

---

---

**МЕХАНИКА МАШИН**

---

---

УДК 537.634

**ПОЛЕ МНОГОСЛОЙНОЙ МНОГОВИТКОВОЙ КАТУШКИ  
С АНАЛИТИЧЕСКИ ЗАДАННЫМИ ЗАКОНАМИ ИЗМЕНЕНИЙ  
РАССТОЯНИЙ МЕЖДУ СЛОЯМИ И ВИТКАМИ**

© 2019 г. А. К. Андреев\*

*Московский авиационный институт (Национальный исследовательский университет),  
г. Москва, Россия**\*e-mail: alexander\_andreev@yahoo.com*

Поступила в редакцию 07.08.2017 г.

Получены формулы для расчета трехмерных магнитных полей, создаваемых сложной системой круговых токов, составляющих многослойную многовитковую катушку. Распределение векторного поля в любой области пространства можно получить, задавая аналитическую функцию, устанавливающую расстояния между витками и/или слоями. Показано, что при равномерной намотке и равенстве плотностей поверхностных токов, индукция однослойной катушки и равноразмерного аксиально намагниченного цилиндра идентичны. Индукцию цилиндра рассчитывают через размагничивающий фактор.

DOI: 10.1134/S0235711919010036

Термин “катушка” круговой или прямоугольной формы применяется к магнитным системам (включая плоские катушки) с небольшим отношением длины к характерному поперечному размеру. В противном случае используется термин “соленоид”. Значительный сегмент в области создания магнитных систем занимают системы кругового тока.

Методы расчетов параметров осесимметричных катушек с равномерной намоткой (без магнитного сердечника) суммированы в работе [1]. В работе [2] представлены расширенные методы расчетов, включающие моделирование систем с диамагнитными и ферромагнитными экранами и содержится базисный список литературы по рассматриваемой тематике. Задачи аналогичные [2] рассматривались в [3, 4], где в [4] учитывалась винтообразность намотки катушки. В [1, 2] расчеты выполнены в C-программе и представлены в виде изолиний или графиков.

В настоящей статье приведен метод расчета катушек с изменяемыми расстояниями между слоями и витками. В модели используются аналитические выражения для магнитного поля, что позволяет проводить расчеты в широко применяемых средах математического моделирования: Maple, MathCad, MathLab и других, где не требуются навыки программирования.

В настоящей статье представлена альтернативная математическая модель расчета индукции катушки с равномерной намоткой, основанная на вычислении компонент размагничивающего фактора аксиально намагниченного цилиндра [5]. Модель имеет преимущества по сравнению с другими методами моделирования таких систем.

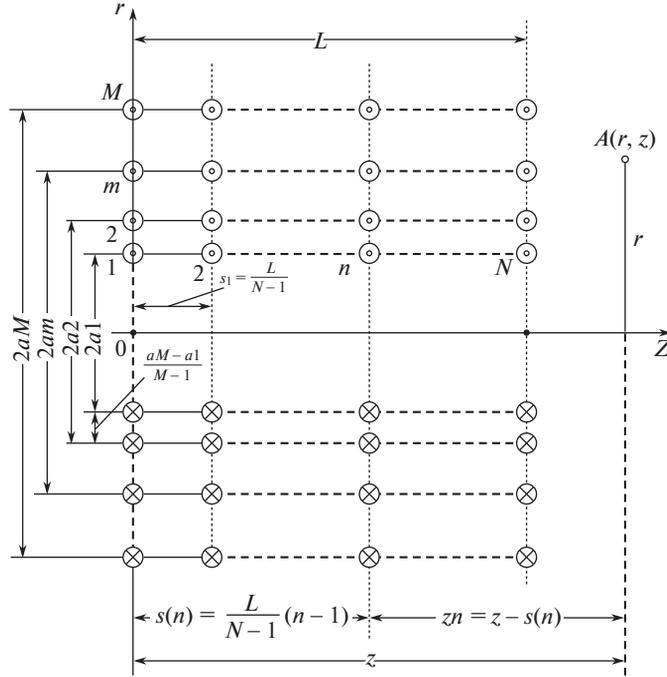


Рис. 1.

**Расчетная модель многослойной многовитковой катушки.** В системе СИ компоненты поля токового витка записываются в виде

$$\begin{aligned}
 H_r(r, z) &= \frac{I}{4\pi r} \frac{2z}{\sqrt{(a+r)^2 + z^2}} \left[ -K_c(k) + \frac{a^2 + r^2 + z^2}{(a-r)^2 + z^2} E_c(k) \right], \\
 H_z(r, z) &= \frac{1}{4\pi} \frac{2}{\sqrt{(a+r)^2 + z^2}} \left[ K_c(k) + \frac{a^2 - r^2 - z^2}{(a-r)^2 + z^2} E_c(k) \right],
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

где  $I$  – ток витка;  $2a$  – диаметр витка;  $r, z$  – координаты точки наблюдения;  $K_c(k)$ ,  $E_c(k)$  – полные эллиптические интегралы Лежандра первого и второго рода, соответственно

$$K_c(k) = \int_0^{\pi/2} (1 - k^2 \sin^2 \psi)^{-1/2} d\psi, \quad E_c(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi} d\psi.
 \tag{2}$$

Модуль интегралов равен

$$k^2 = 4ar((a+r)^2 + z^2)^{-1}.
 \tag{3}$$

На оси витка ( $r = 0$ ) имеем:  $H_r = 0$ ,  $H_z = Ia(a^2 + z^2)^{-3/2}$ . Индукция и поле связаны соотношением  $B(r, z) = \mu_0 H(r, z)$ , где  $\mu_0$  – магнитная постоянная.

На рис. 1 показана схема расположения витков и слоев катушки;  $A(r, z)$  – точка наблюдения, в которой вычисляется поле. Витки моделируются линейным круговым током (1). Начало координат расположено в торце катушки. Введены следующие обозначения. В радиальном направлении  $r$ :  $M$  – число слоев катушки;  $m$  – порядковый

номер слоя ( $m = 1, \dots, M$ );  $2a_1$  – диаметр первого слоя;  $2am$  – диаметр  $m$ -го слоя;  $2aM$  – диаметр внешнего слоя;  $(aM - a_1/M - 1, M > 1)$  – расстояние между слоями при равномерной намотке. Вдоль оси  $Z$ :  $L$  – длина катушки;  $N$  – число витков;  $Z$  – расстояние от начала координат до  $z$ -координаты точки наблюдения  $A(r, z)$ ;  $(s_1 = L/N - 1, N > 1)$  – расстояние между витками при равномерной намотке;  $s(n)$  – расстояние от начала координат до  $(n - 1)$ -го витка ( $n = 1, \dots, N$ );  $z_n$  – расстояние от  $(n - 1)$  витка до  $z$ -координаты точки наблюдения  $A(r, z)$ .

Полагая число витков вдоль оси  $Z$  равным  $N = 1$ , получаем схему плоской катушки с изменяемым числом витков в радиальном направлении  $r$ . При числе слоев в радиальном направлении  $M = 1$  схема соответствует однослойной катушке с намоткой вдоль оси  $Z$ .

Далее, для определенности, межслойные и межвитковые расстояния задаются степенными функциями.

**Плоская катушка** ( $N = 1$ ). Результирующее поле катушки в точке наблюдения  $A(r, z)$  определяется суммированием полей, создаваемых отдельными витками (1). Расстояния между слоями по  $r$  задаем функцией

$$Func(aM, a_1, m, k) = (m - 1/M - 1)^k (aM - a_1), \quad (4)$$

где  $k$  – показатель степени. Радиус  $m$ -го слоя определяется как

$$am = \begin{cases} a_1 & \text{если } m = 1 \vee M = 1, \\ \text{не число, если } m > M, \\ a_1 + Func(aM, a_1, m, k) & \text{везде, где} \end{cases}$$

$H_r$  и  $H_z$  – компоненты полей, создаваемые в точке наблюдения  $A$ ,  $m$ -м витком в соответствии с (1), (2), (3) равны

$$H_{rm}(r, z) = \begin{cases} 0, & \text{если } r = 0 \\ \left[ \frac{I}{4\pi r} \left[ \frac{2z}{\sqrt{(am+r)^2 + z^2}} \right] \left[ -K_{cm}(r, z) + \left[ \frac{am^2 + r^2 + z^2}{(am-z)^2 + z^2} \right] E_{cm}(r, z) \right] \right] & \text{везде,} \end{cases}$$

$$H_{zm}(r, z) = \frac{I}{4\pi} \left[ \frac{2}{\sqrt{(am+r)^2 + z^2}} \right] \left[ K_{cm}(r, z) + \left[ \frac{am^2 - r^2 - z^2}{(am-z)^2 + z^2} \right] E_{cm}(r, z) \right],$$

$$\text{где } K_{cm}(r, z) = \int_0^{\pi/2} (1 - k_m^2 \sin^2 \psi)^{-1/2} d\psi, \quad E_{cm}(r, z) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k_m^2 \sin^2 \psi} d\psi,$$

$$k_m^2 = 4(am)r(z^2 + (am+r)^2)^{-1}.$$

Модуль поля, создаваемого  $m$ -м витком записывается в виде

$$H_{m\text{mod}}(r, z) = \sqrt{H_{rm}(r, z)^2 + H_{zm}(r, z)^2}.$$

Суммарные аксиальная  $H_z$  и радиальная  $H_r$  компоненты полей плоской катушки и модуль суммарного поля  $H_{m\text{mod}}(r, z)$  вычисляются по формулам

$$Hr_m(r, z) = \sum_{m=1}^M H_{rm}(r, z), \quad Hz_m(r, z) = \sum_{m=1}^M H_{zm}(r, z),$$

$$H_{m\text{mod}}(r, z) = \sqrt{Hr_m(r, z)^2 + Hz_m(r, z)^2}.$$

При  $k = 1$  формулы определяют поле плоской катушки с равными расстояниями между витками.

**Однослойная катушка с произвольным шагом намотки** ( $M = 1$ ). Закон изменения межвиткового расстояния по  $z$  задаем функцией

$$\text{Funct}(n, L) = (n - 1/N - 1)^t L, \quad (5)$$

где  $t$  – показатель степени,  $n = 1, \dots, N$ . Расстояния  $s(n)$  и  $zn$  имеют вид

$$s(n) = \begin{cases} 0, & \text{если } n = 1, \\ NaN, & \text{если } n > N, \\ \text{Funct}(n, L), & \text{везде, } zn = z - \text{Funct}(n, L). \end{cases}$$

Радиальная  $r$ - и  $z$ -компоненты полей  $H_r$  и  $H_z$ , создаваемые в точке наблюдения  $A(r, z)$   $n$ -м витком, следуют из формул

$$H_{rn}(r, z) = \begin{cases} 0, & \text{если } r = 0, \\ \frac{I}{4\pi r} \left[ \frac{2zn}{\sqrt{zn^2 + (a1 + r)^2}} \right] - K_{cn}(r, z, n) + \left[ \frac{a1^2 + r^2 + zn^2}{(a1 - r)^2 + zn^2} \right] E_{cn}(r, z, n) & \text{везде,} \end{cases}$$

$$H_{zn}(r, z) = \frac{I}{4\pi} \left[ \frac{2}{(a1 + r)^2 + zn^2} \right] \left[ K_{cn}(r, z, n) + \left[ \frac{a1^2 - r^2 - zn^2}{(a1 - r)^2 + zn^2} \right] E_{cn}(r, z, n) \right],$$

$$K_{cn}(r, z, n) = \int_0^{\pi/2} (1 - k_n^2 \sin^2 \psi)^{-1/2} d\psi, \quad E_{cn}(r, z, n) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k_n^2 \sin^2 \psi} d\psi,$$

$$k_n^2 = 4a1r(zn^2 + (a1 + r)^2)^{-1}.$$

Модуль поля, создаваемого  $n$ -м витком рассчитывается по формуле

$$H_n \text{ mod}(r, z) = \sqrt{H_{rn}(r, z)^2 + H_{zn}(r, z)^2}.$$

Суммарные аксиальная  $H_z$  и радиальная  $H_r$  компоненты полей равны

$$H_{zn}(r, z) = \sum_{n=1}^N H_{zn}(r, z), \quad H_{rn}(r, z) = \sum_{n=1}^N H_{rn}(r, z),$$

откуда следует модуль суммарного поля

$$H_n \text{ mod}(r, z) = \sqrt{H_{zn}(r, z)^2 + H_{rn}(r, z)^2}.$$

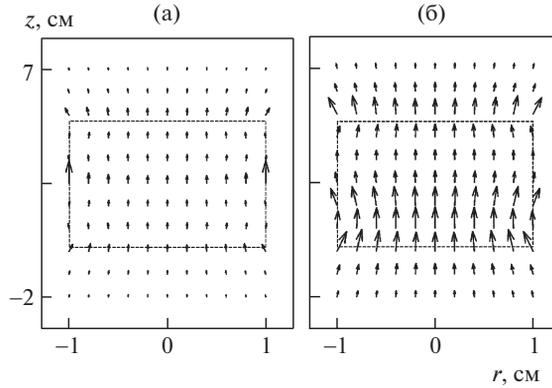
**Многослойная многовитковая катушка** ( $N, M$ ). Расстояния между витками и слоями задаются в соответствии с определениями (4), (5). Компоненты полей следуют из соотношений

$$H_{rnm}(r, z) = \begin{cases} 0, & \text{если } r = 0 \\ \left( \frac{I}{4\pi} \right) \left[ \frac{2zn}{\sqrt{(am + r)^2 + zn^2}} \right] \left[ -K_{cmn}(r, z) + \left[ \frac{am^2 + z^2 + zn^2}{(am - r)^2 + zn^2} \right] E_{cmn}(r, z) \right] & \text{везде,} \end{cases}$$

$$H_{znm}(r, z) = \left( \frac{I}{4\pi} \right) \left[ \frac{2}{\sqrt{((am + r)^2 + zn^2)}} \right] \left[ K_{cmn}(r, z) + \left[ \frac{am^2 - r^2 - zn^2}{(am - r)^2 + zn^2} \right] E_{cmn}(r, z) \right],$$

где

$$K_{cmn}(r, z) = \int_0^{\pi/2} (1 - k_{mn}^2 \sin^2 \psi)^{-1/2} d\psi, \quad E_{cmn}(r, z) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k_{mn}^2 \sin^2 \psi} d\psi,$$



**Рис. 2.** График векторного поля катушки. а – показатель степени в радиальном направлении,  $k = 2$  – квадратичная зависимость межслойных расстояний, показатель степени в  $Z$ -направлении  $t = 1$  – равные расстояния между витками; б –  $k = 2$ ,  $t = 2$  – квадратичная зависимость межслойных и межвитковых расстояний.

$$k_{mn}^2 = 4amr(zn^2 + (am + r)^2)^{-1}.$$

Суммарные аксиальные и радиальные компоненты полей катушки вычисляются по формулам

$$H_{r_{mn}}(r, z) = \sum_{m=1}^M \left( \sum_{n=1}^N H_{r_{mn}}(m, r, z, n) \right), \quad H_{z_{mn}}(r, z) = \sum_{m=1}^M \left( \sum_{n=1}^N H_{z_{mn}}(m, r, z, n) \right). \quad (6)$$

Из (6) следует модуль поля катушки

$$H_{mn} \text{ mod } (r, z) = \sqrt{H_{r_{mn}}(r, z)^2 + H_{z_{mn}}(r, z)^2}.$$

На рис. 2 приведен график векторного поля компонент катушки  $H_{r_{mn}}$ ,  $H_{z_{mn}}$  (6) в плоскости  $r - z$  в диапазоне  $(-1 \text{ см} \leq r \leq 1 \text{ см}, -2 \leq z \leq 7 \text{ см})$  при входных параметрах: число слоев  $M = 5$ , число витков  $N = 3$ , диаметр первого слоя  $2a_1 = 2 \text{ см}$ , диаметр внешнего слоя  $aM = 7 \text{ см}$ , длина катушки  $L = 5 \text{ см}$ . Пунктирной линией показаны границы катушки. Расчеты проводили в системе вычислений MathCad 14.

В зависимости от значений показателей степени, входящих в определяющие формулы (4), (5), получаем следующие модификации магнитной системы: 1)  $k = 1$  – равные расстояния между витками в радиальном направлении при заданном законе изменения расстояний в  $z$ -направлении; 2)  $t = 1$  – равные расстояния между витками в  $z$ -направлении при заданном законе изменения расстояний в радиальном  $r$ -направлении; 3)  $k = 1$  и  $t = 1$  – равные расстояния между витками в радиальном  $r$ - и  $z$ -направлениях; 4)  $M = 1$  – однослойная катушка при заданном законе изменения расстояний в  $z$ -направлении; 5)  $M = 1$ ,  $t = 1$  – однослойная катушка при равных расстояниях между витками в  $z$ -направлении; 6)  $M = 2$ ,  $t = 1$  при противоположных направлениях токов в слоях и плотной намотке – аналог аксиально намагниченного тора [6] (см. далее); 7)  $N = 1$  – плоская (дисковая) катушка при заданном законе изменения расстояний в радиальном направлении; 8)  $N = 1$ ,  $k = 1$  – плоская (дисковая) катушка при равных расстояниях в радиальном направлении; 9)  $M = 1$ ,  $N = 1$  – одиночный круговой ток виток.

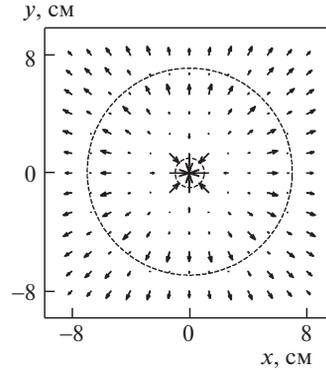


Рис. 3.

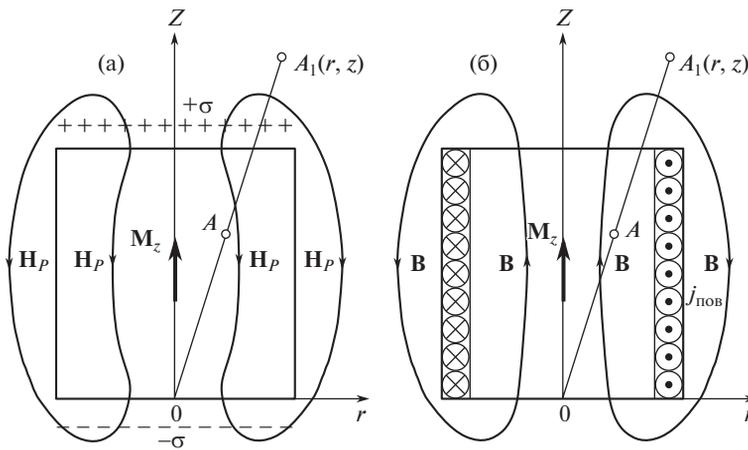


Рис. 4. Поля рассеяния и размагничивания цилиндра согласно “зарядовой” модели (а); индукция цилиндра в соответствии с моделью поверхностных токов (б); Индукция цилиндра совпадает с индукцией катушки.

На рис. 3 приведен график векторного поля радиальной компоненты катушки  $Hr_{mn}$  (б) в плоскости  $(x - y)$  при  $z = 3.7$  см ( $L = 5$  см,  $a = 1$  см,  $aM = 7$  см,  $N = 3$ ,  $M = 5$ ,  $t = 2$ ,  $k = 2$ ).

Компоненты поля  $H_x$ ,  $H_y$  записываются следующим образом:

$$r(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad q(x, y) = x(x^2 + y^2)^{-1/2}, \quad g(x, y) = y(x^2 + y^2)^{-1/2},$$

$$Hx(x, y, z) = Hr_{mn}(r, z)q(x, y), \quad Hy(x, y, z) = Hr_{mn}(r, z)g(x, y).$$

Рисунок 3 построен в пределах  $(-8 \text{ см} \leq x, y \leq 8 \text{ см})$ . Выделенная точками область показывает границы сечения обмотки  $2a1 = 2$  см и  $2aM = 14$  см.

**Эквивалентность магнитной индукции аксиально намагниченного цилиндра и однослойной катушки с постоянным шагом намотки.** Рассмотрим метод расчета индукции  $B_c$  аксиально намагниченного цилиндра. Начало координат расположено в торце цилиндра и совпадает с началом координат равноразмерной однослойной катушки. Схематично поле цилиндра  $H_p$  и линии индукции катушки  $B$  показаны на рис. 4.

Поверхностные дивергенция и ротор намагниченности цилиндра  $\mathbf{M}_z$  определяют плотности поверхностного “магнитного заряда” на торцах цилиндра  $\sigma = -\text{Div } \mathbf{M}_z$  (рис. 4, а) и поверхностного тока на боковой поверхности  $\mathbf{j}_{\text{пов}} = \text{Rot } \mathbf{M}_z$  (рис. 4, б), соответственно. В системе СИ (в вакууме)  $\sigma$ ,  $\mathbf{j}_{\text{пов}}$  и  $M_z$  связаны простыми соотношениями:  $\sigma = \mathbf{Mn}$  А/м,  $\mathbf{j}_{\text{пов}} = [\mathbf{M}_z \mathbf{n}]$  А/м ( $\mathbf{n}$  – нормаль к поверхностям цилиндра). Объемные “магнитные заряды” при однородной намагниченности равны нулю. Точками  $A$  и  $A_1(r, z)$  обозначены точки наблюдения.

Поверхностные “заряды”  $\sigma$  создают размагничивающее поле  $H_p$  объеме цилиндра, направленное противоположно  $M_z$  (рис. 4, а) и поле рассеяния вне цилиндра (обозначаемое  $H_p$ ). Размагничивающий фактор, определяющий размагничивающее поле цилиндра, имеет две компоненты  $N_{rz}(r, z)$  и  $N_{zz}(r, z)$ . Компоненты  $H_p$  и  $M_z$  связаны соотношением  $H_{ip} = -N_{iz}M_z$  ( $i = r, z$ ). Размагничивающий фактор может принимать значения  $0 \leq \sum_i N_{ip} \leq 1$ .

На рис. 4, б показаны линии индукции, создаваемые однослойной катушкой ( $M = 1$ ,  $t = 1$ ) с числом витков  $N_c$ . Плотность поверхностного тока катушки равна  $j = N_c I / L$  А/м. Расчеты показывают, что при условии равенства плотностей поверхностных токов катушки и цилиндра  $j = j_{\text{пов}}$  намагниченность цилиндра  $M_z = j_{\text{пов}}$  создает индукцию  $\mathbf{B}_c$ , эквивалентную индукции катушки  $B_n$  [7].

В [5] получены формулы для расчета полей аксиально намагниченного цилиндра

$$H_r(r, z) = -N_{rz}M_z = -M_z \begin{cases} \frac{1}{2} a \int_0^{\infty} J_1(tr)J_1(ta)[e^{-tz} - e^{-t(L-z)}]dt, & \text{если } (0 \leq z \leq L), \\ \frac{1}{2} a \int_0^{\infty} J_1(tr)J_1(ta)[e^{-tz} - e^{t(L-z)}]dt, & \text{если } (z > L), \\ \frac{1}{2} a \int_0^{\infty} J_1(tr)J_1(ta)[e^{tz} - e^{-t(L-z)}]dt, & \text{если } (z < 0); \end{cases} \quad (7)$$

$$H_z(r, z) = -N_{zz}M_z = -M_z \begin{cases} \frac{1}{2} a \int_0^{\infty} J_0(tr)J_1(ta)[e^{-tz} + e^{-t(L-z)}]dt, & \text{если } (0 \leq z \leq L), \\ \frac{1}{2} a \int_0^{\infty} J_0(tr)J_1(ta)[e^{-tz} - e^{t(L-z)}]dt, & \text{если } (z > L), \\ \frac{1}{2} a \int_0^{\infty} J_0(tr)J_1(ta)[e^{-t(L-z)} - e^{tz}]dt, & \text{если } (z < 0), \end{cases} \quad (8)$$

где  $H_r(r, z)$  и  $H_z(r, z)$  – радиальная  $r$ - и аксиальная  $z$ -компоненты поля, соответственно;  $J_0(tr)$  и  $J_1(ta)$  – функции Бесселя от действительного аргумента нулевого и первого порядка. Уравнения (7), (8) определяют поля размагничивания  $H_p$  в объеме цилиндра и поля рассеяния  $H_p$  вне цилиндра.

Индукция  $B_c$  связана с  $\mathbf{H}_p$  и  $\mathbf{M}_z$  соотношением

$$\mathbf{B}_c = \mu_0 (\mathbf{H}_p + \mathbf{M}_z). \quad (9)$$

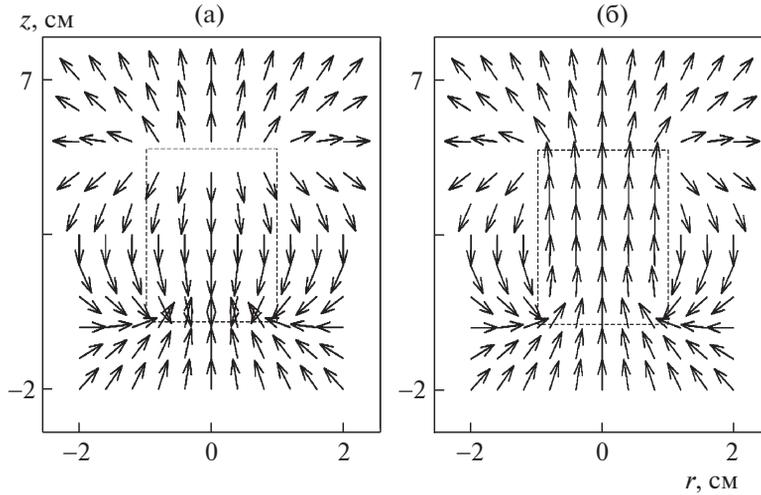


Рис. 5. Размагничивающее поле и поле рассеяния цилиндра (а); б – индукция цилиндра и однослойной катушки при плотной намотке.

Линии индукции непрерывны и из уравнения (9) следуют формулы, определяющие  $B_c$  как в объеме цилиндра, так и вне его

$$B_r(r, z) = \mu_0 H_r(r, z), \tag{10}$$

$$B_z(r, z) = \begin{cases} \mu_0(H_z(r, z) + M_z), & \text{если } 0 < z \leq L \wedge |r| < a, \\ \mu_0 H_z(r, z) & \text{везде.} \end{cases} \tag{11}$$

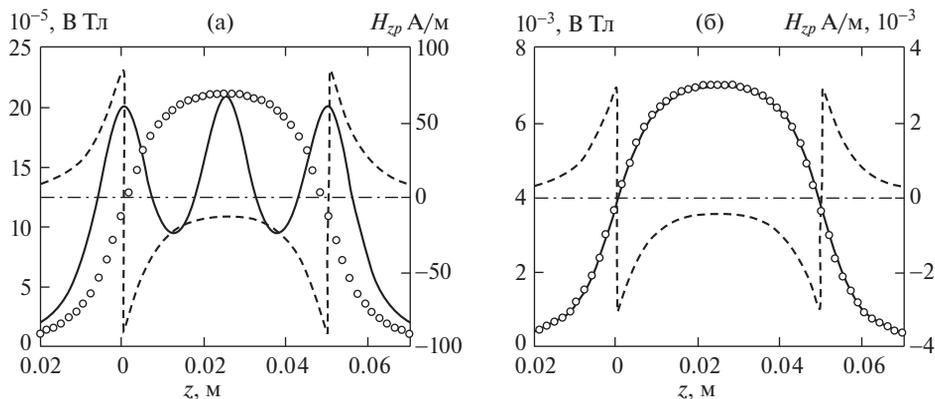
Модуль индукции равен  $B_c \text{ mod}(r, z) = \sqrt{B_r(r, z)^2 + B_z(r, z)^2}$ .

На рис. 5 построены нормализованные графики векторного поля цилиндра (7), (8) и индукции (10), (11) в плоскости  $(r - z)$  с входными параметрами  $L = 5$  см,  $a = 1$  см,  $(-4 \text{ см} \leq r \leq 4 \text{ см}, -2 \text{ см} \leq z \leq 7 \text{ см})$ . При числе витков катушки  $N \geq 30$  графики индукции цилиндра и катушки практически идентичны. Точками показаны границы цилиндра.

На рис. 6 приведены графики индукций, создаваемых обтекаемым током цилиндром (8) и катушкой с равномерной намоткой (5) ( $t = 1$ ), вдоль линии, смещенной в радиальном направлении относительно оси  $Z$  на расстояние  $r = 0.1$  см. Здесь же приведены также графики  $Z$ -компоненты размагничивающего поля цилиндра (8). Ток в каждом витке принят равным  $I = 3$  А. Размеры эквивалентных магнитных систем: диаметр  $2a = 2$  см, длина  $L = 5$  см.

Рисунки показывают, что при числе витков  $N \geq 100$  индукции катушки и цилиндра практически совпадают. При  $N = 30$  разница максимальных значений индукций вблизи оси  $Z$  составляет  $\sim 1.4\%$ .

**Выводы.** Приведенные в статье результаты показали работоспособность предложенных методов расчета полей. Задание расстояний между слоями и витками катушки, изменяющимися по заранее заданному закону, является эффективным методом создания требуемой топологии поля. Модель позволяет рассчитывать межвитковую индукцию. В частном, но практически важном случае при равномерной намотке ( $t = 1$ ), индукцию катушек  $B_c$  целесообразно определять с использованием модели ак-



**Рис. 6.** Символьная линия – индукция обтекаемого ток­ом цилиндра; сплошная линия – индукция равно­размерной однослойной катушки с равномерной намоткой; точечная линия  $z$ -компонента размагничиваю­щего поля цилиндра  $H_{zp}$ ; а – число витков катушки  $N = 3$ ,  $j = M_z = 180$  А/м, б –  $N = 100$ ,  $j = M_z = 6 \cdot 10^3$  А/м.

сиально намаг­ниченного цилиндра, обеспечивающей несопоставимо меньшее время компьютерных расчетов. Так, при  $N = 1000$  витков ( $L = 9$  см, шаг 0.1 см) время построения графика индукции катушки  $B_c$  (рис. 6, б) на стандартном персональном компьютере составляет  $\sim 4.8$  минуты. Такие же вычисления по модели цилиндра занимают доли секунды. Время расчета индукции  $B_c$  пропорционально числу витков  $N$ . В расчетные формулы цилиндра входит намаг­ниченность  $M_z$ , и время счета не зависит от числа витков.

Представленная модель органично встраивается в сложные вычислительные эксперименты и не влияет на временные параметры основной программы [8]. Используя модель цилиндра легко составить систему, аналогичную многослойной катушке. Два соосных цилиндра равной длины с противоположным направлением намаг­ниченности  $M_z$  образуют аксиально намаг­ниченный тор.

В [5] приведены программы расчета тензора размагничивания прямоугольной призмы. Расчет полей и индукции призмы можно выполнить аналогично модели, представленной в статье. Из системы невзаимодействующих аксиально намаг­ниченных цилиндров и однородно намаг­ниченных призм легко создать сложную конфигурацию источников поля не обладающую симметрией по  $r$ .

Уравнения (7), (8) цилиндра при  $L \gg a$  определяют поля торцевых разноименно “заряженных” дисков. При  $L \ll a$  получаем двойной заряженный слой. Производные от энергии размагничивания ферромагнетика  $E = 1/2 \int \mathbf{M} \mathbf{H}_p dv$  по соответствующему параметру позволяют рассчитывать силы, действующие на поверхность образца.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алиевский Б.Л., Орлов В.Л. Расчет параметров магнитных полей осесимметричных катушек: Справочник. М.: Энергоатомиздат, 1983. 112 с.
2. Алиевский Б.Л., Октябрьский А.М., Орлов В.Л., Постников В.А. Моделирование магнитных полей осесимметричных систем / Под. ред. Б.Л. Алиевского. М.: Изд-во МАИ, 2007. 317 с.
3. Штамбергер Г.А. Устройства для создания слабых постоянных магнитных полей / Под ред. К.Б. Карандеева. Новосибирск: Изд-во Наука, 1972. 176 с.

- 
4. *Бухгольц Г.* Расчет электрических и магнитных полей. М.: Изд-во ин. лит-ры, 1961. 712 с.
  5. *Андреев А.К.* Магнитостатика ферромагнетиков. М.: Изд-во МАИ, 2011. 162 с.
  6. *Андреев А.К.* Пондеромоторные силы в системе “аксиально намагниченный тор – магнитомягкий шар” // Вестник московского авиационного института. 2015. Т. 22. № 4. С. 149–158.
  7. *Парсел Э.* Электричество и магнетизм. М.: Наука, 1975. 439 с.
  8. *Котельников В.А., Котельников М.В., Морозов А.В.* Математическое моделирование взаимодействия потока разреженной плазмы с магнитным полем. М.: Изд-во МАИ, 2015. 169 с.