
**НАДЕЖНОСТЬ, ПРОЧНОСТЬ, ИЗНОСОСТОЙКОСТЬ
МАШИН И КОНСТРУКЦИЙ**

УДК 534.13

**НЕЛИНЕЙНЫЙ ИЗГИБ ПОЛОГОЙ ПАНЕЛИ
ПОД ДЕЙСТВИЕМ ДАВЛЕНИЯ ГАЗА**© 2019 г. М. А. Ильгамов^{1,2,*}, В. Е. Моисеева^{2,**}¹ Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, Москва, Россия² Институт механики и машиностроения ФИЦ “Казанский научный центр РАН”, Казань, Россия

*e-mail: ilgamov@anrb.ru

**e-mail: vemoi@yandex.ru

Поступила в редакцию 13.09.2018 г.

Принята к публикации 18.02.2019 г.

Рассмотрен изгиб круглой весьма пологой панели под действием избыточных давлений на нижнюю и верхнюю поверхности. Используется уточненное выражение распределенной поперечной силы, зависящей не только от перепада давлений на поверхности, но и от взаимодействия среднего избыточного давления и кривизны срединной поверхности. Это уточнение проводится в линейном приближении. Предполагается, что кромка панели изолирована от избыточного давления. Дополнена классическая теория нелинейного изгиба круглой пологой панели под действием давлений на ее поверхности.

Ключевые слова: круглая пологая панель, перепад давлений, среднее давление, вакуумирование, изгиб, устойчивость

DOI: 10.1134/S0235711919030076

Введение. Отличительной чертой весьма пологой панели или пластины с начальной погибью является реализация разных напряженно-деформированных состояний в зависимости от знака перепада давлений на ее поверхности [1, 2]. Если обозначить через h толщину, γ — удельный вес материала, γh — вес единичной площадки панели, p_1 , p_2 — избыточные давления, действующие на нижнюю и верхнюю поверхности панели выпуклостью вниз, то при увеличении поперечной нагрузки, направленной вниз ($p_1 < \gamma h + p_2$), происходит плавное возрастание ее прогиба. При $p_1 > \gamma h + p_2$ и некоторых дополнительных условиях на входные параметры может происходить резкое перемещение панели в сторону ее вогнутости (“хлопок” [2]). Подъемистые панели прохлопывают, как правило, по несимметричной форме. Для весьма пологих панелей характерна только симметричная форма прохлопывания [2–6].

Насколько известно, в литературе [1–10] отсутствует анализ напряженно-деформированного состояния при изгибе тонких упругих пластин, оболочек и мембран в зависимости от среднего давления окружающей среды. В классической теории изгиба принимается, что поперечная распределенная нагрузка q на тонкую пластину равна $q = \gamma h + p_2 - p_1$. В случае малого среднего избыточного давления или приложения избыточного давления только к одной из поверхностей, а также малом отношении среднего давления к модулю упругости материала E это значение q является достаточно точным.

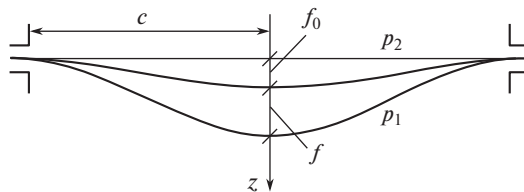


Рис. 1. Круглая весьма пологая панель.

Учет влияния разности площадей нижней и верхней поверхностей, среднего давления $p_m = (p_1 + p_2)/2$ на цилиндрический изгиб удлиненной пластины приводит к выражению для распределенной поперечной нагрузки [11, 12]

$$q = \gamma h - p_1 + p_2 + p_m h (d^2 w / dx^2), \quad (1)$$

где функция прогиба $w(x)$ зависит от эффективной жесткости $D(1 + \alpha)$. Здесь D – изгибная жесткость пластины, α – безразмерный параметр, который для шарнирно закрепленной пластины длиной L равен

$$\alpha \approx (p_m / E)(L/h)^2. \quad (2)$$

При получении (1), (2) предполагается, что кромки пластины изолированы от действия давлений p_1, p_2 . Это зависит от конструкции опорных устройств (например, заземление, которое препятствует продольному перемещению пластины).

Для конструкций типа железобетонных, корабельных при атмосферном давлении или односторонних невысоких давлениях параметр α равен нулю или весьма мал. Но для конструкций оборудования нефтехимии, энергетики, глубоководных аппаратов, аэрокосмической техники могут быть немалые значения α . Если $E = 2 \times 10^6$ бар (сталь), $p_m = 20$ бар, $L/h = 10^2$, то $\alpha = 0.1$. Эффективная жесткость повышается на 10%. В случае $E = 2 \times 10^5$ бар (магниевый сплав) параметр $\alpha = 1$. При этом эффективная жесткость равна $2D$, прогиб меньше в два раза, чем в случае, когда не учитывается разность площадей верхней и нижней поверхностей пластины.

В работе [12] значение прогиба при определении параметра α по моделям Кирхгофа и Тимошенко сравнивается с классическим результатом. В [13] изучено поведение пластины при вакуумировании ее поверхностей. При этом значение параметра α отрицательное. Установлена возможность выпучивания пластины под действием среднего отрицательного давления при равенстве отрицательных избыточных давлений.

1. Постановка задачи. Круглая весьма пологая панель, выпуклостью обращенная вниз, испытывает давления $p_0 + p_1, p_0 + p_2$ на нижнюю и верхнюю поверхности (рис. 1). Здесь p_0 – атмосферное давление, p_1, p_2 – избыточные давления, которые могут иметь и отрицательные значения (вакуумирование поверхностей панели). В последнем случае должно быть ограничение $p_0 + p_1 \geq 0, p_0 + p_2 \geq 0$. Для случая жидкости можно принять $p_0 + p_1 \geq p_v, p_0 + p_2 \geq p_v$, где p_v – давление насыщенных паров (для воды $p_v = 0.022$ бар). Задаются определенные условия закрепления на кромке $r = c$ и действия давления на эти кромки. Предполагается, что на сечение $r = c$ действует либо только давление p_0 , либо $p_0 + p_m$, где p_m – среднее избыточное давление. Под действием этих давлений и собственного веса происходит осесимметричный изгиб. Направление вниз принимается за положительные значения распределенной поперечной силы q , начального и текущего прогибов, оси z .

Система нелинейных уравнений весьма пологой панели (или пластины с начальной погибью $w_0(r)$) относительно функции прогиба $w(r)$ и функции напряжений $\Phi(r)$ имеет вид [2, с. 179]

$$\begin{aligned} D \frac{d}{dr} (\nabla^2 w) - \frac{h}{r} \frac{d\Phi}{dr} \left(\frac{dw_0}{dr} + \frac{dw}{dr} \right) &= \Psi, \\ \frac{d}{dr} (\nabla^2 \Phi) + \frac{E}{r} \left[\frac{dw_0}{dr} \frac{dw}{dr} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dr} \right)^2 \right] &= 0, \\ D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad \sigma_r = \frac{d\Phi}{rdr}, \quad \sigma_\varphi = \frac{d^2\Phi}{dr^2}, \quad \Psi = \frac{1}{r} \int_0^r q r dr. \end{aligned} \quad (3)$$

Предполагается, что в начальном состоянии панель находится под всесторонним атмосферным давлением p_0 (оно действует также на кромку $r = c$). Это состояние панели считается ненапряженным. Прогиб w возникает при действии избыточных давлений p_1 и p_2 . Относительно w , Φ используются граничные условия защемления и свободного перемещения точек контура по радиусу

$$w = 0, \quad \frac{dw}{dr} = 0, \quad \frac{d\Phi}{rdr} = 0 \quad (r = c). \quad (4)$$

Нелинейная краевая задача (3)–(4) основана на гипотезах Кирхгоффа [2]. При определении поперечной распределенной нагрузки q также остаемся в рамках этих гипотез, в соответствии с которыми кривизны срединной поверхности равны

$$\kappa_r = -\frac{d^2(w_0 + w)}{dr^2}, \quad \kappa_\varphi = -\frac{d(w_0 + w)}{rdr}. \quad (5)$$

Площадь срединной поверхности равна $dS = dr \cdot r d\varphi$, площади нижней и верхней поверхностей dS_1 , dS_2 выражаются через кривизны следующим образом

$$\begin{aligned} dS_1 &= dr \left(1 + \frac{h}{2} \kappa_r \right) r d\varphi \left(1 + \frac{h}{2} \kappa_\varphi \right), \\ dS_2 &= dr \left(1 - \frac{h}{2} \kappa_r \right) r d\varphi \left(1 - \frac{h}{2} \kappa_\varphi \right). \end{aligned} \quad (6)$$

Равнодействующая поперечных сил равна

$$q dS = \gamma h dS + p_2 dS_2 - p_1 dS_1. \quad (7)$$

Здесь собственный вес панели отнесен к срединной поверхности. Подставляя выражения (5), (6) в (7) и отбрасывая нелинейные члены, получаем

$$\begin{aligned} q &= p_e + p_m h \nabla^2 (w_0 + w), \quad p_e = \gamma h + p_2 - p_1, \\ \nabla^2 &= \frac{d}{rdr} \left(r \frac{d}{dr} \right), \quad p_m = \frac{p_1 + p_2}{2}. \end{aligned} \quad (8)$$

С учетом q из (8) функцию Ψ можно записать в виде

$$\Psi = \frac{p_e r}{2} + \frac{p_m h}{r} \int_0^r r \nabla^2 (w + w_0) dr = \frac{p_e r}{2} + p_m h \frac{d}{dr} (w + w_0). \quad (9)$$

С целью упрощения анализа принимаем приближенные выражения для начальных и дополнительных прогибов, удовлетворяющие условиям (4), в виде [2, с. 205]

$$w_0 = f_0 (1 - r^2/c^2)^2, \quad w = f (1 - r^2/c^2)^2. \quad (10)$$

Здесь f_0 , f – соответствующие стрелы прогибов.

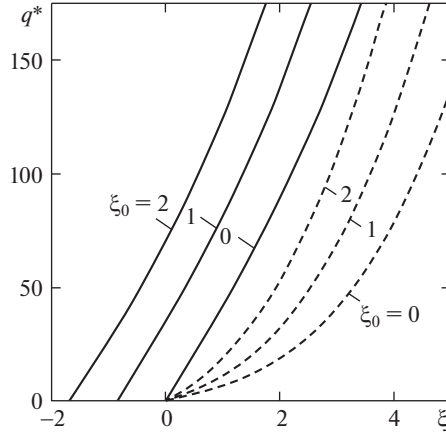


Рис. 2. Зависимость безразмерной стрелы прогиба ξ от безразмерной распределенной поперечной силы q^* , направленной в сторону выпуклости круглой панели разной пологости ($\xi_0 = 0; 1; 2$), при параметрах $\alpha = 0$ (штриховые линии) и $\alpha = 6$ (сплошные линии).

Подставив функции (10) во второе уравнение (3), получаем следующее ограниченное при $r = 0$ выражение

$$\frac{d\Phi}{dr} = -\frac{E(f^2 + 2ff_0)}{6c} \left(6\frac{r^3}{c^3} - 4\frac{r^5}{c^5} + \frac{r^7}{c^7} \right) + \frac{Cr}{2}. \quad (11)$$

При свободном смещении края пластины по радиусу из последнего условия (4) следует $C = (E/c^2)(f^2 + 2ff_0)$. Подставим в первое уравнение (3) и в (9) выражения

$$\frac{d}{dr}(\nabla^2 w) = \frac{32fr}{c^4}, \quad \frac{d}{dr}(w + w_0) = -\frac{4(f + f_0)}{c} \left(\frac{r}{c} - \frac{r^3}{c^3} \right).$$

Интегрируя уравнение (3) по методу Бубнова–Галеркина с учетом выражений (10), получаем относительно амплитуды безразмерного прогиба $\xi = f/h$

$$A(\xi^3 + 3\xi_0\xi^2 + 2\xi_0^2\xi) + \frac{16}{3(1-\nu^2)}[(1+\alpha)\xi + \alpha\xi_0] = q^*, \quad (12)$$

$$A = \frac{6}{7}, \quad \xi_0 = \frac{f_0}{h}, \quad q^* = \left(\frac{p_e}{E} \right) \left(\frac{c}{h} \right)^4, \quad \alpha = \kappa \left(\frac{p_m}{E} \right) \left(\frac{c}{h} \right)^2, \quad \kappa = \frac{3(1-\nu^2)}{4}.$$

Известно [4], что при условии соответствия аппроксимаций дополнительного прогиба пластинки и ее начальной погиби, вывод основного уравнения можно распространить и на другие граничные условия. Например, при условиях шарнирного опирания, когда точки контура смещаются свободно

$$w = 0, \quad \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw}{dr} = 0, \quad \frac{d\Phi}{rdr} = 0 \quad (r = c), \quad (13)$$

выражения для параметров A и α в уравнении (12) принимают вид

$$A = \frac{2a^3(84 - 168b + 140b^2 - 56b^3 + 9b^4)}{21(3 - 2b)},$$

$$\alpha = \kappa \left(\frac{p_m}{E} \right) \left(\frac{c}{h} \right)^2, \quad \kappa = \frac{3(1 - \nu^2)(6 - 8b + 3b^2)}{4(3 - 2b)}, \quad a = \frac{3 + \nu}{5 + \nu}, \quad b = \frac{1 + \nu}{3 + \nu}.$$

2. Изгиб при направлении нагрузки в сторону выпуклости панели. В этом случае $\gamma h + p_2 > p_1$ ($p_e < 0$). Рассмотрим случай защемления кромки панели.

На рис. 2 изображены монотонно возрастающие зависимости $q^*(\xi)$ по (12) при $\alpha = 6$ (сплошные линии) и $\alpha = 0$ (штриховые линии) для ряда значений начальной погиби ξ_0 . С увеличением поперечной силы происходит рост относительного дополнительного прогиба ξ , что увеличивает кривизну панели.

В классическом решении [2] рост прогиба начинается, как только появляется поперечная сила q^* (штриховые линии на рис. 2). В отличие от него при $\alpha > 0$ положительный прогиб проявляется только при некотором ненулевом значении поперечной силы q^* . Чем больше параметр α , тем больше значение q^* , при котором начинается дополнительный прогиб панели. Это значение q^* может быть определено из уравнения (12), в котором отбрасываются нелинейные члены. Решение его имеет вид

$$\left(\frac{12}{7} \xi_0^2 + \frac{16(1 + \alpha)}{3(1 - \nu^2)} \right) \xi = q^* - \frac{16\alpha \xi_0}{3(1 - \nu^2)}. \quad (14)$$

Здесь увеличению жесткости за счет среднего давления соответствует член $16\alpha[3(1 - \nu^2)]^{-1}$ в левой части. Выражение в скобках в левой части характеризует эффективную жесткость панели, а в правой части — эффективную поперечную распределенную силу. Рост прогиба происходит только при положительном значении правой части (14) $q^* > 6\alpha\xi_0$ (при $\nu = 1/3$). В размерных величинах это неравенство имеет вид

$$\frac{p_e}{p_m} > 4 \left(\frac{f_0}{h} \right) \left(\frac{h}{c} \right)^2. \quad (15)$$

При выполнении условия (15) прогиб панели и кривизна ее возрастают, а при нарушении его появляется отрицательное значение ξ . Следовательно, точки панели перемещаются в сторону, обратную направлению распределенной поперечной силы p_e (или q^*), кривизна уменьшается. Наибольшее перемещение получается при $p_e/p_m \rightarrow 0$. Тогда, предполагая $\xi = \varepsilon - \xi_0$, $\varepsilon \ll \xi_0$, производя линеаризацию уравнения (12) относительно ε , получаем при $\nu = 0.3$

$$\varepsilon \approx \frac{7\xi_0}{7(1 + \alpha) - \xi_0^2}, \quad \xi \approx -\frac{(7\alpha - \xi_0)\xi_0}{7(1 + \alpha) - \xi_0^2}. \quad (16)$$

Эти формулы тем точнее, чем больше параметр α и меньше стрела начальной погиби. При $\alpha = 6$, $\xi_0 = 1$ и 2 (рис. 2) из (16) следуют соответственно значения $\xi \approx -0.85$ и $\xi \approx -1.78$. Таким образом, весьма пологая панель при отсутствии перепада давлений ($p_e = 0$) и высоком среднем давлении p_m выпрямляется, приближаясь к плоскости, проходящей через круговую опору. При этом возникают напряжения изгиба, а также сжатия в центральной части и растяжения по периферии. Из классической теории пластин и оболочек в рассматриваемом случае следует отсутствие перемещений и напряжений. Этот эффект имеет место и в более общем случае. Например, при $q^* = 50$, $\xi_0 = 2$ и $\alpha = 0$ из рис. 2 следует, что стрела безразмерного прогиба равна $f/h \approx 2$, а при $\alpha = 6$ равна $f/h = -0.5$ (выпрямление).

Для значений параметра α с разными знаками на рис. 3 представлены зависимости безразмерного прогиба в центре панели от безразмерного параметра q^* для значений $\xi_0 = 0; 1; 2$. Видно, что в окрестности $q^* = 0$, при $\xi_0 > 0$, $\alpha = 0.3$ за счет влияния сред-

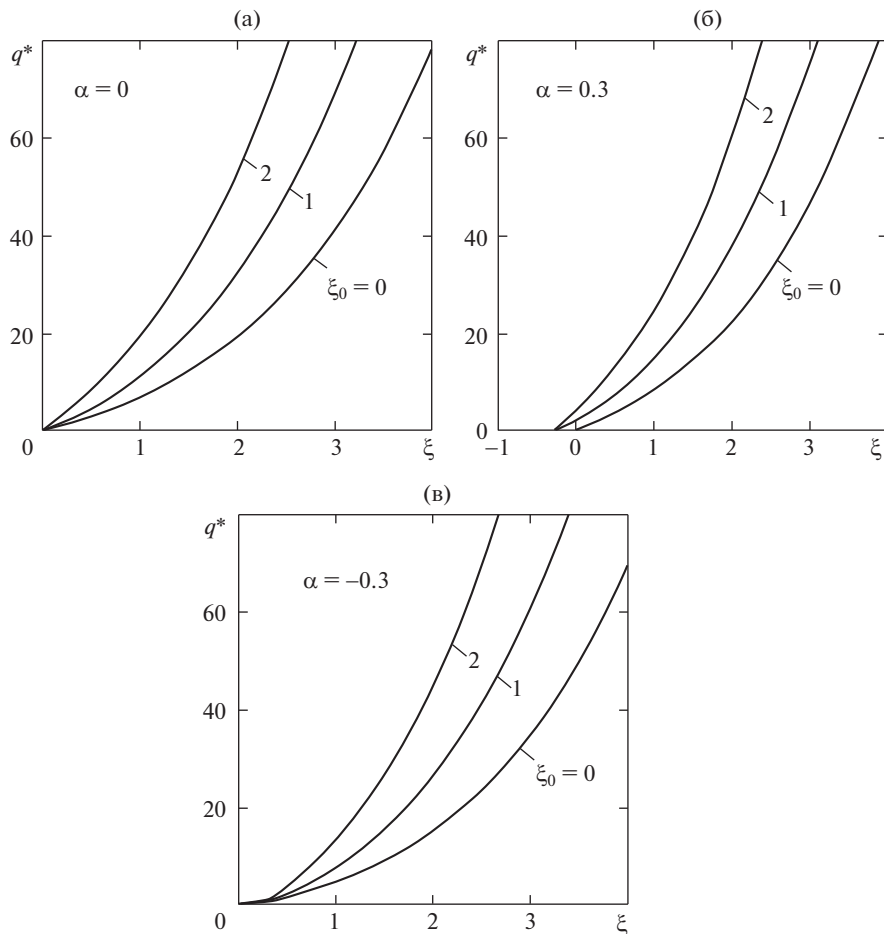


Рис. 3. Зависимость безразмерной стрелы прогиба ξ от безразмерной распределенной поперечной силы q^* , направленной в сторону выпуклости круглой панели при разных значениях пологости ($\xi_0 = 0; 1; 2$) и параметра α (0; 0.3; -0.3).

него давления p_m наблюдается изгиб в сторону вогнутости (при нарушении условия (15)), затем прогиб плавно возрастает. Как и выше, при фиксированном значении q^* при увеличении α прогиб в центре уменьшается, а при отрицательном значении α — возрастает.

Линейное решение (14) неограниченно возрастает при значении параметра $\alpha \approx -1 - 0.3\xi_0^2$ (при $\nu = 1/3$), которое можно считать критическим. Для вакуумированной плоской пластины ($\xi_0 = 0$) критическое значение равно $\alpha = -1$ [13]. При этом предполагается, что на кромки пластины и панели действует только давление p_0 .

3. Изгиб при поперечном направлении нагрузки в сторону вогнутости панели. При этом нужно изменить знак в правой части уравнения (12) или знак ξ_0 на отрицательный (рис. 4а). Примем последний случай. Тогда уравнение (12) приобретает вид

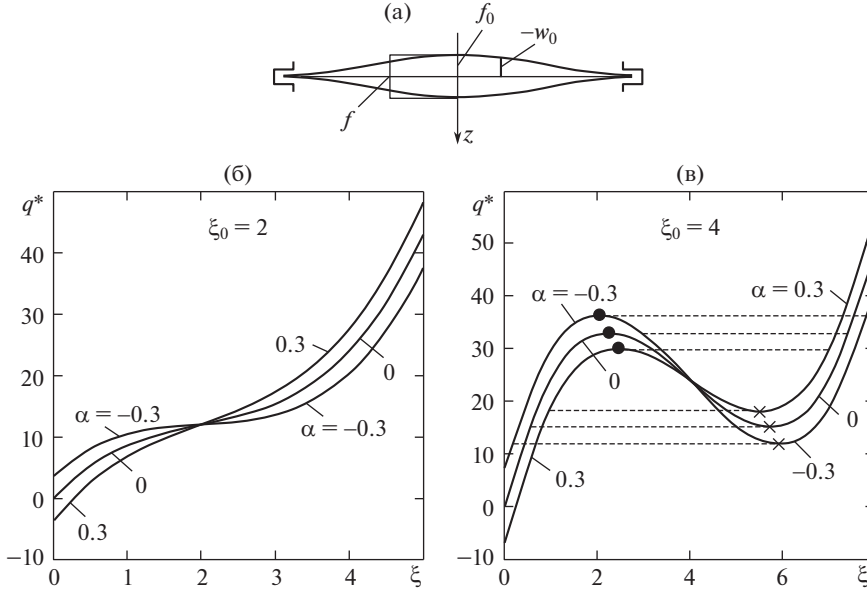


Рис. 4. Зависимость безразмерной стрелы прогиба ξ круглой панели от безразмерной поперечной силы q^* , направленной в сторону вогнутости при разных значениях пологости ($\xi_0 = 2; 4$) и параметра α (0; 0.3; -0.3).

$$A(\xi^3 - 3\xi_0\xi^2 + 2\xi_0^2\xi) + \frac{16}{3(1-\nu^2)}((1+\alpha)\xi - \alpha\xi_0) = q^*. \quad (17)$$

Приравняв нулю $dq^*/d\xi$, определим значения ξ_0 , при которых q^* в (17) достигают экстремальных значений

$$3A\xi^2 - 6A\xi_0\xi + 2A\xi_0^2 + \frac{16}{3(1-\nu^2)}(1+\alpha) = 0, \quad (18)$$

$$|\xi_0| \geq \frac{4}{3} \sqrt{\frac{3(1+\alpha)}{A(1-\nu^2)}}, \quad \xi = \xi_0 \pm \sqrt{\frac{\xi_0^2}{3} - \frac{16(1+\alpha)}{9A(1-\nu^2)}}.$$

При этом верхняя и нижняя критические силы равны

$$q_B^* = \xi_0(1-\psi) \left[A\psi\xi_0^2(1+\psi) + \frac{16(1+\alpha)}{3(1-\nu^2)} \right] - \frac{16\alpha\xi_0}{3(1-\nu^2)},$$

$$q_H^* = \xi_0(1+\psi) \left[-A\psi\xi_0^2(1-\psi) + \frac{16(1+\alpha)}{3(1-\nu^2)} \right] - \frac{16\alpha\xi_0}{3(1-\nu^2)},$$

$$\psi = \sqrt{\frac{1}{3} \left(1 - \frac{16(1+\alpha)}{3A(1-\nu^2)\xi_0^2} \right)}.$$

На рис. 4 представлены зависимости $q^*(\xi)$ для случая защемленного края панели, когда относительная начальная погибь равна удвоенной (рис. 4б) и учетверенной (рис. 4в) толщине пластины. При этом рассмотрены варианты без учета влияния среднего давления на изгиб (кривые $\alpha = 0$) и с учетом (кривые $\alpha = 0.3, \alpha = -0.3$).

При малой относительной начальной погиби (рис. 4б) с ростом перепада давления прогиб монотонно возрастает. Увеличение параметра α при фиксированном значении q^* до точки перегиба ($d^2 q^*/d\xi^2 = 0$) при $\xi = \xi_0$ приводит к росту прогиба, а после — к уменьшению. Это объясняется тем, что до положения панели, совпадающей с плоскостью, проходящей через круговую опору (до точки перегиба), направления сил от перепада давлений и среднего давления совпадают. После перехода через плоскость, сила от среднего давления направлена против силы от перепада ввиду изменения знака кривизны. Это видно по соотношениям (8).

При выполнении условия (18) ($\xi_0 = 4$, рис. 4в) после достижения верхней критической силы с интенсивностью q_B^* , отмеченной точками, происходит хлопок. Хлопок представляет собой скачкообразный переход панели из равновесного состояния с относительно небольшими прогибами в равновесное состояние с большими прогибами [2, 7]. При последовательном уменьшении силы после достижения q_H^* (значок $\times$) панель скачком возвращается в состояние с малыми прогибами. Из рис. 4в видно, что наибольшие значения верхней критической силы q_B^* наблюдаются при вакуумировании ($\alpha = -0.3$), увеличение параметра α приводит к уменьшению q_B^* . До хлопка при постоянном значении перепада давления с ростом α прогиб увеличивается. После хлопка при фиксированном значении q^* с увеличением параметра α прогиб уменьшается. Отметим, что в данном примере наименьшие значения q_H^* наблюдаются при $\alpha = -0.3$.

5. Заключение. Влияние на изгиб среднего избыточного давления $p_m = (p_1 + p_2)/2$ на поверхности тонкой круглой весьма пологой панели радиусом c и толщиной h определяется безразмерным параметром $\alpha \approx \kappa \left(\frac{p_m}{E} \right) \left(\frac{c}{h} \right)^2$, где E — модуль упругости материала, κ — коэффициент, зависящий от граничных условий (при $\nu = 1/3$ для шарнирного опирания $\kappa = 0.99$, при защемлении — $\kappa = 0.67$), p_1, p_2 — избыточные давления на нижнюю и верхнюю поверхности.

В случае, когда распределенная поперечная нагрузка $q = \gamma h + p_2 - p_1$ направлена в сторону выпуклости панели, происходит монотонное возрастание ее прогиба. Но при увеличении параметра α для фиксированного значения q прогиб уменьшается. При высоких значениях α , когда влияние среднего давления превосходит поперечную силу, панель выпрямляется, принимает плоскую форму.

Если поперечная нагрузка действует на панель в направлении начальной вогнутости, то при больших ξ_0 достигаются верхняя и нижняя критические нагрузки. При этом наибольшее и наименьшее значения критической нагрузки наблюдаются при отрицательных значениях параметра α .

Благодарности. Авторы выражают благодарность М.С. Ганеевой и З.В. Скворцовой за обсуждение статьи.

Конфликт интересов: Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Timoshenko S.* Theory of Plates and Shells. New York: McGraw—Hill Book Company Inc., 1940. 399 p. (Тимошенко С.П. Пластины и оболочки. М.; Л.: Гостехиздат, 1948. 460 с.)
2. *Вольмир А.С.* Гибкие пластинки и оболочки. М.: Гостехиздат, 1956. 420 с.
3. *Феодосьев В.И.* К расчету хлопающей мембраны // ПММ. 1946. Т. 10. № 2. С. 295—300.
4. *Nylander H.* Die Durchschlaglast von Platten // Oesterr. Ing.-Archiv. 1955. № 2—3. Р. 181—196.
5. *Муштару Х.М., Галимов К.З.* Нелинейная теория упругих оболочек. Казань: Таткнигоиздат, 1957. 431 с.

-
6. Корнишин М.С. Нелинейные задачи теории пластин и пологих оболочек и методы их решения. М.: Наука, 1964. 191 с.
 7. Корнишин М.С., Исанбаева Ф.С. Гибкие пластины и панели. М.: Наука, 1968. 260 с.
 8. Свирский И.В. Методы типа Бубнова–Галеркина и последовательных приближений. М.: Наука, 1968. 200 с.
 9. Ворович И.И. Математические проблемы нелинейной теории пологих оболочек. М.: Наука, 1989. 376 с.
 10. Shen H.Sh. Postbuckling Behavior of Plates and Shells. Shanghai Jiao Tong University, 2017. 675 p.
 11. Ильгамов М.А. Влияние давления окружающей среды на изгиб тонкой пластины и пленки // ДАН. 2017. Т. 476. № 4. С. 402–405.
 12. Ильгамов М.А. О влиянии давления окружающей среды на изгиб пластины // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2017. № 5. С. 30–35.
 13. Ильгамов М.А. Изгиб и устойчивость тонкой пластины при вакуумировании ее поверхностей // ДАН. 2018. Т. 480. № 5. С. 542–544.