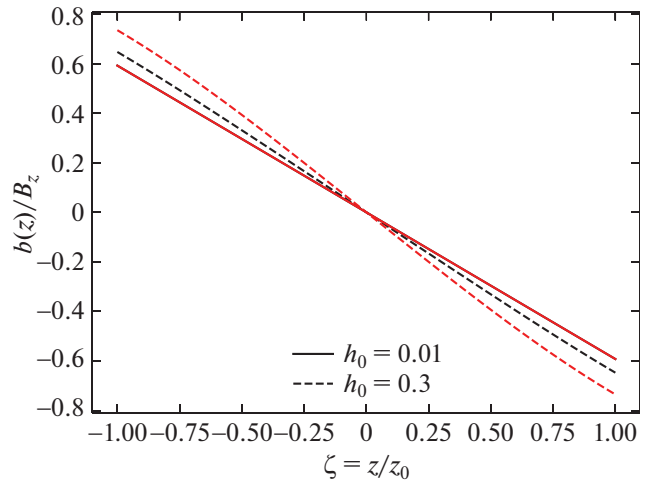


Рис. 2. Зависимость наведенного поля внутри диска $b(z)$, нормированного на вертикальное дипольное поле B_z , от безразмерной вертикальной координаты ζ на фиксированном расстоянии от НЗ $r = 1.5r_c$. Приведенные графики соответствуют тем же четырем комбинациям ω и h_0 , что и на рис. 1. Для случая тонкого диска $h_0 = 0.01$ линии, соответствующие $\omega = 0.1$ и 0.9 , почти слились друг с другом.

Собственные функции (26) представляют собой комбинации функций Бесселя и Неймана:

$$\begin{aligned} \tilde{y}_{mn} = & J_{M_n}(\rho\sqrt{\lambda_{mn}}) - \\ & - N_{M_n}(\rho\sqrt{\lambda_{mn}}) \frac{J_{M_n}(a\sqrt{\lambda_{mn}})}{N_{M_n}(a\sqrt{\lambda_{mn}})}, \end{aligned} \quad (27)$$

а собственные значения — это корни уравнения

$$\frac{J'_{M_n}(\omega^{2/3}\sqrt{\lambda_{mn}})}{J_{M_n}(a\sqrt{\lambda_{mn}})} = \frac{N'_{M_n}(\omega^{2/3}\sqrt{\lambda_{mn}})}{N_{M_n}(a\sqrt{\lambda_{mn}})}. \quad (28)$$

Тогда

$$u_n(\rho) = - \sum_m \frac{f_{mn}}{\lambda_{mn}} \tilde{y}_{mn}(\rho). \quad (29)$$

Здесь

$$f_{mn} = \frac{1}{\|\tilde{y}_{mn}\|^2} \int_{\omega^{2/3}}^a f(\rho) \tilde{y}_{mn}(\rho) \rho d\rho, \quad (30)$$

$$\|\tilde{y}_{mn}\|^2 = \int_{\omega^{2/3}}^a \rho \tilde{y}_{mn}^2 d\rho. \quad (31)$$

Итак, аналитическое решение было построено с помощью (20), (22), (25), (29). На рис. 1 показано распределение наведенного поля на поверхности диска по радиусу для разных параметров быстроты ω (т.е. для разных внутренних радиусов диска: $r_0 = \omega^{2/3}r_c$) и разных относительных полутолщин

диска h_0 . Для иллюстрации результатов на всех рисунках внешний радиус в задаче (максимальный радиус, на котором поле НЗ сохраняет дипольную конфигурацию) r_{out} полагается равным радиусу светового цилиндра как максимальному расстоянию, на котором могло бы существовать дипольное поле, связанное со вращающейся НЗ. Видно, что при заданной толщине диска кривые для разных ω вдали от внутреннего края самоподобны, т.е. положение r_0 влияет на наведенное поле лишь вблизи внутреннего края диска.

На рис. 2 показана вертикальная структура наведенного поля при тех же параметрах. Профили распределения наведенного поля по безразмерной вертикальной координате при малых толщинах неотличимы от прямой пропорциональности: $b(\zeta) \propto \zeta$. При больших толщинах, хотя зависимость становится сложнее, она все еще с некоторой точностью может быть описана прямой. Дело в том, что вклад в наведенное поле “ванговской компоненты” b_0 (см. уравнение (20)) всегда линейен по z , но при малых толщинах β тоже линейна. Это видно из безразмерного уравнения (21) для $\tilde{\beta}$: при $h_0 \ll 1$ решение есть линейная функция z . Если относительная полутолщина сравнима с единицей, то уравнение будет иметь решение более сложной формы, что и видно на рис. 2.

4. ОБСУЖДЕНИЕ

Было рассчитано магнитное поле, наводящееся в аккреционном диске из дипольного поля НЗ в

предположении, что рост этого поля ограничен турбулентной диффузией магнитного поля. Для модели, используемой в настоящей работе, необходимы три внешних параметра: параметр быстроты ω , относительная полутолщина диска h_0 и внешний радиус (в единицах радиуса коротации) области, на котором исчезнет наведенное поле a . Таким образом, при моделировании аккреционного диска с использованием такой модели параметры ω , т.е. внутренний радиус диска, и толщина диска должны вычисляться самосогласованно.

4.1. Аксиально-симметричная компонента

Кэмпбелл (1987) сделал похожие предположения о механизме диссипации поля (турбулентная диффузия) и нашел аксиально-симметричное стационарное наведенное поле в форме интеграла со сложным ядром. Поле было рассчитано на луче $[r_0, +\infty)$, а вертикальная структура получена только в неявном виде³. Эту проблему удалось избежать, представив b в виде вклада $b_0 \propto (\Omega_s - \Omega_k)z$ и модификации β , причем в ряде для β вертикальная координата входит простым образом. Анализ уравнений, как правило, удобнее анализа двумерного интеграла. К тому же, Кэмпбелл (1987) принял две модели для магнитной диффузии: $\eta \sim \text{const}$ и $\eta \propto r^2$, тогда как для диска с постоянной относительной полутолщиной ближе аппроксимация $\eta \propto r^{1/2}$.

Меняя положение, на котором ставится внешнее граничное условие, можно учесть пересоединение линий поля над поверхностью диска. Считается (Ванг, 1995; Лавлейс, 1995), что пересоединение приводит к тому, что наведенное поле не может стать больше вертикального, т.е. $|b/B_z| \lesssim 1$. Этого можно добиться и в используемой в этой работе модели, уменьшив параметр a . Для относительной полутолщины $h = 0.01$ можно добиться $|b/B_z| < 1$ при $a \lesssim 1.9$, а для $h = 0.3$ при $a \lesssim 2.2$. Приходим к тому, что, учитывая пересоединение, зона, в которой линии поля НЗ связаны с диском, должна быть узкой (Мэтт, Пудриц, 2005).

4.2. Возможные вклады, зависящие от азимута

Неясно, в какой мере компоненты дипольного поля, зависящие от азимута, будут проникать в диск. В случае, если они вообще не будут проникать (например, Лаи (1999) попытался построить модель наведенного поля в этом случае в "гибридной модели"), наведенное поле выражается через $b(r, z)$.

³ Граничные условия на поверхностях диска не ставились автором в явном виде.

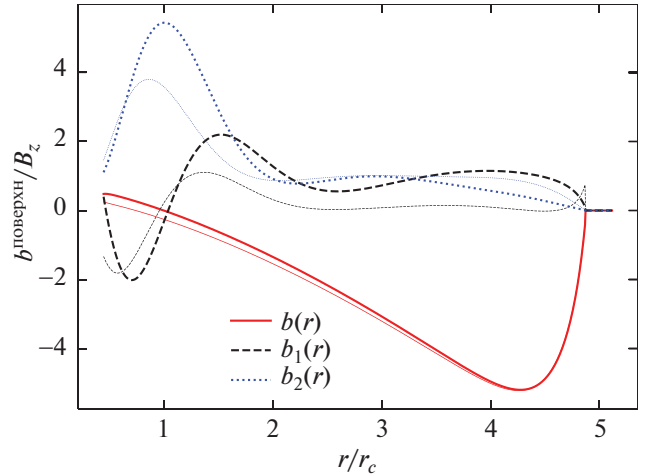


Рис. 3. Сравнение наведенного поля, рассчитанного в цилиндрической системе с использованием алгоритма, описанного в тексте (толстые линии), с полем, рассчитанным в сферической системе численно (тонкие линии того же цвета). Относительная полутолщина диска $h_0 = 0.1$, параметр быстроты $\omega = 0.3$. Показано поле b и коэффициенты Фурье b_1, b_2 (см. текст) на поверхности диска.

С другой стороны, если бы эти компоненты проникали, описанный подход позволил бы найти решение для несимметричных компонент наведенного поля. Согласно уравнению (7) (для его вывода было сделано предположение о полном проникновении дипольного поля НЗ в диск), полное наведенное поле b_φ состоит из уже найденного b и компонент, пропорциональных косинусу и синусу азимутального угла. Тогда полное наведенное поле $b_\varphi = b(r, z) + b_1(r, z) \cos \varphi + b_2(r, z) \sin \varphi$. По аналогии с алгоритмом вывода уравнения для b и его решения можно вывести уравнения для коэффициентов Фурье $b_{1,2}$ и решить их. Численное решение таких уравнений приведено на рис. 3 (также проиллюстрировано, как упрощение $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{h_0 r} \frac{\partial}{\partial x}$ влияет на решение). Можно видеть, что компоненты $b_{1,2}$, вообще говоря, не малы. Если они существуют, они будут вносить значительный вклад в давление магнитного поля.

Можно предположить, что зависящая от угла компонента поля НЗ, для заданного угла меняющаяся периодически с частотой вращения НЗ, проникает в диск лишь частично. Можно рассчитать эффект экранировки, оценив толщину скин-слоя с коэффициентом магнитной диффузии, используемым в этой работе, но такая работа выходит за рамки настоящей статьи. Таким образом, коэффициенты Фурье $b_{1,2}$, приведенные на рис. 3, являются оценками сверху для возможных нестационарных составляющих наведенного магнитного поля.

Очевидно, что $b_{1,2} \propto \mu \sin \chi$, т.е. отсутствуют, если магнитная ось и ось вращения НЗ сонаправлены.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Настоящая работа посвящена моделированию наведенного поля в аккреционном диске вокруг замagnetической звезды с магнитной осью, наклоненной к оси вращения диска. Из уравнения индукции выведено дифференциальное уравнение в частных производных для наведенного поля в предположении о полном проникновении дипольного поля центральной звезды в диск. Эта работа фокусируется на нахождении аксиально-симметричной компоненты: методом разделения переменных решается полученное уравнение в плоскости (r, z) . Таким образом, найдена и радиальная, и вертикальная структуры наведенного поля. Коротко обсуждаются также возможные компоненты поля, не обладающие цилиндрической симметрией, и приводится результат их моделирования в качестве оценки сверху реального несимметричного наведенного поля.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (грант № РНФ 21-12-00141). Автор выражает благодарность Г.В. Липуновой за продуктивное обсуждение манускрипта.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ванг (Y.-M. Wang), *Astron. Astrophys.* **183**, 257 (1987).
2. Ванг (Y.-M. Wang), *Astrophys. J.* **449**, 153 (1995).
3. Ванг (Y.-M. Wang), *Astrophys. J.* **475**, 135 (1997).
4. Гош и др. (P. Ghosh, F.K. Lamb, and C.J. Pethick), *Astrophys. J.* **217**, 578 (1977).
5. Гош, Лэмб (P. Ghosh and F.K. Lamb), *Astrophys. J.* **232**, 259 (1979).
6. Гош, Лэмб (P. Ghosh and F.K. Lamb), *Astrophys. J.* **234**, 296 (1979).
7. Клужняк, Раппапорт (W. Kluźniak and S. Rappaport), *Astrophys. J.* **671**, 1990 (2007).
8. Кэмпбелл (C.G. Campbell), *MNRAS* **229**, 405 (1987).
9. Кэмпбелл (C.G. Campbell), *Geophys. Astro. Fluid.* **63**, 179 (1992).
10. Лавлейс и др. (R.V.E. Lovelace, M.M. Romanova, and G.S. Bisnovatyi-Kogan), *MNRAS* **275**, 244 (1995).
11. Лай (D. Lai), *Astrophys. J.* **524**, 1030 (1999).
12. Липунова и др. (G. Lipunova, K. Malanchev, N. Shakura, and N. Shakura), *Astrophys. Space Sc. L.* **454** (2018).
13. Мэтт, Пудриц (S. Matt and R.E. Pudritz), *Astrophys. J.* **632**, 135 (2005).
14. Насо, Миллер (L. Naso and J.C. Miller), *Astron. Astrophys.* **521**, 31 (2010).
15. Насо, Миллер (L. Naso and J.C. Miller), *Astron. Astrophys.* **531**, 163 (2011).
16. Рековски и др. (M.V. Rekowski, G. Rüdiger, and D. Elstner), *Astron. Astrophys.* **353**, 813 (2000).
17. Узденский и др. (D.A. Uzdensky, A. Königl, and C. Litwin), *Astrophys. J.* **565**, 1191 (2002).
18. Узденский и др. (D.A. Uzdensky, A. Königl, and C. Litwin), *Astrophys. J.* **565**, 1205 (2002).