ПРОБЛЕМЫ МАШИНОСТРОЕНИЯ И НАДЕЖНОСТИ МАШИН 2019, № 1, с. 66–73

НАДЕЖНОСТЬ, ПРОЧНОСТЬ, ИЗНОСОСТОЙКОСТЬ МАШИН И КОНСТРУКЦИЙ

УДК 539.3

ОСНОВНОЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ КРУГЛОЙ ПЛАСТИНКИ ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ НА ОСНОВЕ НЕКЛАССИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ

© 2019 г. В. В. Фирсанов*

Московский авиационный институт (Национальный исследовательский университет), Москва, Россия

**e-mail: k-906@mail.ru*

Поступила в редакцию 04.12.2017 г.

Разработана математическая модель основного напряженно-деформированного состояния круглой пластинки с несимметрично меняющейся переменной толщиной при осесимметричном нагружении. Применяется метод прямого асимптотического интегрирования дифференциальных уравнений трехмерной теории упругости. Сформулирована краевая задача, представляющая собой систему двух дифференциальных уравнений в перемещениях второго и четвертого порядков с переменными коэффициентами и соответствующими граничными условиями. Приведен пример расчета пластинки, выполненный в системе "Mathlab-14" методом конечных разностей.

DOI: 10.1134/S0235711919010073

В современных условиях проектирования авиационной и ракетно-космической техники, определяемых разработкой новых конструктивно-силовых схем летательных аппаратов, интенсификацией и расширением спектра внешних воздействий, а также внедрением перспективных материалов, предъявляются повышенные требования к точности методов расчета напряженно-деформированного состояния (НДС) конструкций, обеспечивающих безопасную работу на пределе возможности материала при выполнении требований весового совершенства. Отметим, что не потеряли своего значения более оперативные, по отношению к численным, методы расчета НДС, основанные на аналитических моделях, в том числе, типа пластинок и оболочек с существенно переменными жесткостными характеристиками.

В настоящей статье рассматривается уточненный метод расчета круглой пластинки переменной толщины, расчетная схема которой используется при анализе прочности и долговечности таких элементов конструкций, как плоские днища резервуаров и теплообменных аппаратов, элементы различных силовых приводов и др.

Один из возможных путей построения математически обоснованной теории пластин и оболочек состоит в применении метода прямого асимптотического разложения компонентов НДС в ряды по малому параметру – относительной толщине трехмерного тела и в последующем интегрировании уравнений трехмерной теории упругости. С помощью этого метода в работе [1] были сформулированы варианты приближенных теорий, уточняющих результаты классической теории не только во внутренних областях пластинок и оболочек, но и в их узких краевых зонах. Однако, сформулированные краевые задачи, в силу сложности соответствующих им дифференциальных уравнений и различного типа граничных условий, напрямую решить затруднительно. В связи с этим в [2–4] краевые задачи с помощью вариационного метода Власова–

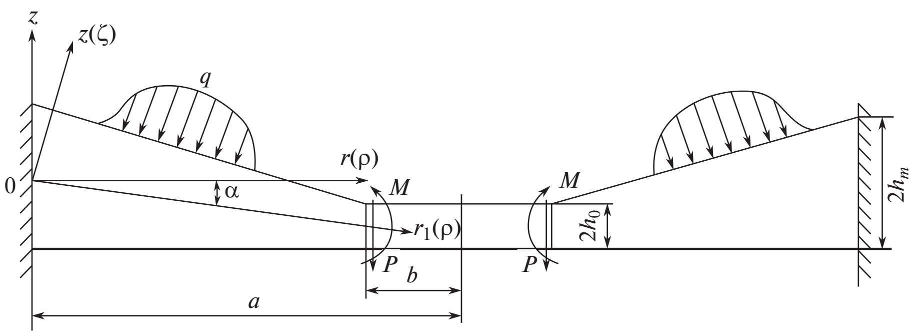

Рис. 1. Круглая пластинка переменной толщины.

Канторовича и специально подобранных аппроксимирующих полиномов решены и доведены до численных результатов, в том числе для прямоугольных пластинок и цилиндрических оболочек переменной толщины [5].

Отметим, что уточненные варианты расчета общего НДС круглых пластинок, построены для постоянной толщины и частного случая [6] переменной толщины, симметричной относительно оси, проходящей через центр масс поперечных сечений. Известно, что многие элементы авиационных конструкций оформляются в виде пластинок и оболочек переменной толщины таким образом, что одно из их оснований наклонено под некоторым углом к другому основанию. Расчетные схемы этих элементов конструкции разработаны [5] на основе метода прямого асимптотического интегрирования.

Аналогичные приведенным расчетные схемы несимметричных элементов конструкций разработаны в [7] с помощью другого подхода, заключающегося в разложении компонентов НДС в ряды по нормальной к срединной поверхности координате с последующим применением вариационного принципа Лагранжа. Отметим, что результаты соответствующие двум приведенным подходам имеют хорошее качественное и количественное совпадение.

В настоящей статье математический аппарат применяется для построения основного НДС круглой пластинки с несимметрично изменяющейся переменной толщиной.

Постановка задачи. Пусть изотропная пластинка (рис. 1) с круглым отверстием в центре находится под действием симметричной поперечной нагрузки $q(z)$. Отнесем пластинку к цилиндрической системе координат (r, θ, z), обозначив через a и b радиусы внешнего и внутреннего контуров, а через $2h$ — ее переменную толщину, определяемую соотношением

$$h = h_m - r\,\mathrm{tg}\,\alpha, \quad \text{где} \quad \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{h_m - h_0}{a - b}.$$

Для определенности будем полагать, что контур пластинки $r = 0$ жестко защемленный. Внутренний контур пластинки $r = a - b$ может быть любым, в том числе свободным, нагруженным краевыми усилиями типа изгибающих моментов, поперечных и нормальных сил.

Наряду с цилиндрической системой координат (r, θ, z) будем рассматривать косоугольную систему (r_1, θ, z_1), для которой справедливы равенства

$$r_1 = \frac{r}{\cos\alpha}, \quad z_1 = z + r_1 \sin\alpha. \tag{1}$$

Исходная система уравнений плоской задачи теории упругости в косоугольной системе координат получается из соответствующей системы уравнений в цилиндрических координатах путем перехода от производных $\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial z}$ к производным $\frac{\partial}{\partial r_1}, \frac{\partial}{\partial z_1}$ по формулам

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{1}{\cos\alpha}\frac{\partial}{\partial r_1} + \operatorname{tg}\alpha\frac{\partial}{\partial z_1}, \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z_1}$$

и введения безразмерной системы координат с помощью равенств $r_1 = c\rho_1$, $z_1 = h\zeta$, $c = a - b$, полагая, что по (ρ_1, θ, ζ) изменяемость искомого НДС не слишком велика.

Применяя метод асимптотического интегрирования уравнений теории упругости, построим математическую модель основного НДС. При интегрировании уравнений теории упругости все напряжения и перемещения Φ принимаем в виде

$$\Phi = h_*^{-p}\sum_{s=1}^{\infty} h_*^{(s-1)}\Phi^{(s)}, \tag{2}$$

где p — целое число, которое задается разным для различных перемещений и напряжений, т.е. для различных s: $h_* = h/c$, а также учитываем граничные условия на верхней и нижней плоскостях пластинки

$$\begin{gathered}\sigma_z + 2\operatorname{tg}\alpha\tau_{rz} = -q; \quad \tau_{rz} + 2\operatorname{tg}\alpha\sigma_r = -2\operatorname{tg}\alpha q \quad \text{при} \quad z_1 = h; \\ \sigma_z = \tau_{rz} = 0 \quad \text{при} \quad z_1 = -h.\end{gathered} \tag{3}$$

Для основного напряженного состояния выберем p в (2) следующим образом: $p = 2$ для σ_r, σ_θ; $p = 0$ для σ_z; $p = 1$ для τ_{rz}; $p = 2$ для u; $p = 3$ для w. Подставим ряд (2) в исходную систему уравнений в косоугольных координатах (1), которая здесь не приводится.

Основное НДС. Следуя работам [2, 5], для определения искомых величин получим систему уравнений

$$\begin{gathered}\chi_1\sigma_r + \frac{\partial\tau_{rz}}{\partial\zeta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{\rho} = 0, \quad \chi_1\tau_{rz} + \frac{\partial\sigma_z}{\partial\zeta} + \frac{\tau_{rz}}{\rho} = 0, \quad Eu = c(\sigma_r - \nu\sigma_\theta), \\ E\frac{u}{\rho} = c(\sigma_\theta - \nu\sigma_r), \quad E\frac{\partial w}{\partial\zeta} = 0, \quad E\left(\chi_1 w + \frac{\partial u}{\partial\zeta}\right) = 0,\end{gathered} \tag{4}$$

где через χ_1 обозначен дифференциальный оператор

$$\chi_1 = \frac{\partial}{\partial\rho} + \operatorname{tg}\alpha h_*^{(-1)}\frac{\partial}{\partial\zeta} + p\operatorname{tg}\alpha h_*^{(-1)} = 0 \quad \text{и} \quad \rho = \rho_1\cos\alpha.$$

Область применимости уравнений (4) ограничена неравенством $h_*^2 < \operatorname{tg}\alpha < h_*^0$

Перейдем в системе уравнений (4) к величинам, стоящим в левой части разложения (2) и, интегрируя ее, найдем

$$\begin{gathered}w = w(\rho), \quad u = \zeta u_1 + u_0, \quad \sigma_r = \zeta\sigma_{r1} + \sigma_{r0}, \quad \sigma_\theta = \zeta\sigma_{\theta1} + \sigma_{\theta0}, \\ \tau_{rz} = \zeta^2\tau_{rz2} + \zeta\tau_{rz1} + \tau_{rz0}, \quad \sigma_z = \zeta^3\sigma_{z3} + \zeta^2\sigma_{z2} + \zeta\sigma_{z1} + \sigma_{z0}.\end{gathered} \tag{5}$$

Здесь величины, отмеченные дополнительными числовыми индексами внизу, функции переменной ρ, связанные следующими равенствами:

$$u_1 = -h_*\frac{dw}{d\rho}, \quad \sigma_{r1} = -\frac{E}{(1-\nu^2)c}\left[h_*\frac{d^2w}{d\rho^2} + \left(\frac{\nu h_*}{\rho} - \operatorname{tg}\alpha\right)\frac{dw}{d\rho}\right],$$

$$\sigma_{r0} = -\frac{E}{(1-\nu^2)c}\left(\frac{du_0}{d\rho} + \nu\frac{u_0}{\rho} - \operatorname{tg}\alpha\frac{dw}{d\rho}\right),$$

$$\sigma_{\theta 1} = -\frac{\nu E}{(1-\nu^2)c}\left[h_* \frac{d^2 w}{d\rho^2} + \left(\frac{h_*}{\nu\rho} - \operatorname{tg}\alpha\right)\frac{dw}{d\rho}\right],$$

$$\sigma_{\theta 0} = \frac{E}{(1-\nu^2)c}\left[\frac{u_0}{\rho} + \nu\left(\frac{du_0}{d\rho} - \operatorname{tg}\alpha\frac{dw}{d\rho}\right)\right],$$

$$\tau_{rz2} = \frac{Eh_*}{2(1-\nu^2)c}\left[h_* \frac{d^3 w}{d\rho^3} + \left(\frac{h_*}{\rho} - 2\operatorname{tg}\alpha\right)\frac{d^2 w}{d\rho^2} - \frac{1}{\rho}\left(\frac{h_*}{\rho} + \operatorname{tg}\alpha\right)\frac{dw}{d\rho}\right],$$

$$\tau_{rz1} = -\frac{Eh_*}{(1-\nu^2)c}\left[\frac{d^2 u_0}{d\rho^2} - 2\operatorname{tg}\alpha\frac{d^2 w}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{du_0}{d\rho} - \operatorname{tg}\alpha\left(\frac{1}{\rho} - \frac{\operatorname{tg}\alpha}{h_*}\right)\frac{dw}{d\rho} - \frac{u_0}{\rho^2}\right],$$

$$\sigma_{z3} = -\frac{Eh_*}{6(1-\nu^2)c}\left[h_*^2 \frac{d^4 w}{d\rho^4} + 2h_*\left(\frac{h_*}{\rho} - 2\operatorname{tg}\alpha\right)\frac{d^3 w}{d\rho^3} - \right. \tag{6}$$

$$\left. - \left(\frac{h_*^2}{\rho^2} + 5\operatorname{tg}\alpha\frac{h_*}{\rho} - 2\operatorname{tg}^2\alpha\right)\frac{d^2 w}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\left(\frac{h_*}{\rho} + \operatorname{tg}\alpha\right)\frac{dw}{d\rho}\right],$$

$$\sigma_{z2} = -\frac{Eh_*}{2(1-\nu^2)c}\left[h_* \frac{d^3 u_0}{d\rho^3} - 3\operatorname{tg}\alpha h_* \frac{d^3 w}{d\rho^3} + \left(2\frac{h_*}{\rho} - \operatorname{tg}\alpha\right)\frac{d^2 u_0}{d\rho^2} - \right.$$

$$- \operatorname{tg}\alpha\left(4\frac{h_*}{\rho} - 5\operatorname{tg}\alpha\right)\frac{d^2 w}{d\rho^2} - \frac{1}{\rho}\left(\frac{h_*}{\rho} + \operatorname{tg}\alpha\right)\frac{du_0}{d\rho} +$$

$$\left. + \operatorname{tg}\alpha\frac{1}{\rho}\left(\frac{h_*}{\rho} + 3\operatorname{tg}\alpha\right)\frac{dw}{d\rho} + \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{h_*}{\rho} + \operatorname{tg}\alpha\right)u_0\right],$$

$$\sigma_{z1} = -h_*\left(\frac{d\tau_{rz0}}{d\rho} + \frac{\tau_{rz0}}{\rho}\right) +$$

$$+ \frac{E\operatorname{tg}\alpha\, h_*}{(1-\nu^2)c}\left[\frac{d^2 u_0}{d\rho^2} - 2\operatorname{tg}\alpha\frac{d^2 w}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{du_0}{d\rho} - \operatorname{tg}\alpha\left(\frac{1}{\rho} - \frac{\operatorname{tg}\alpha}{h_*}\right)\frac{dw}{d\rho} - \frac{u_0}{\rho^2}\right].$$

Потребуем, чтобы напряжения, вычисляемые при помощи формул (5) и (6) удовлетворяли граничным условиям (3). Находим

$$\tau_{rz0} = -\frac{Eh_*}{(1-\nu^2)c}\left[\frac{1}{2}h_* \frac{d^3 w}{d\rho^3} + \frac{d^2 u_0}{d\rho^2} + \left(\frac{1}{2}\frac{h_*}{\rho} - 3\operatorname{tg}\alpha\right)\frac{d^2 w}{d\rho^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\rho}\frac{du_0}{d\rho} - \left(\frac{1}{2}\frac{h_*}{\rho^2} + \frac{3}{2}\operatorname{tg}\alpha\frac{1}{\rho} - \frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{h_*}\right)\frac{dw}{d\rho} - \frac{u_0}{\rho^2}\right],$$

$$\sigma_{z0} = \frac{Eh_*}{(1-\nu^2)c}\left[\frac{1}{3}h_*^2 \frac{d^4 w}{d\rho^4} + \frac{1}{3}h_*\left(2\frac{h_*}{\rho} - \frac{11}{2}\operatorname{tg}\alpha\right)\frac{d^3 w}{d\rho^3} + \frac{1}{2}h_* \frac{d^3 u_0}{d\rho^3} - \right.$$

$$- \frac{1}{3}\left(\frac{h_*^2}{\rho^2} + 8\operatorname{tg}\alpha\frac{h_*}{\rho^2} + \frac{23}{2}\frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{\rho}\right)\frac{d^2 w}{d\rho^2} + \left(\frac{h_*}{\rho} + \frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha\right)\frac{d^2 u_0}{d\rho^2} + \tag{7}$$

$$+ \frac{1}{3}\left(\frac{h_*^2}{\rho^3} + \frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha\frac{h_*}{\rho^2} - \frac{1}{2}\frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{\rho} + 3\frac{\operatorname{tg}^3\alpha}{h_*}\right)\frac{dw}{d\rho} -$$

$$-\frac{1}{2\rho}\left(\frac{h_*}{\rho}-\operatorname{tg}\alpha\right)\frac{du_0}{d\rho}-\frac{1}{2\rho^2}\left(\frac{h_*}{\rho}-\operatorname{tg}\alpha\right)u_0\Bigg]$$

и систему основных дифференциальных уравнений задачи в перемещениях

$$h_*\frac{d^2u_0}{d\rho^2}+\left(\frac{h_*}{\rho}-\operatorname{tg}\alpha\right)\frac{du_0}{d\rho}-\frac{1}{\rho}\left(\frac{h_*}{\rho}-\nu\operatorname{tg}\alpha\right)u_0-\operatorname{tg}\alpha h_*\frac{d^2w}{d\rho^2}-$$
$$-\operatorname{tg}\alpha\left((1-\nu)\frac{h_*}{\rho}-\operatorname{tg}\alpha\right)\frac{dw}{d\rho}-\frac{1-\nu^2}{E}\operatorname{tg}\alpha cq=0,$$

$$h_*^3\frac{d^4w}{d\rho^4}+2h_*^2\left(\frac{h_*}{\rho}-5\operatorname{tg}\alpha\right)\frac{d^3w}{d\rho^3}-h_*\left(\frac{h_*^2}{\rho^2}+14\operatorname{tg}\alpha\frac{h_*}{\rho^2}-8\operatorname{tg}^2\alpha\right)\frac{d^2w}{d\rho^2}+ \tag{8}$$
$$+\left(\frac{h_*^2}{\rho^3}+2\operatorname{tg}\alpha\frac{h_*^2}{\rho^2}+10\operatorname{tg}^2\alpha\frac{h_*}{\rho}-3\operatorname{tg}^3\alpha\right)\frac{dw}{d\rho}+3h_*^2\frac{d^3u_0}{d\rho^3}+$$
$$+6h_*\left(\frac{h_*}{\rho}-\operatorname{tg}\alpha\right)\frac{d^2u_0}{d\rho^2}-3\frac{h_*}{\rho}\left(\frac{h_*}{\rho}+2\operatorname{tg}\alpha\right)\frac{du_0}{d\rho}+3\frac{h_*}{\rho^2}\left(\frac{h_*}{\rho}+2\operatorname{tg}\alpha\right)u_0+\frac{3(1-\nu^2)}{2E}cq=0.$$

Из анализа формул (5)–(8) видно, что в случае пластинки переменной толщины изгиб и растяжение не отделяются друг от друга.

Покажем, что напряжения, соответствующие общему интегралу уравнений дают следующие усилия и моменты:

$$N_r=\frac{2Eh_*}{1-v^2}\left(\frac{du_0}{d\rho}+v\frac{u_0}{\rho}-\operatorname{tg}\alpha\frac{dw}{d\rho}\right),\quad N_\theta=\frac{2Eh_*}{1-v^2}\left[\frac{u_0}{\rho}-v\left(\frac{du_0}{d\rho}-\operatorname{tg}\alpha\frac{dw}{d\rho}\right)\right],$$
$$M_r=-\frac{D_*}{c^2}\left[\frac{d^2w}{d\rho^2}+\left(\frac{v}{\rho}-\frac{\operatorname{tg}(\alpha)}{h_*}\right)\frac{dw}{d\rho}\right],\quad M_\theta=-\frac{vD_*}{c^2}\left[\frac{d^2w}{d\rho^2}+\left(\frac{1}{v\rho}-\frac{\operatorname{tg}\alpha}{h_*}\right)\frac{dw}{d\rho}\right],$$
$$Q_r=-\frac{D_*}{c^3}\left[\frac{d^3w}{d\rho^3}+\left(\frac{1}{\rho}-8\frac{\operatorname{tg}\alpha}{h_*}\right)\frac{d^2w}{d\rho^2}-\left(\frac{1}{\rho^2}+4\frac{\operatorname{tg}\alpha}{h_*\rho}-3\frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{h_*^2}\right)\frac{dw}{d\rho}+\right.$$
$$\left.+\frac{3}{h_*}\frac{d^2u_0}{d\rho^2}+\frac{3}{h_*\rho}\frac{du_0}{d\rho}-3\frac{u_0}{h_*\rho}\right],$$

где $D_*=\dfrac{2Eh_*^3}{3(1-v^2)}$.

Сформулируем граничные условия для определения произвольных интегрирования системы (8) следующего вида: по жестко защемленному контуру

$$u_0=w=\frac{dw}{d\rho}=0 \tag{9}$$

и на внутреннем контуре отверстия

$$N_r=N,\quad M_r=M,\quad Q_r=P. \tag{10}$$

При других вариантах закрепления пластинки граничные условия будут представлять собой комбинацию условий (9) и (10).

Анализируя уравнения (8) можно установить, что построенная модель определения НДС во внутренней области круглой пластинки с несимметрично изменяющейся толщиной базируется на гипотезе о неизменяемости вертикального элемента, т.е. отрезка

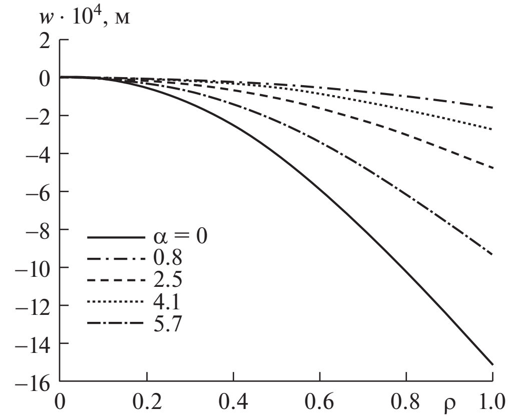

Рис. 2.

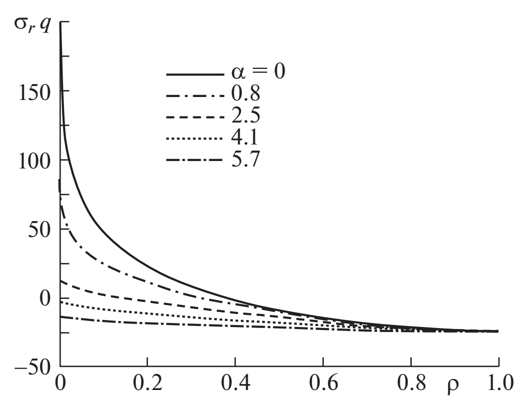

Рис. 3. Эпюры прогиба W (рис. 2) и нормального напряжения σ_r (рис. 3), где α в град.

прямой, перпендикулярного нижней грани пластинки. Эта гипотеза является обобщением известных гипотез Кирхгофа–Лява о неизменяемости нормального к серединной плоскости пластинки элемента.

Пример расчета. Рассмотрим круглую пластинку с центральным отверстием, находящуюся под действием распределенной по верхнему основанию нагрузки. Расчеты проведены в системе “Matlab-14” методом конечных разностей. На рис. 2–5 приведены эпюры прогиба w и компонентов НДС по радиусу пластинки в зависимости от угла α, где точка $\rho = 0$ соответствует жестко защемленному краю, а точка $\rho = 1$ – внутреннему контуру пластинки. Значение угла $\alpha = 0$ соответствует пластинке постоянной толщины, что позволяет провести соответствующие сравнения с пластинкой переменной толщины.

Анализ рис. 2–5 показывает, что при наличии незначительной переменности толщины, например, $\alpha = 0.8°$, поперечная жесткость на краю пластинки увеличивается на 60% по отношению к пластинке постоянной толщины. Дополнительные расчеты с использованием полученных результатов позволяют установить, что при этом же зна-

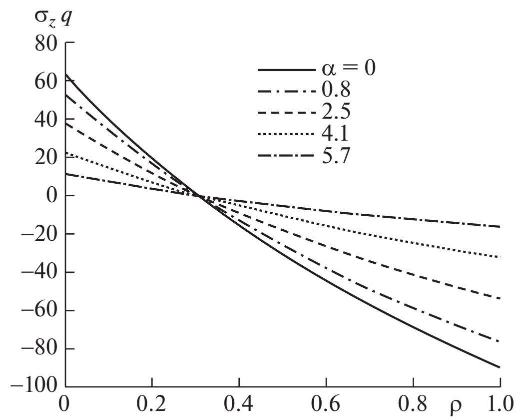

Рис. 4.

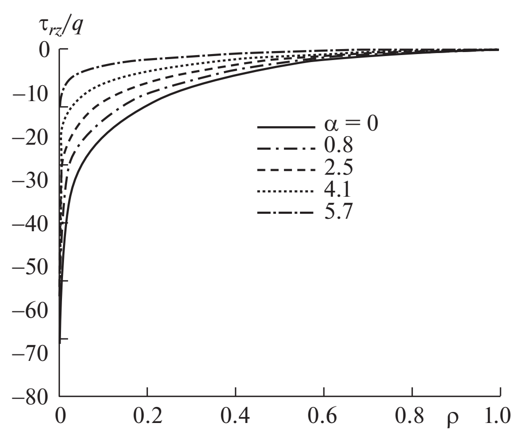

Рис. 5. Эпюры нормального напряжения σ_θ (рис. 4) и касательного τ_{rz} (рис. 5) напряжения, где α в град.

чении угла α прочность на краю пластинки можно повысить примерно в 2 раза, уменьшив массу пластинки на 30%.

Следует отметить, что к построенному основному НДС круглой пластинки необходимо добавить НДС типа “погранслой”, возникающий вблизи жестко защемленного края. В результате полное НДС рассматриваемой пластинки будет определено с точностью относительной толщины в каждой ее точке.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 17-08-00849а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гольденвейзер А.Л.* Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 512 с.
2. *Фирсанов В.В.* Об уточнении классической теории прямоугольных пластинок из композиционных материалов // Механика композиционных материалов и конструкций. 2002. Т. 8. № 1. С. 28–64.

3. *Фирсанов В.В.* Исследование напряженно-деформированного состояния прямоугольных пластинок на основе неклассической теории // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2016. № 6. С. 35–43.
4. *Фирсанов В.В.* Напряженное состояние типа “пограничный слой” – краевое кручение прямоугольной пластинки // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2016. № 6. С. 44–51.
5. *Фирсанов В.В.* Математическая модель напряженно-деформированного состояния прямоугольной пластинки переменной толщины с учетом пограничного слоя // Механика композиционных материалов и конструкций. 2016. Т. 22. № 1. С. 3–18. (МРБД Chemical Abstracts).
6. *Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки. М.: Наука, 1966. 635 с.
7. *Фирсанов В.В., Доан Ч.Н.* Энергетически согласованная теория цилиндрических оболочек // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2011. № 6. С. 49–54.